ベクトルとしてまとめると、

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\mu_0(I_x, I_y, I_z)$$

$$+\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_x}{\partial t},\ \frac{\partial \boldsymbol{E}_y}{\partial t},\ \frac{\partial \boldsymbol{E}_z}{\partial t}\right)$$

ベクトル演算子を導入して、

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

または

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

今日の問題。

マクスウェルの方程式の積分形に、対応する微分形を示しまとめよ。（ヒントとして積分形を示す）

マクスウエルの方程式の積分形

電場の面積分 $\displaystyle\int_{[閉曲面上]}\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS=\sum_{[閉曲面内部]}Q/\varepsilon_0$ （電場のガウスの法則）

線積分 $\displaystyle\oint_{[面積の周囲]}\vec{E}\cdot d\vec{s}=-\frac{d}{dt}\int_{面積}\vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$ （電磁誘導の法則）

磁場の面積分 $\displaystyle\int_{[閉曲面上]}\vec{B}\cdot\hat{n}\,dS=0$ （磁場のガウスの法則）

線積分 $\displaystyle\oint_{[面積の周囲]}\vec{B}\cdot d\vec{s}=\mu_0\sum_{[面積を通る]}I\ \boxed{+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{面積}\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$

（アンペール・マクスウエルの法則）

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。

マクスウエルの方程式(群)、通常はこの微分形を意味する

電場のガウスの法則 $\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$ または $\nabla\vec{E}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$

電磁誘導の法則 $\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ $\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

磁場のガウスの法則 $\mathrm{div}\,\vec{B}=0$ $\nabla\vec{B}=0$

アンペール・マクスウエルの法則

$\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

マクスウェルの方程式（群）は波動方程式を含む

電磁誘導の法則 $\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ を具体的に書き出して、

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x},\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial B_x}{\partial t},\frac{\partial B_y}{\partial t},\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

アンペール・マクスウェルの法則 $\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ も同様に

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\mu_0(I_x,I_y,I_z)$$
$$+\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial t},\frac{\partial E_y}{\partial t},\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)$$

簡単のため、$\vec{B}=(0,B_y,0)$ 、$\vec{E}=(0,0,E_z)$ 、$\vec{I}=0$ を仮定すると

生き残るのは、

アンペールの法則

$$\frac{\partial B_y}{\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

両辺をtで偏微分

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t\,\partial x}}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

電磁誘導の法則

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

両辺をxで偏微分

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial x\,\partial t}}$$

$\boxed{\quad}$ で囲まれた部分は、「偏微分の順番が交換できる」と仮定とすると等しい。したがって、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$ ：波動方程式

が得られた。

$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ H/m=N/A^2

$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ F/m

$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ と置いて、 $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$ を、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$ と、書き直す。

この偏微分の解は、2階微分可能でさえあれば、どんな関数$f(x)$でも、

$$E_z(x,t)=f\left(x\pm ct\right)$$

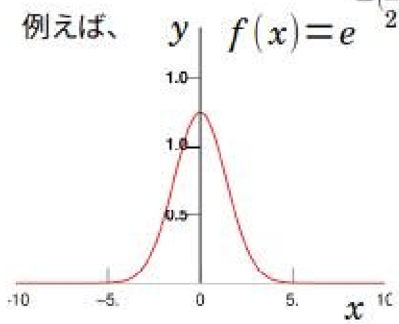
が、この偏微分方程式の解になる。証明は簡単で、 f のx, t での２階偏微分は、

