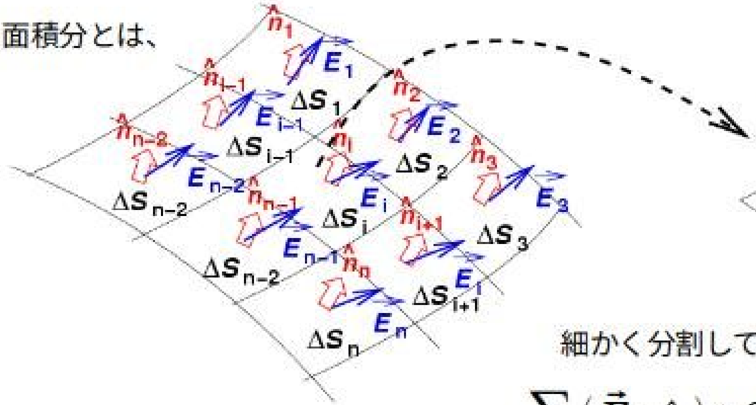
積分方程式を微分方程式化する

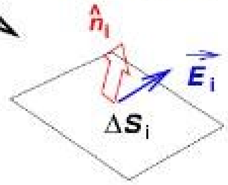
ガウスの法則　$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$

を微分形に書き変える。

面積分とは、

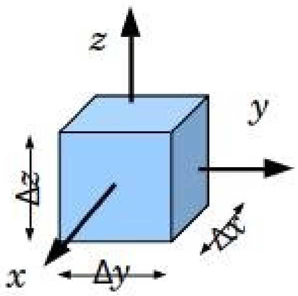


$N_i = \varepsilon_0 (\vec{E}_i\cdot\hat{n}_i)\Delta S_i$



細かく分割して全体の和=>積分

$$\sum_i (\vec{E}_i\cdot\hat{n}_i)\Delta S_i \rightarrow \int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dS$$



ΔS_iを小さくとって、この逆をやる。

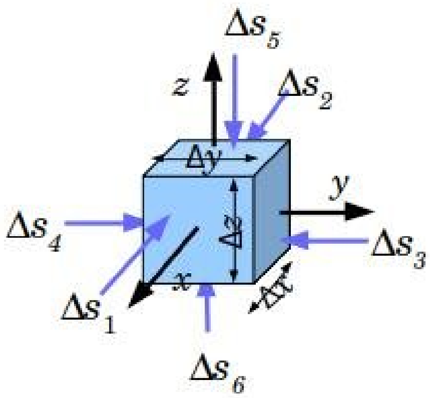
$$\int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dS \rightarrow \sum_i (\vec{E}_i\cdot\hat{n}_i)\Delta S_i$$

座標(x,y,z)を中心に持ち、yz平面、zx平面、xy平面に平行な６面で構成された直方体の表面で面積分を面毎に分解して、計算する。つまり、

$$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$$

の左辺を、

$$\int_{[直方体の表面]} (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dS \rightarrow \sum_{[直方体の表面]} (\vec{E}_i\cdot\hat{n}_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{6} (\vec{E}_i\hat{n}_i)\Delta S_i$$



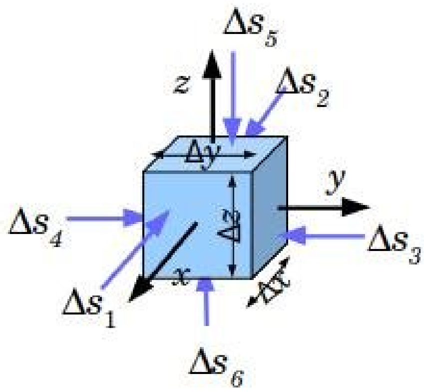
分割された面積の代表点は、それぞれの真ん中にとる。

また、数学的には、電場ベクトル$\vec{E}$　は、(x,y,z)それぞれの成分が空間の関数として、

$$\left(E_x(x,y,z), E_y(x,y,z), E_z(x,y,z)\right)$$

のように書けるベクトル関数であり、それぞれの座標を変数として、偏微分が可能であることを仮定する。

直方体の表面での和、 $\sum_{i=1}^{6}\left(\vec{E}_i \hat{n}_i\right)\Delta S_i$ の中のそれぞれの面の上での考察



