マクスウェルの方程式（群）は波動方程式を含む

電磁誘導の法則　$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$　を具体的に書き出して、

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x},\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial B_x}{\partial t},\frac{\partial B_y}{\partial t},\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

アンペール・マクスウェルの法則　$\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$　も同様に

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\mu_0\left(I_x,I_y,I_z\right)$$
$$+\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial t},\frac{\partial E_y}{\partial t},\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)$$

簡単のため、$\vec{B}=\left(0,B_y,0\right)$ 、$\vec{E}=\left(0,0,E_z\right)$ 、$\vec{I}=0$

を仮定すると

生き残るのは、

アンペールの法則

$$\frac{\partial B_y}{\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

両辺をtで偏微分

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t\,\partial x}}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

電磁誘導の法則

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

両辺をxで偏微分

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial x\,\partial t}}$$

$\boxed{\quad}$ で囲まれた部分は、「偏微分の順番が交換できる」と仮定とすると等しい。したがって、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

：波動方程式

が得られた。

$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ H/m=N/A^2

$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ F/m

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$ と置いて、 $$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$ を、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$ と、書き直す。

この偏微分の解は、2階微分可能でさえあれば、どんな関数 $f(x)$ でも、

$$E_z(x, t) = f\left(x \pm ct\right)$$

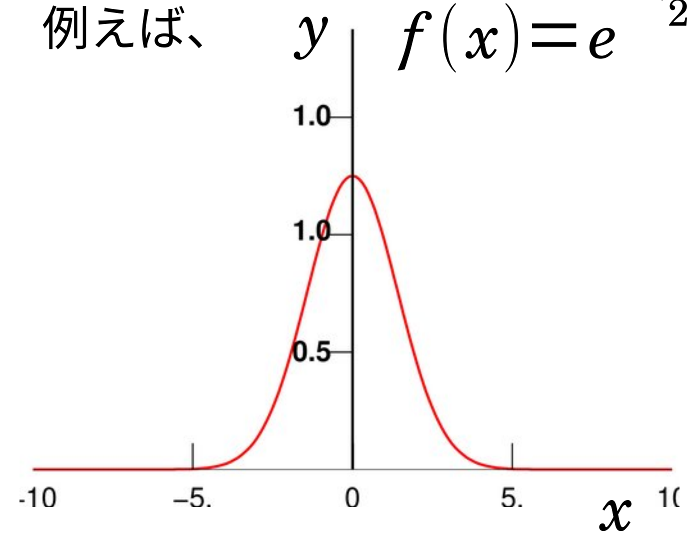
が、この偏微分方程式の解になる 。証明は簡単で、 f のx, t での２階偏微分は、

$$\frac{\partial^2 f(x \pm ct)}{\partial x^2} = f''(x \pm ct)$$

$$\frac{\partial^2 f(x \pm ct)}{\partial t^2} = c^2 f''(x \pm ct)$$

であることを見れば、明らかだろう。

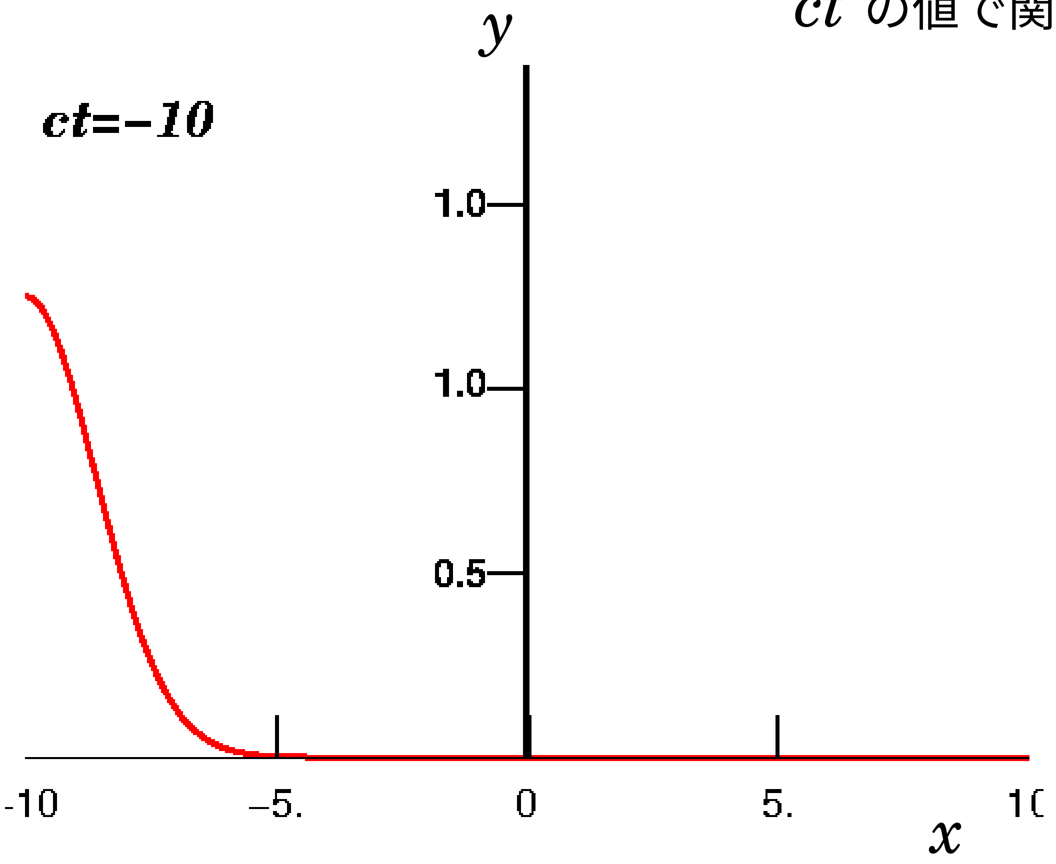
例えば、 $f(x) = e^{-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$