$$\frac{\partial^2 f(x\pm ct)}{\partial x^2}=f''(x\pm ct)$$

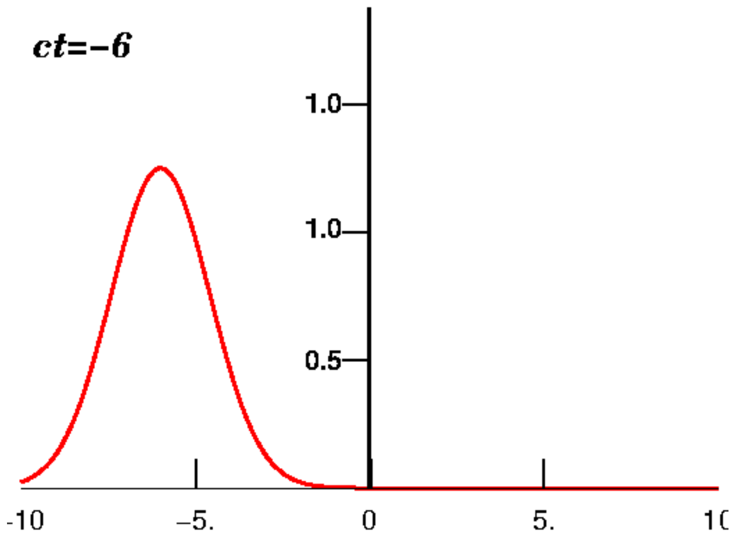
$$\frac{\partial^2 f(x\pm ct)}{\partial t^2}=c^2 f''(x\pm ct)$$

であることを見れば、明らかだろう。

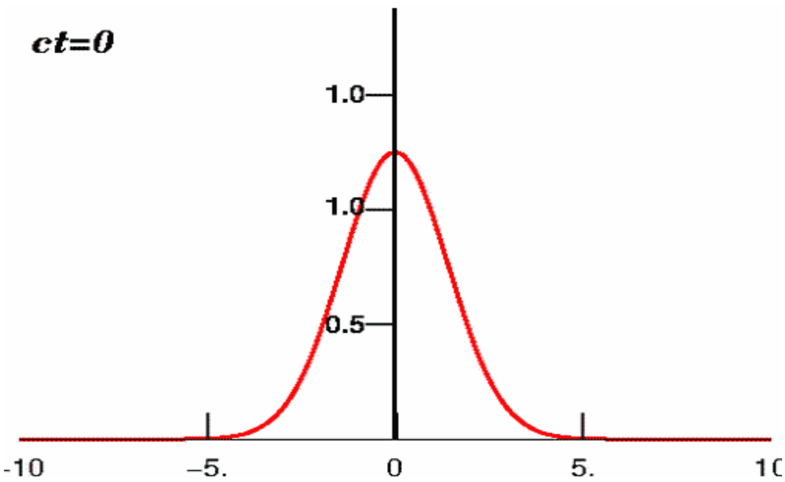
例えば、 $f(x)=e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$



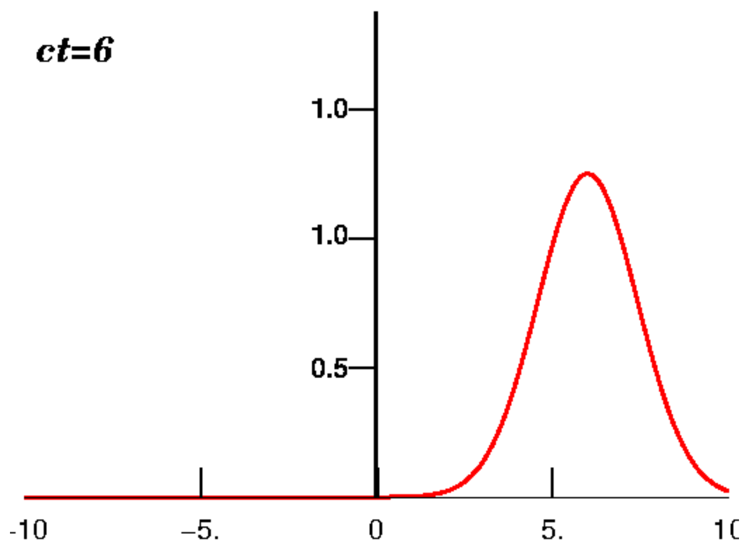
$$f(x) = e^{-\left(\frac{x+6}{2}\right)^2}$$