真ん中の点を（x,y,z）として、

ΔS_1の代表点$(x+\Delta x/2,y,z)$、 $\hat{n}_1=\hat{i}$

$$\rightarrow\ \vec{E}_1 \hat{n}_1 = E_x(x+\Delta x/2, y, z)$$

ΔS_2の代表点$(x-\Delta x/2,y,z)$、 $\hat{n}_2=-\hat{i}$

$$\rightarrow\ \vec{E}_2 \hat{n}_2 = -E_x(x-\Delta x/2, y, z)$$

ΔS_3の代表点$(x,y+\Delta y/2,z)$、 $\hat{n}_3=\hat{j}$

$$\rightarrow\ \vec{E}_3 \hat{n}_3 = E_y(x, y+\Delta y/2, z)$$

ΔS_4の代表点$(x,y-\Delta y/2,z)$、 $\hat{n}_4=-\hat{j}$

$$\rightarrow\ \vec{E}_4 \hat{n}_4 = -E_y(x, y-\Delta y/2, z)$$

ΔS_5の代表点$(x,y,z+\Delta z/2)$、 $\hat{n}_5=\hat{k}$

$$\rightarrow\ \vec{E}_5 \hat{n}_5 = E_z(x, y, z+\Delta z/2)$$

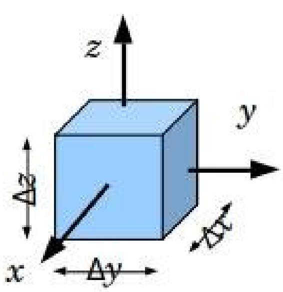
ΔS_6の代表点$(x,y,z-\Delta z/2)$、 $\hat{n}_6=-\hat{k}$

$$\rightarrow\ \vec{E}_6 \hat{n}_6 = -E_z(x, y, z-\Delta z/2)$$

さらに、ΔS_1, ΔS_2の面積は$[\Delta y\Delta z]$, ΔS_3, ΔS_4の面積は$[\Delta z\Delta x]$,

ΔS_5, ΔS_6の面積は $[\Delta x\Delta y]$なので、同じ面積をまとめて計算、

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6}\left(\vec{E}_i \hat{n}_i\right)\Delta S_i =& \left[\Delta y\Delta z\right]\left(E_x(x+\Delta x/2, y, z)-E_x(x-\Delta x/2, y, z)\right)\\ &+\left[\Delta z\Delta x\right]\left(E_y(x, y+\Delta y/2, z)-E_y(x, y-\Delta y/2, z)\right)\\ &+\left[\Delta x\Delta y\right]\left(E_z(x, y, z+\Delta z/2)-E_z(x, y, z-\Delta z/2)\right)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}&=\left[\Delta x\Delta y\Delta z\right]\frac{E_x(x+\Delta x/2, y, z)-E_x(x-\Delta x/2, y, z)}{\Delta x}\\ &+\left[\Delta x\Delta y\Delta z\right]\frac{E_y(x, y+\Delta y/2, z)-E_y(x, y-\Delta y/2, z)}{\Delta y}\\ &+\left[\Delta x\Delta y\Delta z\right]\frac{E_z(x, y, z+\Delta z/2)-E_z(x, y, z-\Delta z/2)}{\Delta z}\end{aligned}$$

$$\vec{E}(x,y,z)=\left(E_x(x,y,z),E_y(x,y,z),E_z(x,y,z)\right)$$

と書いた時、電場ベクトルの各成分が、それぞれ偏微分可能であれば、

$$\frac{E_x(x+\Delta x/2,y,z)-E_x(x-\Delta x/2,y,z)}{\Delta x}\to\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x}\quad(\Delta x\to 0)$$

$$\frac{E_y(x,y+\Delta y/2,z)-E_y(x,y-\Delta y/2,z)}{\Delta y}\to\frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y}\quad(\Delta y\to 0)$$

$$\frac{E_z(x,y,z+\Delta z/2)-E_z(x,y,z-\Delta z/2)}{\Delta z}\to\frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z}\quad(\Delta z\to 0)$$

