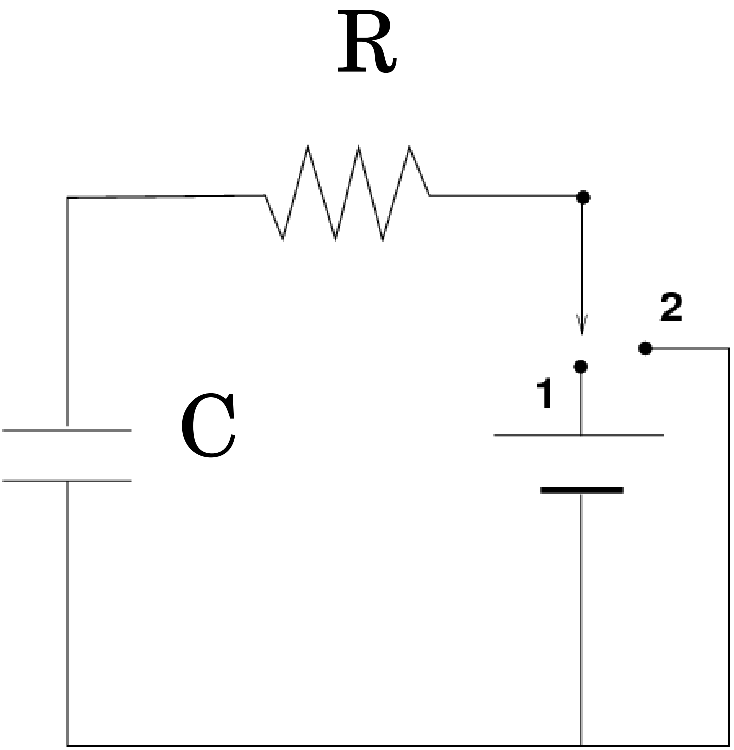
コンデンサーを含む回路。(RC 回路)

$$I=\frac{dQ}{dt}$$ に注意



1、スイッチ1では、次の微分方程式が成り立つ。

$$RI+\frac{Q}{C}=E \qquad \text{または、} \qquad R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E$$

このまま、電荷の移動が無くなるまで放置する。

最終的にコンデンサーに蓄えられる電荷Q_0を求めよ。

2、スイッチ2では、次の微分方程式が成り立つ。

$$RI+\frac{Q}{C}=0 \qquad \text{または、} \qquad R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

時刻 t=0 で、スイッチを1から、2に切り替えたとして、

コンデンサーに蓄えられた電荷Qの時間変化は？

スイッチ2の状態で、微分方程式を解く

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

移項して整理

$$\frac{dQ}{dt}=-\frac{1}{RC}Q$$

(変数分離型の微分方程式)

両辺をQで割る

$$\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt}=-\frac{1}{RC}$$

両辺を0からtまでtで定積分

$$\int_0^t \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt}dt=\int_0^t\left(-\frac{1}{RC}\right)dt$$

(定積分で、初期値が自動的に入る。)

左辺の積分 $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dt}dt=\int_{Q(0)}^{Q(t)}\frac{dt}{Q}=\log(Q(t))-\log(Q(0))=\log\left(\frac{Q(t)}{Q(0)}\right)$