$$f(x) = e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

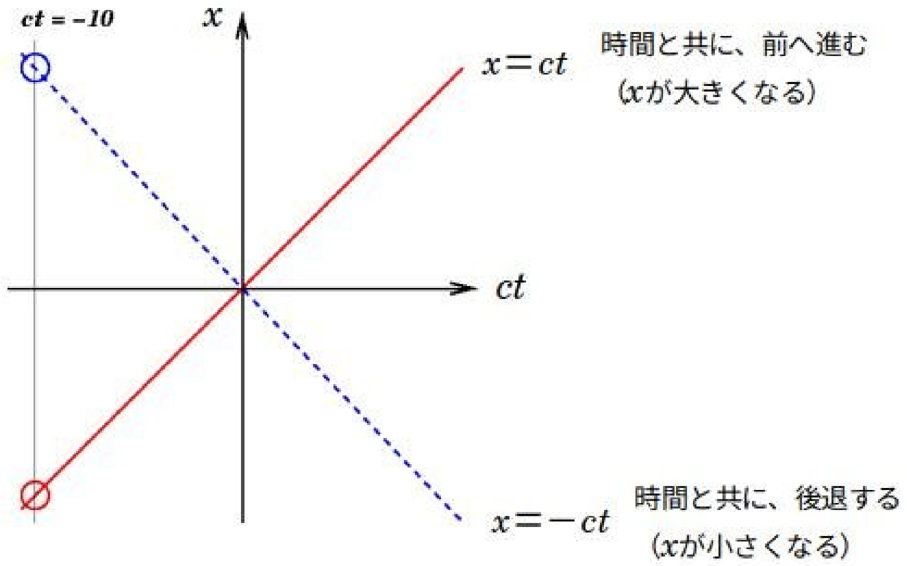


$$f(x) = e^{-\left(\frac{x-6}{2}\right)^2}$$



前の2つの例を、頂点の移動に注目してみると、

$f(x \pm ct) = e^{-\left(\frac{(x \pm ct)}{2}\right)^2}$ の頂点は、ctの前の符合により、$x = ct$ か、$x = -ct$

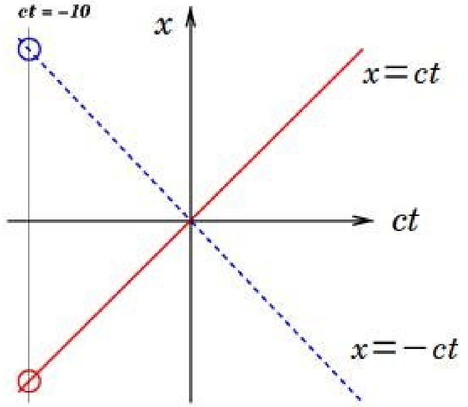


マクスウェルの方程式が含んでいる波動方程式のまとめ。

波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$ または、$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ と置いて、$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

その解、　$E_z(x, t) = f(x \pm ct)$ には、進行する波形と、後退する波形がある。なお、



$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \equiv 299792458 [\mathrm{m/sec}]$$
$$\approx 3.00 \times 10^8 [\mathrm{m/sec}]$$

は光の速度に等しい。

よく使う進行波の式

波長をλ、周期をT、振動数を fとして、振幅Aの進行波、

$$y = A\sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(x-\frac{\lambda}{T}t\right)\right)$$

$$= A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}-2\pi ft\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-\lambda ft)\right)$$

$$= A\sin(kx-\omega t) = A\sin\left(k\left(x-\frac{\omega}{k}t\right)\right)$$

この時、 $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ $\omega \equiv 2\pi f$ kを波数、ωを角振動数と呼ぶ。

なお、この波動の進行速度vは、 $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$

注意、

$y = A\sin(\omega t - kx)$ $y = A\cos(kx - \omega t)$

なども同じく進行波。後退波を表すには、”－”を”＋”に変える。

2020 年度、秋学期レポート課題。

１，マクスウェルの方程式の中から、積分法則の左辺が面積分になるものを一つ以上、
線積分になるものを一つ以上選び、それぞれの面積法則が成立つ理由を解説せよ。

２，マクスウェルの方程式が、進行、ないし後退する波動方程式を含むことを示し、
その進行（後退）速度を求めよ。

この証明、応用、論理的に正しければ、どのようなものであっても構わないが、
一応授業のなかで講義しているので、それを参考にするほうが、レポートを
書きやすいと思う。なお、授業でこの証明はここでは出来ないとしたものは、
そのまま書いてよい。