従って、 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ が非常に小さいとき

$$\sum_{i=1}^{6}(\vec{E}_i\hat{n}_i)\Delta S_i\simeq[\Delta x\Delta y\Delta z]\cdot\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

したがって、電場に対するガウスの法則、

$$\int_{[直方体表面]}\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS=\sum\nolimits_{[直方体内部]}Q/\varepsilon_0$$

は、

$$[\Delta x\Delta y\Delta z]\cdot\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\simeq\sum\nolimits_{[閉曲面内部]}Q/\varepsilon_0$$

と微分式で書けたことになる。（$\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0$ の極限では等式になる。）

さらに$[\Delta x\Delta y\Delta z]$ は、この直方体の体積だから、

$$\rho_c\equiv\frac{\sum_{[直方体内部]}Q}{[\Delta x\Delta y\Delta z]}$$

と電荷密度を定義すると、

電場のガウスの法則の微分形として、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

とが得られた。

この関係はベクトル演算子

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \quad \text{または} \quad \nabla\vec{E}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

を用いて、簡単に書ける。

いずれも左辺は $\dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}+\dfrac{\partial E_z}{\partial z}$

を、まとめた書き方。特に後者は二つのベクトル $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ と $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ の内積が $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$ である事から、上の結果を

$$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{と} \quad \vec{E}=\left(E_x, E_y, E_z\right)$$

の形式的内積と見なしたもので、∇ はナブラと呼ばれる。ただし、掛ける順番を反対にすると

$$\vec{E}\nabla=E_x\frac{\partial}{\partial x}+E_y\frac{\partial}{\partial y}+E_z\frac{\partial}{\partial z}$$

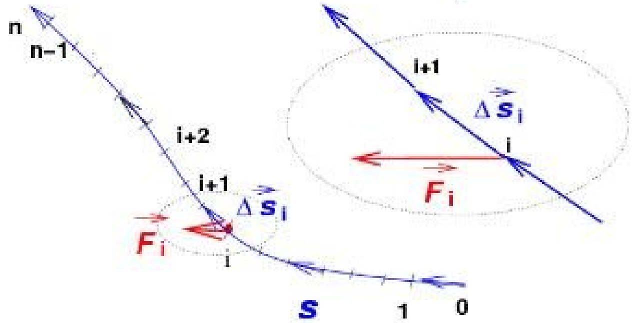
と、全く別の微分演算子になるので、内積とは別のものである。

電磁誘導の法則

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$ を微分形に書き変える。

以前、線積分は電位差を求めるために用いた。

$$V_{1,n} = -\sum_i \vec{E}_i\cdot\Delta\vec{s}_i \simeq -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$



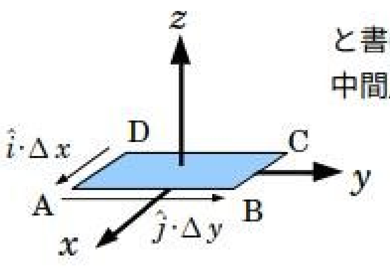
電磁誘導の法則で用いるのも全く同じ線積分であるが、閉曲線に対して線積分を行う。電位が定義出来る場合には、0になるべきものである。

x軸、y軸に平行な辺を持つ長方形ABCDをとり、各頂点それぞれの座標を A$(x+\Delta x/2, y-\Delta y/2, z)$, B$(x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z)$, C$(x-\Delta x/2, y+\Delta y/2, z)$, D$(x-\Delta x/2, y-\Delta y/2, z)$として、その囲む面積と辺で構成する閉曲線で、電磁誘導の法則を考える。電磁誘導の法則は、

$$\oint_{[ABCD]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\square ABCD} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