右辺の積分 $\displaystyle\int_0^t\left(-\frac{1}{RC}\right)dt=-\frac{1}{RC}t$

$$\log\left(\frac{Q(t)}{Q(0)}\right)=-\left(\frac{1}{RC}\right)t$$

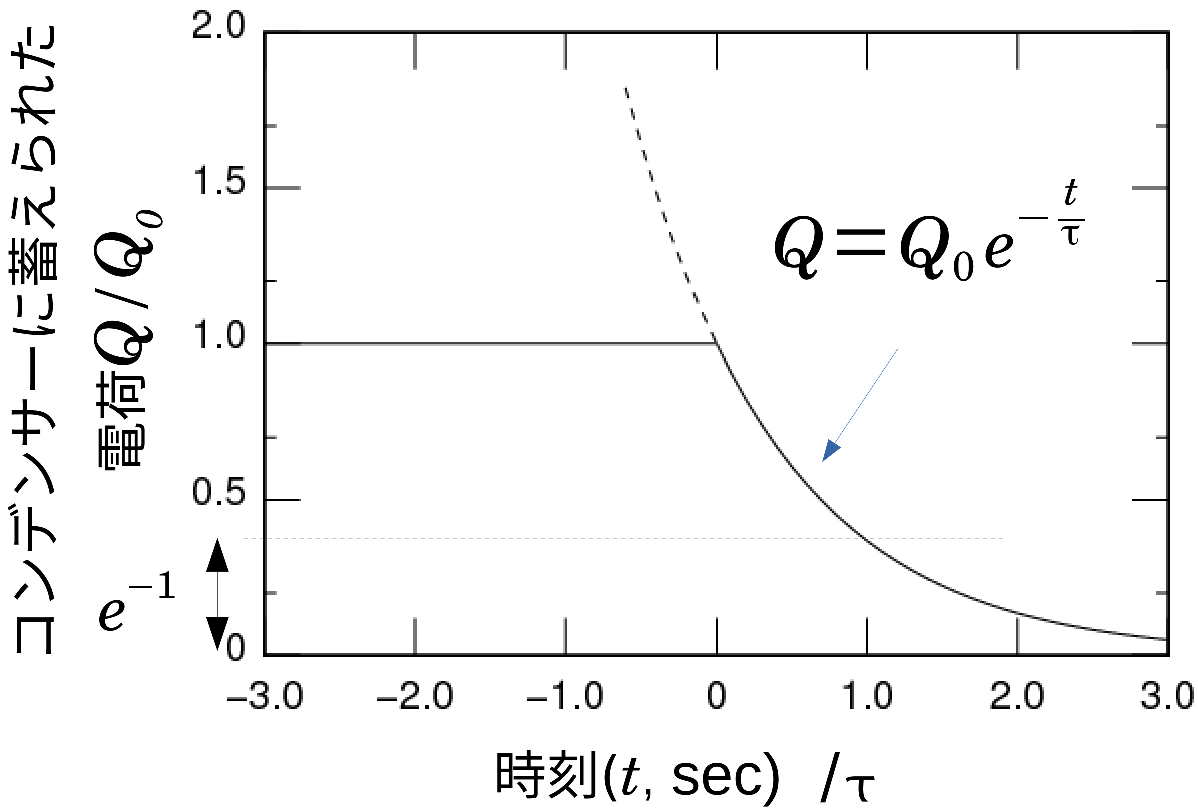
両辺を e^x の x に代入

$$\frac{Q(t)}{Q(0)}=e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}$$

最終的に $\displaystyle Q(t)=Q(0)e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}$ を得る