1，ctの前の符合が－の場合の例

$$y=f(x-ct)=e^{-\left(\frac{(x-ct)}{2}\right)^2}$$

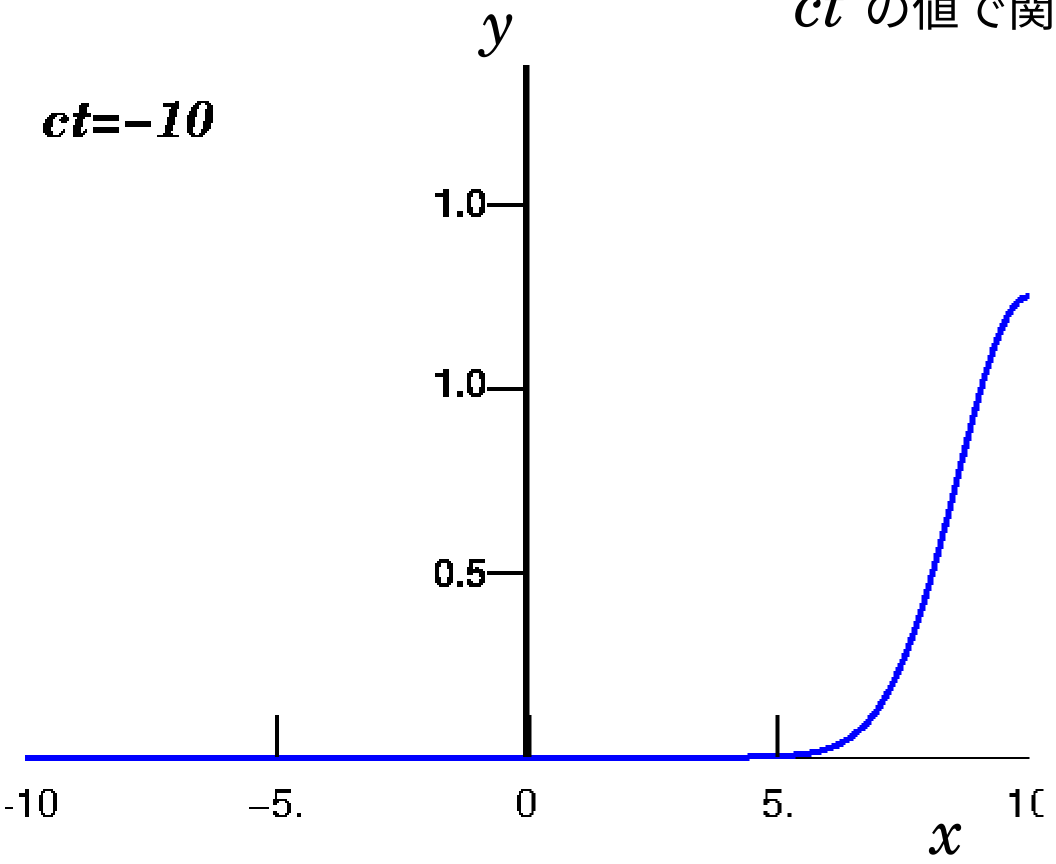
ct の値で関数がどう変わるか、



2，ctの前の符合が + の場合の例

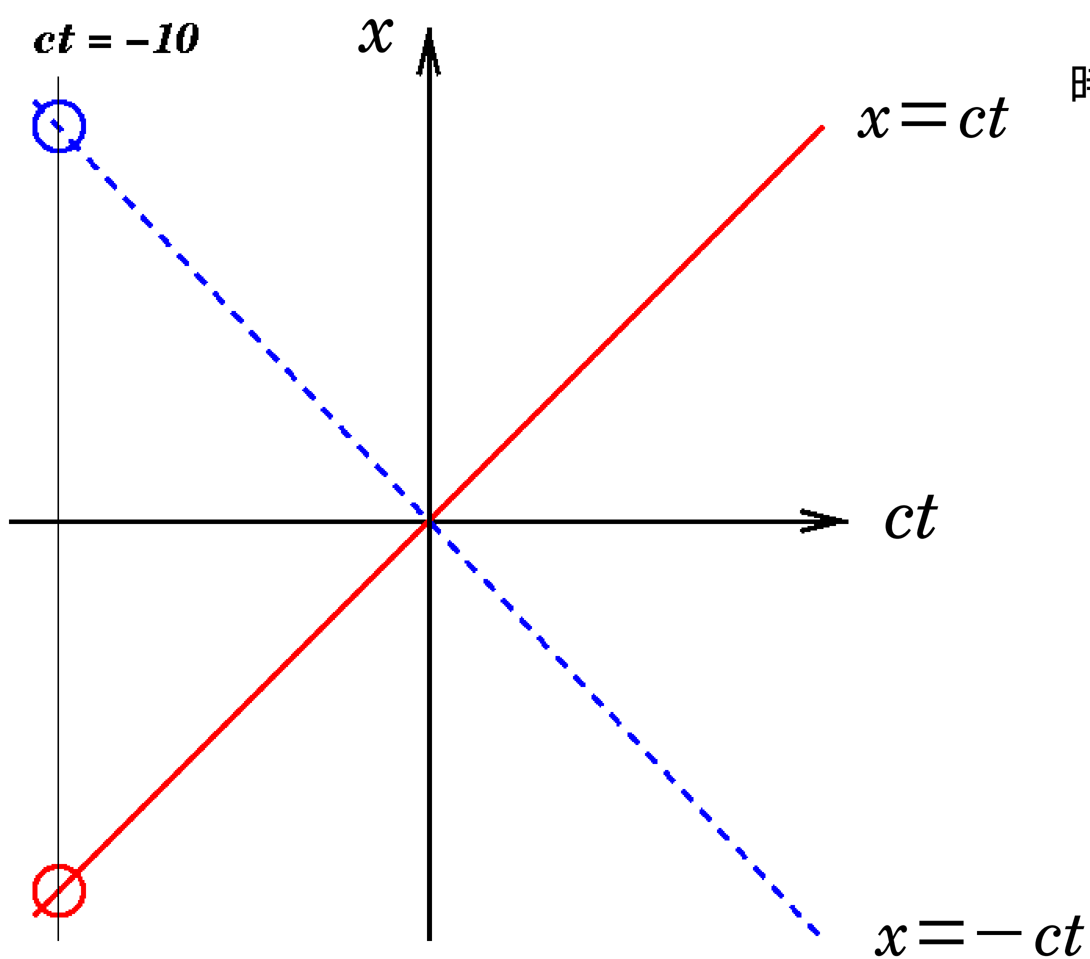
$$y=f\left(x+ct\right)=e^{-\left(\frac{\left(x+ct\right)}{2}\right)^{2}}$$

ct の値で関数がどう変わるか、



前の2つの例を、頂点の移動に注目してみると、

$f(x \pm ct) = e^{-\left(\frac{(x \pm ct)}{2}\right)^2}$ の頂点は、ctの前の符合により、$x = ct$ か、$x = -ct$