一周積分を各辺に分解して、

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\square ABCD} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$



と書けるが、Δx, Δyが非常に小さい時、辺AB、BC上の積分を、中間点を代表点として計算する。

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = \vec{E}(x+\Delta x/2, y, z)\cdot\hat{j}\cdot\Delta y$$
$$= E_y(x+\Delta x/2, y, z)\cdot\Delta y$$

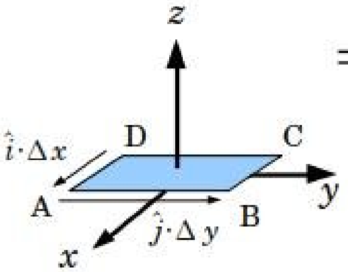
$$\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{s} = \vec{E}_x(x, y+\Delta y/2, z)\cdot(-\hat{i})\cdot\Delta x$$
$$= -E_x(x, y+\Delta y/2, z)\cdot\Delta x$$

同じ条件で、DC、AD上の積分は、

$$\int_C^D \vec{E}\cdot d\vec{s} = \vec{E}(x-\Delta x/2, y, z)\cdot(-\hat{j})\cdot\Delta y$$
$$= -E_y(x-\Delta x/2, y, z)\cdot\Delta y$$
$$\int_D^A \vec{E}\cdot d\vec{s} = \vec{E}(x, y-\Delta y/2, z)\cdot\hat{i}\cdot\Delta x$$
$$= E_x(x, y-\Delta y/2, z)\cdot\Delta x$$

同じ電場ベクトル成分に注目して、４辺を合計

$$\oint_{[ABCD]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \left[E_y(x+\Delta x/2, y, z) - E_y(x-\Delta x/2, y, z)\right]\cdot\Delta y$$
$$+\left[-E_x(x, y+\Delta y/2, z) + E_x(x, y-\Delta y/2, z)\right]\cdot\Delta x$$

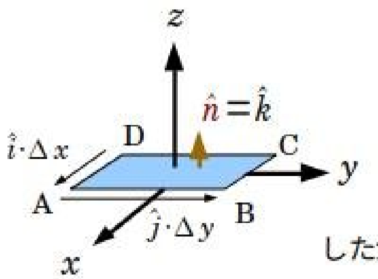


$$= [\Delta x \Delta y]\frac{E_y(x+\Delta x/2, y, z) - E_y(x-\Delta x/2, y, z)}{\Delta x}$$
$$-[\Delta x \Delta y]\frac{E_x(x, y+\Delta y/2, z) - E_x(x, y-\Delta y/2, z)}{\Delta y}$$
$$= [\Delta x \Delta y]\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$\Delta x, \Delta y$が非常に小さいとき電磁誘導の法則の右辺は、

$$-\frac{d}{dt}\int_{\Box ABCD} \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS = -\boxed{\frac{d}{dt}}\left(\vec{B}(x, y, z, t)\cdot\hat{k}\cdot S_{ABCD}\right)$$

代表点で考えると座標の関数でもあるので、



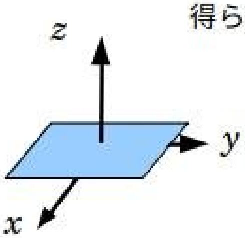
$$= -\frac{\partial B_z(x, y, z)}{\partial t}[\Delta x \Delta y]$$

したがって、xy平面上で、電磁誘導の法則の微分形は、

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

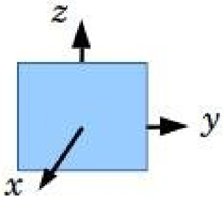
となる。

それぞれの平面に平行な小面積で、考察を繰り返して
得られる微分法則



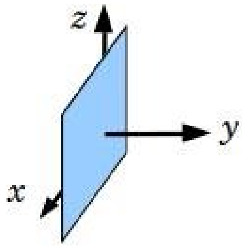
xy平面に平行

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial B_z}{\partial t}$$



yz平面に平行

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial B_x}{\partial t}$$



zx平面に平行

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)=-\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