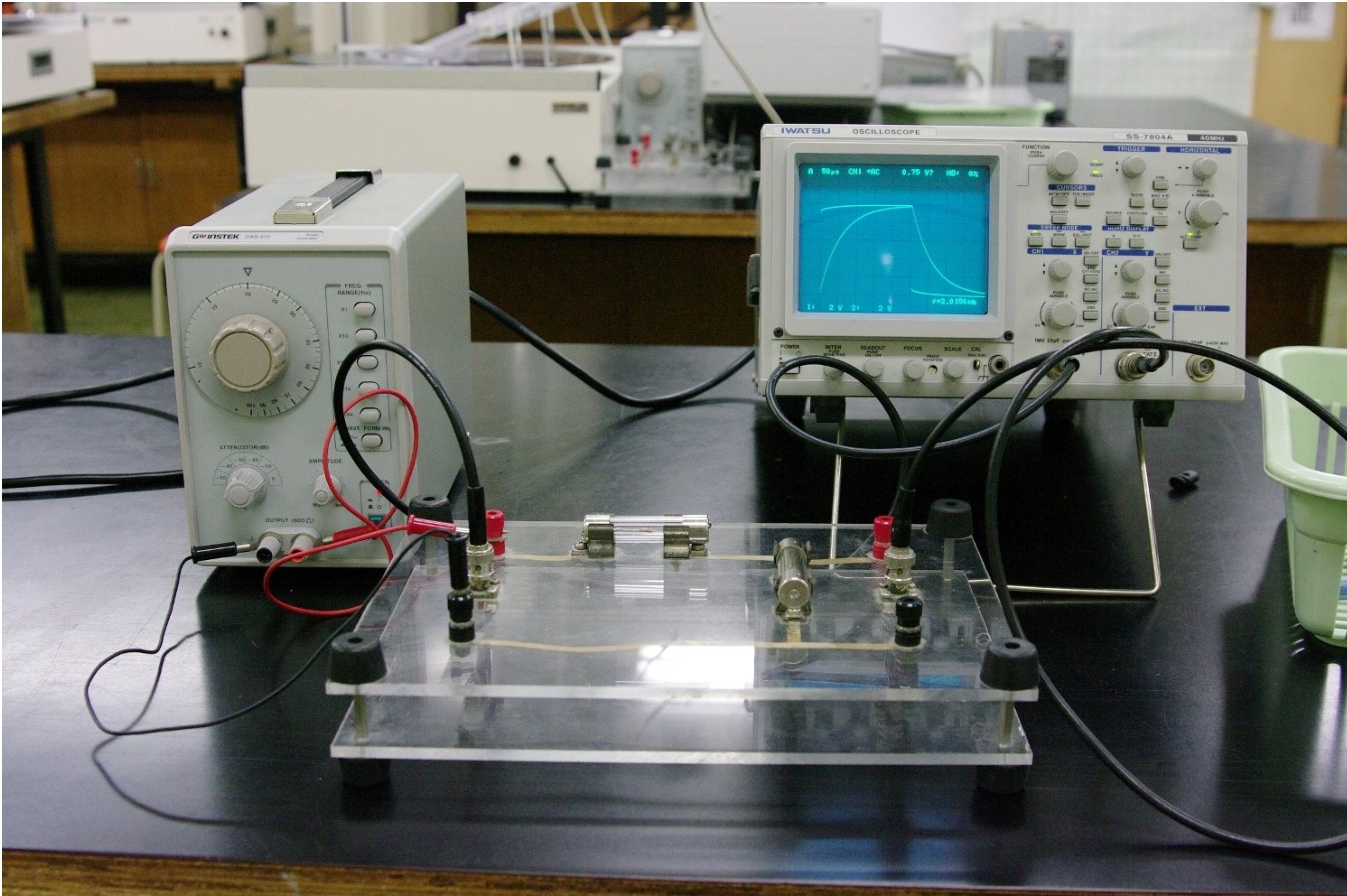
Qを時間 t の関数で表す。

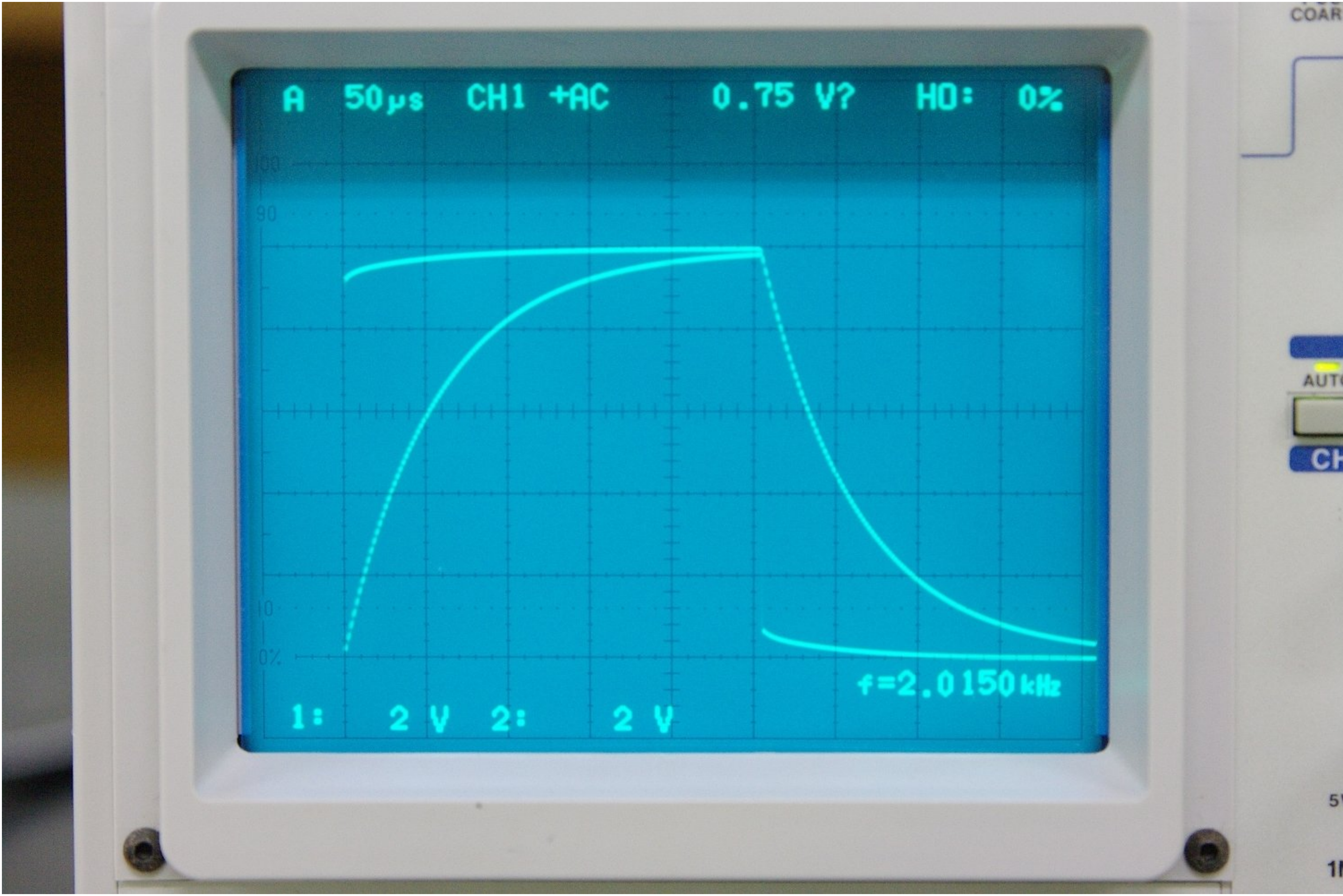
$$Q(t) = Q_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \quad \text{ただし、} \quad Q_0 = Q(0)$$



$$\tau \equiv \frac{1}{RC} \quad : RC\text{回路の時定数}$$

時刻 t=0 で、スイッチ1から、
スイッチ2に、切り替わった。


GW INSTEK
IWATSU
OSCILLOSCOPE
SS-7804A
40MHz
TRIGGER
HORIZONTAL
FUNCTION
CURSORS
ATTENUATOR(dB)
OUTPUT (600 Ω)