時間と共に、前へ進む
（xが大きくなる）

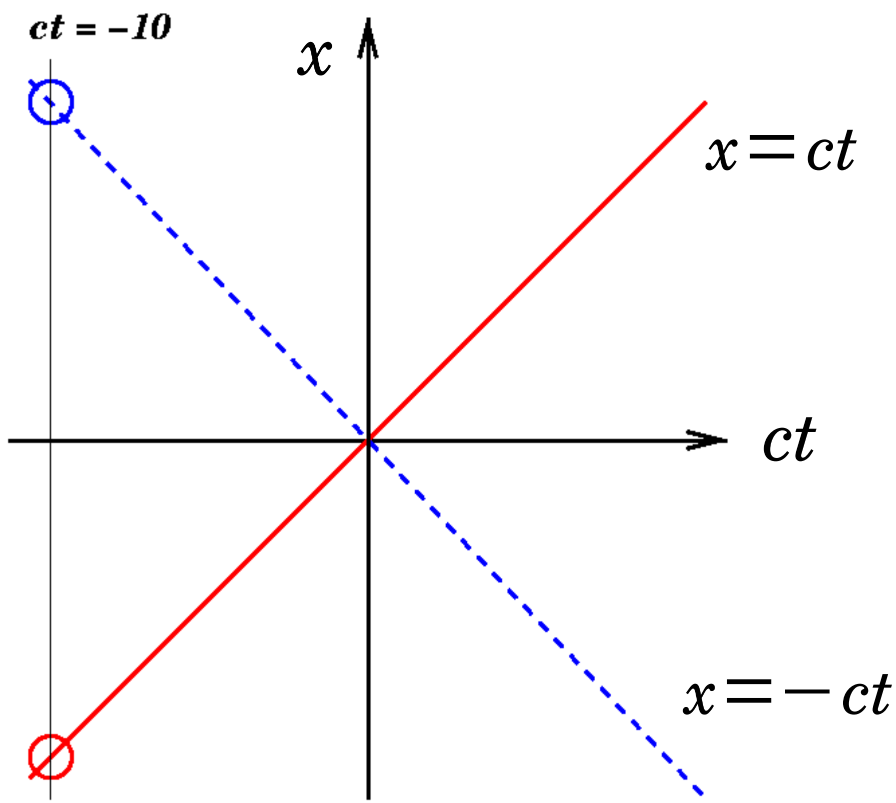
時間と共に、後退する
（xが小さくなる）

マクスウェルの方程式が含んでいる波動方程式のまとめ。

波動方程式は、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$ または、$c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ と置いて、$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

その解、 $$E_z(x,t)=f(x\pm ct)$$



には、進行する波形と、後退する波形がある。なお、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\equiv 299792458[\mathrm{m/sec}]$$

$$\approx 3.00\times 10^8[\mathrm{m/sec}]$$

は光の速度に等しい。

よく使う進行波の式

波長をλ、周期をT、振動数を fとして、振幅Aの進行波、

$$y = A\sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{\lambda}{T}t\right)\right)$$

$$= A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi ft\right) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \lambda f t\right)\right)$$

$$= A\sin\left(kx - \omega t\right) = A\sin\left(k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)\right)$$

この時、 $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ $\omega \equiv 2\pi f$ kを波数、ωを角振動数と呼ぶ。

なお、この波動の進行速度vは、 $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f = \frac{\omega}{k}$

注意、

$$y = A\sin\left(\omega t - kx\right) \quad y = A\cos\left(kx - \omega t\right)$$

なども同じく進行波。後退波を表すには、”ー”を”＋”に変える。

電磁場のポテンシャル <== 電位の概念の拡張

ここで使う公式 (自分で”簡単に”証明できるはず)

スカラー関数 ϕ に対して、 $\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}\,\phi\right)=0$ $\left(\nabla\times(\nabla\cdot\phi)=0\right)$

ベクトル関数 $\vec{A}$ に対して、 $\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)=0$ $\left(\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0\right)$

ポアンカレの補題 （上の公式の逆）

ベクトル関数 $\vec{B}$ が、$\mathrm{div}\,\vec{B}=0$ $\left(\nabla\cdot\vec{B}=0\right)$ を満たせば、
$\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}$ $\left(\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\right)$ となるベクトル関数 $\vec{A}$ が存在する。

ベクトル関数 $\vec{A}$ が、$\mathrm{rot}\,\vec{A}=0$ $\left(\nabla\times\vec{A}=0\right)$ を満たせば、
$\vec{A}=\mathrm{grad}\,\phi$ $\left(\vec{A}=\nabla\cdot\phi\right)$ となるスカラー関数 ϕが存在する。

マクスウェルの方程式

すぐ分かること

電磁誘導の法則

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \left(\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$ ==> $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ の時 $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \quad (\nabla \times \vec{E} = 0)$

だから、

$$\vec{E} = \mathrm{grad}\,\phi \quad (\vec{E} = -\nabla\phi)$$

となる、スカラー関数 ϕ がある。
(- 符号は電位と定義を一致させるため)

磁場のガウスの法則

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad (\nabla \vec{B} = 0)$ ==> $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \quad (\vec{B} = \nabla \times \vec{A})$

となるベクトル関数 $\vec{A}$ がある。

磁場を $\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}$ $(\vec{B}=\nabla\times\vec{A})$ と表す事のできる**ベクトル場、**$\vec{A}$ **があったとして、**

誘導起電力の式に代入して

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial(\mathrm{rot}\,\vec{A})}{\partial t}=-\mathrm{rot}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\quad\left(\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial(\nabla\times\vec{A})}{\partial t}=-\nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

微分の順番の交換

磁場の誘導起電力による電場が $\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ のように書けるのがわかる。
電荷からつくられる電場と合わせて、

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\quad\left(\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right)$$

$$\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}\qquad(\vec{B}=\nabla\times\vec{A})$$

$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=0$ の時、

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi\quad(\vec{E}=-\nabla\phi)$$

この時 $(\vec{A},\phi)$ は、クーロンゲージによる、電磁場のポテンシャルと呼ばれる。