磁場（磁束密度）ベクトルの時間による(偏)微分は

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\left(\frac{\partial B_x}{\partial t},\frac{\partial B_y}{\partial t},\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$ と書けるから

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x},\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

と、電磁誘導の法則の微分形を得る。さらに、これらもベクトル演算子で

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ または $$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ と

表現される。意味するのはどちらも同じだが、後者は二つのベクトル
$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ と $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ の外積が
$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_y b_z,a_z b_x-a_x b_z,a_x b_y-a_y b_x)$ と書けることから、

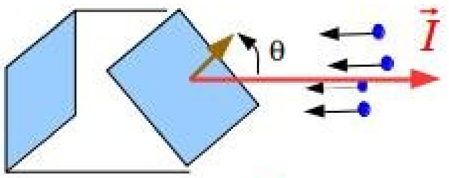
ナブラ $\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ と $\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$
の形式的外積と考えたもの。

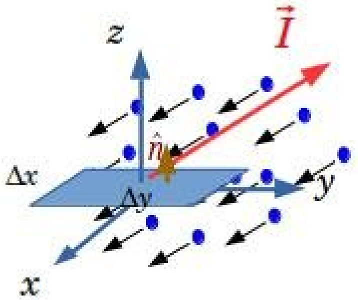
アンペール・マクスウェルの法則を

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \boxed{\sum_{[面積を通る]} I} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{E}\cdot \hat{n}\, dS$$

微分形へ

電流は、電荷の移動であることを思い出すと、電流にとっての面積は電荷の運動の方向と、垂直になっているときが最も広く見えており、面積が傾くと面積が狭く見える。面積の法線ベクトルと、電流ベクトルあるいは電荷の運動方向の成す角をθとして、面積が $\cos\theta$ 倍に狭くなる。





内積で $\cos\theta$ を作ることにして、電磁誘導の法則の微分化の時考えたの xy 平面に対して、

$$\sum_{[面積を通る]} I \ \rightarrow\ \vec{I}\cdot\hat{n}\cdot[\Delta x \Delta y]$$
$$= I_z \cdot [\Delta x \Delta y]$$

アンペール・マクスウェルの法則

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{E}\cdot \hat{n}\, dS$$

は、電流の項以外は電磁誘導の法則で出てきた表現なので、微分形は以下のようになる。

xy平面 $$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \mu_0 I_z + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

yz平面 $$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = \mu_0 I_x + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

zx平面 $$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \mu_0 I_y + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

ベクトルとしてまとめると、

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\mu_0(I_x, I_y, I_z)$$

$$+\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{\partial E_y}{\partial t}, \frac{\partial E_z}{\partial t}\right)$$

ベクトル演算子を導入して、

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

または

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

今日の問題。

マクスウェルの方程式の積分形に、対応する微分形を示しまとめよ。（ヒントとして積分形を示す）

マクスウエルの方程式の積分形

電場の面積分 $$\int_{[閉曲面上]}\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS=\sum_{[閉曲面内部]}Q/\varepsilon_0$$ （電場のガウスの法則）

線積分 $$\oint_{[面積の周囲]}\vec{E}\cdot d\vec{s}=-\frac{d}{dt}\int_{面積}\vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$ （電磁誘導の法則）

磁場の面積分 $$\int_{[閉曲面上]}\vec{B}\cdot\hat{n}\,dS=0$$ （磁場のガウスの法則）

線積分 $$\oint_{[面積の周囲]}\vec{B}\cdot d\vec{s}=\mu_0\sum_{[面積を通る]}I\ \boxed{+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{面積}\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$$

（アンペール・マクスウエルの法則）

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。