A 50µs CH1 +AC 0.75 V? HO: 0%
f=2.0150kHz
1: 2 V 2: 2 V

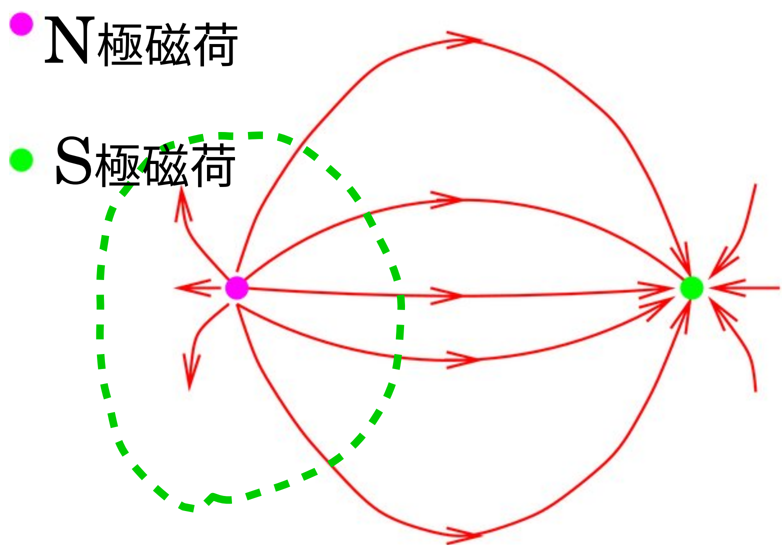
積分法則のまとめ

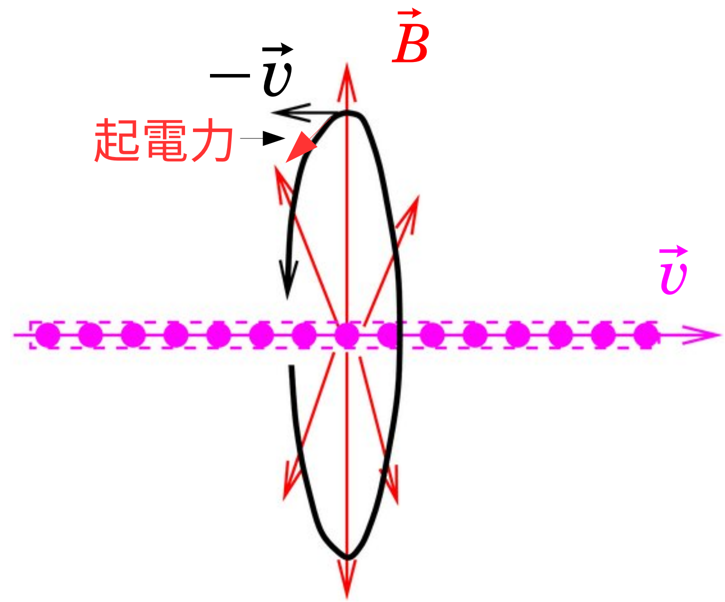
面積分	$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$	ガウスの法則
線積分	$\oint_{[面積の周囲]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$	電磁誘導の法則
面積分	$\int_{[閉曲面上]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$	磁場のガウスの法則
線積分	$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I$	アンペールの法則

そろっている　　　　バラバラ?

もし、磁荷（単磁極）が有ったら、

N極から出発して、S極で終る磁力線





$$\int_{[閉曲面上]} \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q_m$$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -I_m$$

ここでは、I_m はN極磁荷の流れ

Q_m = N極磁荷−S極磁荷

(S極磁荷の逆向きの流れもありうる)

電場と磁場の対称性を良くする試み

Q_m : 磁荷(単磁極、モノポール)と

I_m : 磁流[磁荷(単磁極)の流れ]を仮定すると

面積分
$$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$$
ガウスの法則

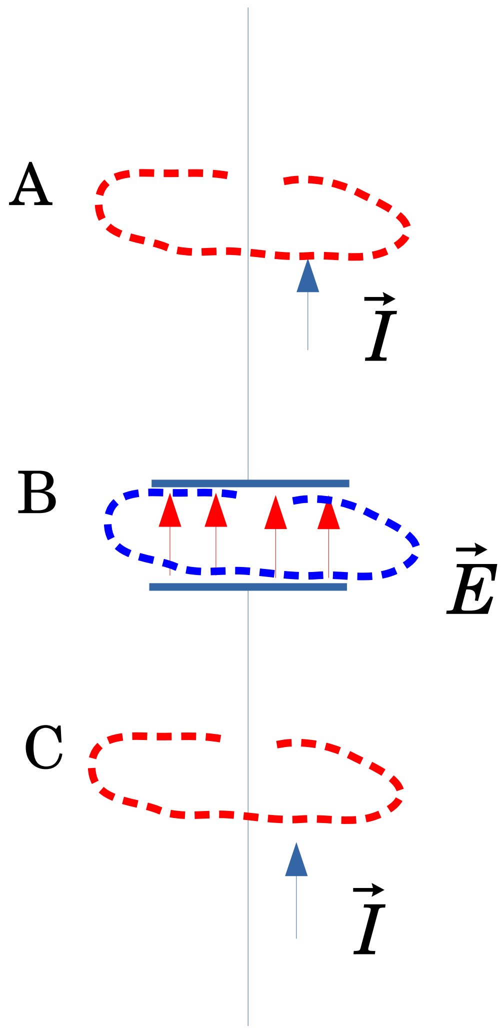
線積分
$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \boxed{-\sum_{[面積を通る]} I_m} \boxed{-\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS}$$
電磁誘導の法則

面積分
$$\int_{[閉曲面上]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = \boxed{\sum_{[閉曲面内部]} Q_m}$$
磁場のガウスの法則

ここは、まだ、対照的でない。

線積分
$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I$$
アンペールの法則

変位電流(マクスウエルの考察)



電流の途中にコンデンサーを置くとき、
A、Cでのアンペールの法則は

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad \text{...(1)}$$

と与えられるのに、

左辺の線積分の位置をAからCまで動かす時、
実際の電流が流れないBで、左辺の値が突然0に
なるのは不自然。

しかし、コンデンサーの中には電場があり、流れ込む
電流は

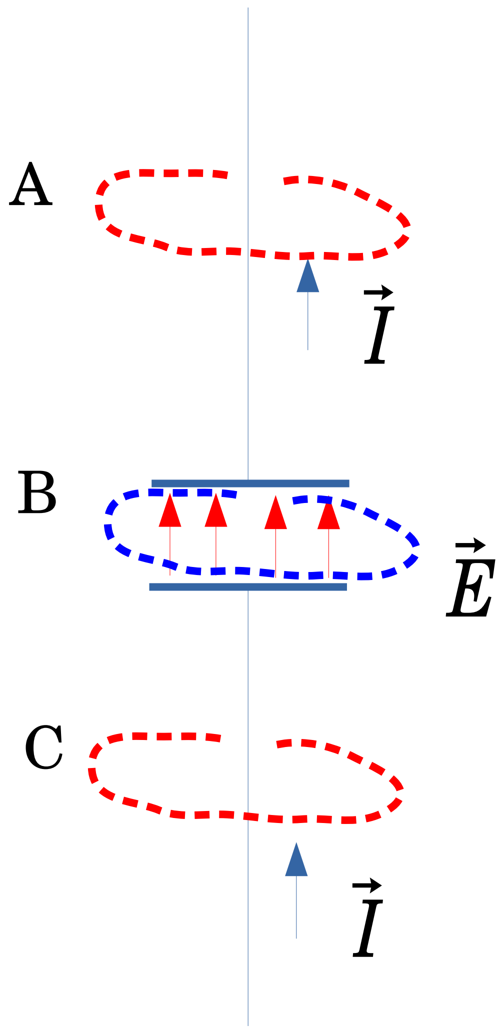
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0 E S\right)$$

と書けるので、コンデンサーでは電流に代わり、

$$\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(E S\right)$$

が、電流の働きをするのでは無いか、ｂｙマクスウエル。

変位電流(マクスウエルの考察) II



コンデンサーのところでは、

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0\left[\varepsilon_0 \frac{d}{dt}(E\,S)\right] \quad \ldots(2)$$

が成り立つことになるが、この(ES)と言う積は、一般的には

$$\int \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds$$

と言う面積分である。従って、A、B、C、全ての点で成り立つのは、（1）と合わせて、

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS$$

ということになる。

対称性をよくした、積分方程式たち

電場の面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q/\varepsilon_0$$

（電場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\sum_{[\text{面積の中を通る}]} I_m - \frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

（電磁誘導の法則）

磁場の面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q_m$$

（磁場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積の中を通る}]} I + \varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS$$

（アンペール・マクスウエルの法則）

電場の面積分に関係

電荷に関係する

電流に関係する

磁場の面積分に関係

単磁極と、磁流はまだ見つかっていない。

マクスウエルの方程式の積分形

電場の面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q/\varepsilon_0$$

（電場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

（電磁誘導の法則）

磁場の面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$$

（磁場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I \quad \boxed{+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$$

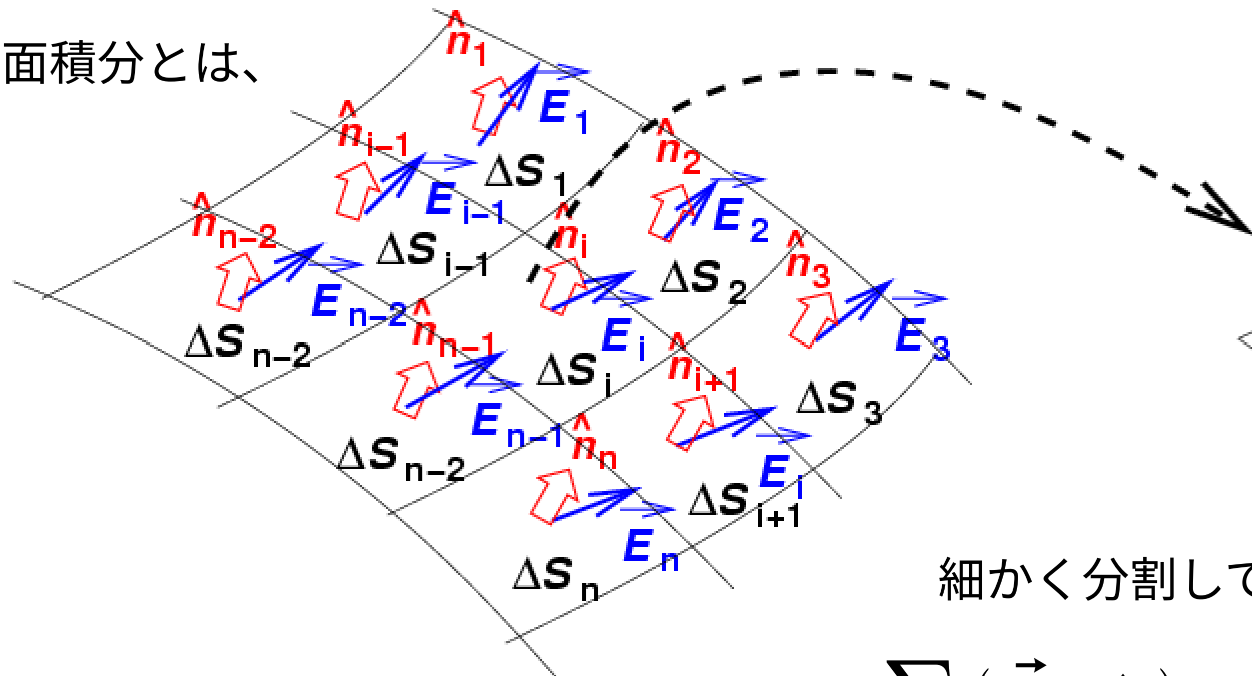
（アンペール・マクスウエルの法則）

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。

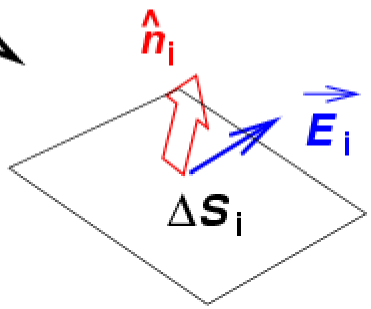
ガウスの法則 $\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$

を微分形に書き変える。

面積分とは、



$$N_i = \varepsilon_0 (\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i) \Delta S_i$$

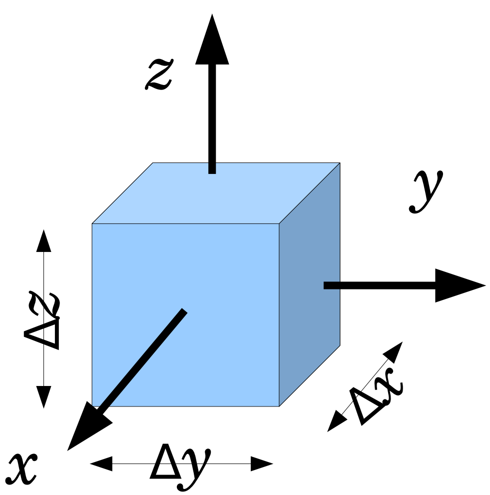


細かく分割して全体の和=>積分

$$\sum_i (\vec{E}_i\cdot\hat{n}_i)\Delta S_i \quad \rightarrow \quad \int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})dS$$

ΔS_iを小さくとって、この逆をやる。

$$\int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})dS \quad \rightarrow \quad \sum_i (\vec{E}_i\cdot\hat{n}_i)\Delta S_i$$

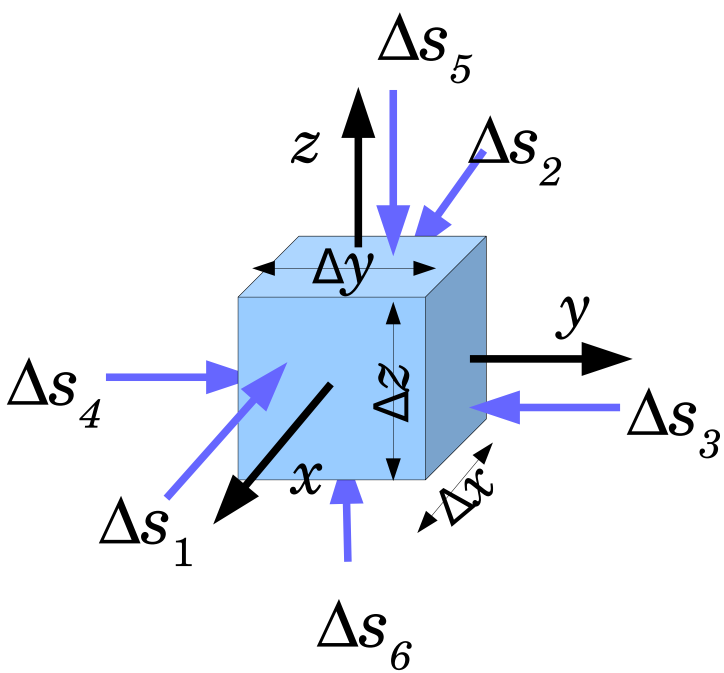


座標(x,y,z)を中心に持ち、yz平面、zx平面、xy平面に平行な６面で構成された直方体の表面で面積分を面毎に分解して、計算する。つまり、

$$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$$

の左辺を、

$$\int_{[直方体の表面]} (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dS \rightarrow \sum_{[直方体の表面]} (\vec{E}_i\cdot\hat{n}_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{6} (\vec{E}_i\hat{n}_i)\Delta S_i$$



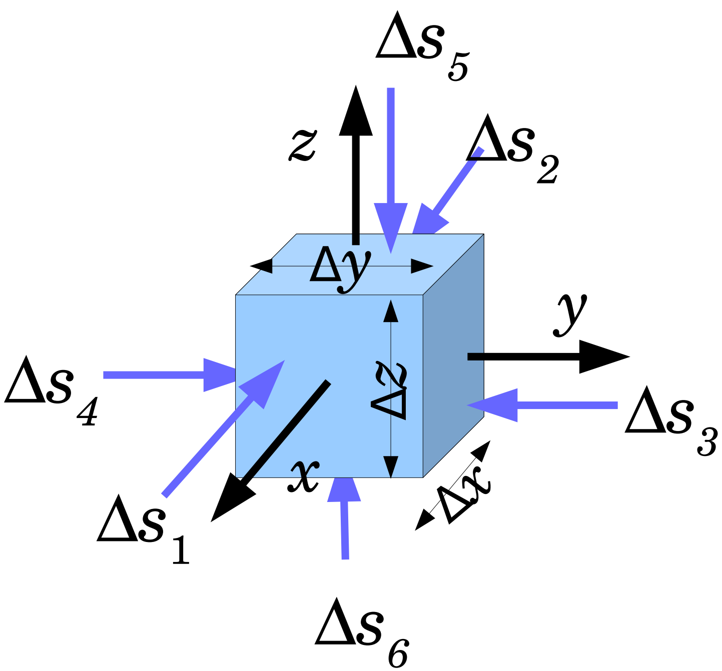
分割された面積の代表点は、それぞれの真ん中にとる。

また、数学的には、電場ベクトル $\vec{E}$ は、(x,y,z) それぞれの成分が空間の関数として、

$$\left(E_x(x,y,z), E_y(x,y,z), E_z(x,y,z)\right)$$

のように書けるベクトル関数であり、それぞれの座標を変数として、偏微分が可能であることを仮定する。

直方体の表面での和、 $\sum_{i=1}^{6}\left(\vec{E}_i\hat{n}_i\right)\Delta S_i$ の中のそれぞれの面の上での考察



真ん中の点を（x,y,z）として、

ΔS_1の代表点$(x+\Delta x/2,y,z)$、 $\hat{n}_1=\hat{i}$

$$\rightarrow\ \vec{E}_1\hat{n}_1=E_x(x+\Delta x/2,y,z)$$

ΔS_2の代表点$(x-\Delta x/2,y,z)$、 $\hat{n}_2=-\hat{i}$

$$\rightarrow\ \vec{E}_2\hat{n}_2=-E_x(x-\Delta x/2,y,z)$$

ΔS_3の代表点$(x,y+\Delta y/2,z)$、 $\hat{n}_3=\hat{j}$

$$\rightarrow\ \vec{E}_3\hat{n}_3=E_y(x,y+\Delta y/2,z)$$

ΔS_4の代表点$(x,y-\Delta y/2,z)$、 $\hat{n}_4=-\hat{j}$

$$\rightarrow\ \vec{E}_4\hat{n}_4=-E_y(x,y-\Delta y/2,z)$$

ΔS_5の代表点$(x,y,z+\Delta z/2)$、 $\hat{n}_5=\hat{k}$

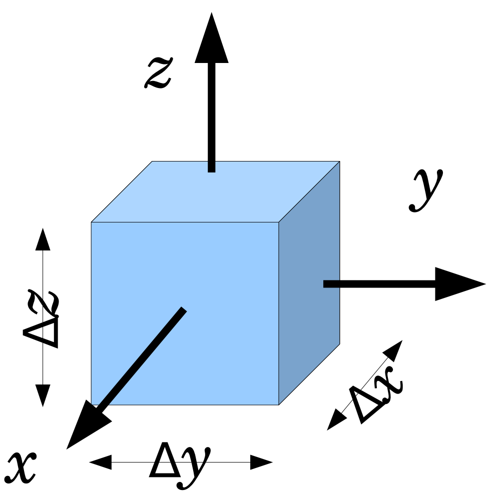
$$\rightarrow\ \vec{E}_5\hat{n}_5=E_z(x,y,z+\Delta z/2)$$

ΔS_6の代表点$(x,y,z-\Delta z/2)$、 $\hat{n}_6=-\hat{k}$

$$\rightarrow\ \vec{E}_6\hat{n}_6=-E_z(x,y,z-\Delta z/2)$$

さらに、ΔS_1, ΔS_2の面積は$[\Delta y \Delta z]$, ΔS_3, ΔS_4の面積は$[\Delta z \Delta x]$, ΔS_5, ΔS_6の面積は $[\Delta x \Delta y]$なので、同じ面積をまとめて計算、

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} (\vec{E}_i \hat{n}_i) \Delta S_i =& [\Delta y \Delta z] \left(E_x(x+\Delta x/2, y, z) - E_x(x-\Delta x/2, y, z) \right) \\
&+ [\Delta z \Delta x] \left(E_y(x, y+\Delta y/2, z) - E_y(x, y-\Delta y/2, z) \right) \\
&+ [\Delta x \Delta y] \left(E_z(x, y, z+\Delta z/2) - E_z(x, y, z-\Delta z/2) \right)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
&= [\Delta x \Delta y \Delta z] \frac{E_x(x+\Delta x/2, y, z) - E_x(x-\Delta x/2, y, z)}{\Delta x} \\
&+ [\Delta x \Delta y \Delta z] \frac{E_y(x, y+\Delta y/2, z) - E_y(x, y-\Delta y/2, z)}{\Delta y} \\
&+ [\Delta x \Delta y \Delta z] \frac{E_z(x, y, z+\Delta z/2) - E_z(x, y, z-\Delta z/2)}{\Delta z}
\end{aligned}
$$

$$\vec{E}(x,y,z)=\left(E_x(x,y,z),E_y(x,y,z),E_z(x,y,z)\right)$$

と書いた時、電場ベクトルの各成分が、それぞれ偏微分可能であれば、

$$\frac{E_x(x+\Delta x/2,y,z)-E_x(x-\Delta x/2,y,z)}{\Delta x}\rightarrow\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x}\quad(\Delta x\rightarrow 0)$$

$$\frac{E_y(x,y+\Delta y/2,z)-E_y(x,y-\Delta y/2,z)}{\Delta y}\rightarrow\frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y}\quad(\Delta y\rightarrow 0)$$

$$\frac{E_z(x,y,z+\Delta z/2)-E_z(x,y,z-\Delta z/2)}{\Delta z}\rightarrow\frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z}\quad(\Delta z\rightarrow 0)$$

従って、 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ が非常に小さいとき

$$\sum_{i=1}^{6}(\vec{E}_i\hat{n}_i)\Delta S_i\simeq[\Delta x\Delta y\Delta z]\cdot\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

したがって、電場に対するガウスの法則、

$$\int_{[\text{直方体表面}]} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \sum_{[\text{直方体内部}]} Q/\varepsilon_0$$

は、

$$[\Delta x \Delta y \Delta z]\cdot\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \simeq \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q/\varepsilon_0$$

と微分式で書けたことになる。（$\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0$ の極限では等式になる。）

さらに$[\Delta x \Delta y \Delta z]$ は、この直方体の体積だから、

$$\rho_c \equiv \frac{\sum_{[\text{直方体内部}]} Q}{[\Delta x \Delta y \Delta z]}$$ と電荷密度を定義すると、

電場のガウスの法則の微分形として、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

とが得られた。

この関係はベクトル演算子

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \quad \text{または} \quad \nabla\vec{E}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

を用いて、簡単に書ける。

いずれも左辺は

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

を、まとめた書き方。特に後者は二つのベクトル $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ と $\vec{b}=(b_x, b_y, b_z)$ の内積が $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$ である事から、上の結果を

$$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{と} \quad \vec{E}=(E_x, E_y, E_z)$$

の形式的内積と見なしたもので、∇ はナブラと呼ばれる。ただし、掛ける順番を反対にすると

$$\vec{E}\nabla=E_x\frac{\partial}{\partial x}+E_y\frac{\partial}{\partial y}+E_z\frac{\partial}{\partial z}$$

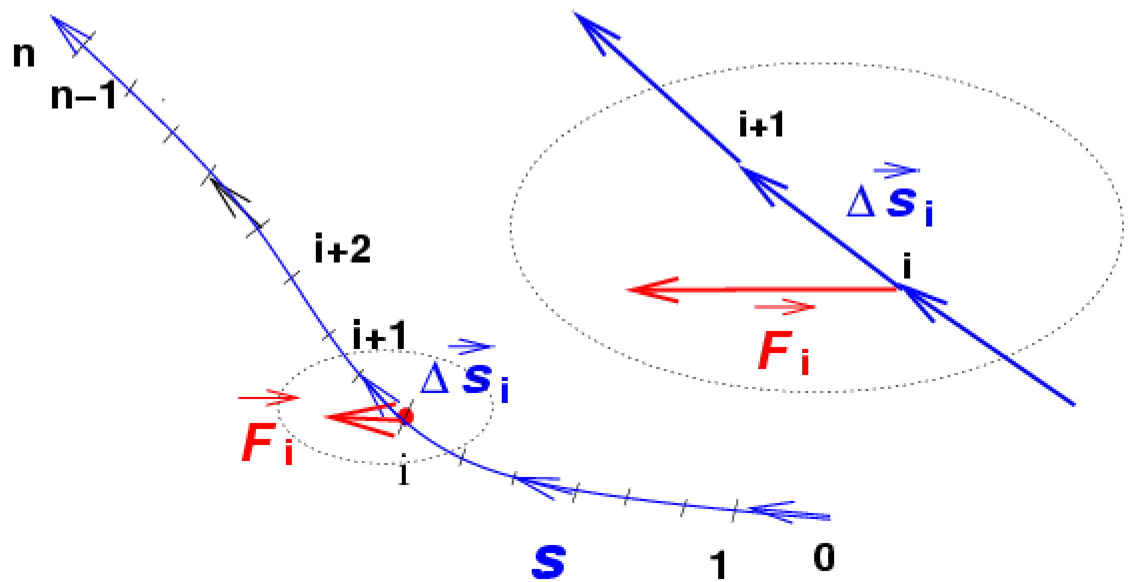
と、全く別の微分演算子になるので、内積とは別のものである。

電磁誘導の法則

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$ を微分形に書き変える。

以前、線積分は電位差を求めるために用いた。

$$V_{1,n} = -\sum_i \vec{E}_i\cdot\Delta\vec{s}_i \simeq -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$



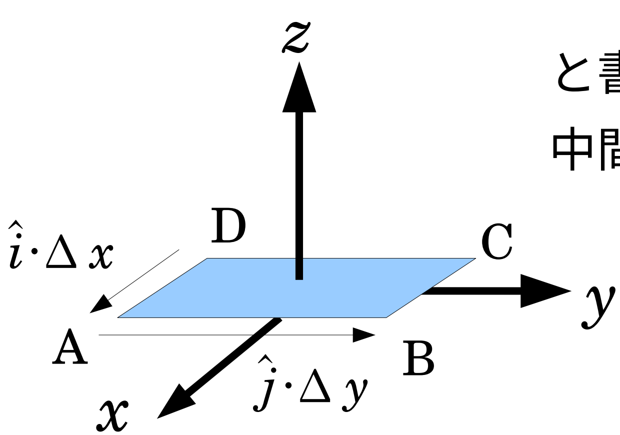
電磁誘導の法則で用いるのも全く同じ線積分であるが、閉曲線に対して
線積分を行う。電位が定義出来る場合には、０になるべきものである。

x軸、y軸に平行な辺を持つ長方形ABCDをとり、各頂点それぞれの座標を $A(x+\Delta x/2, y-\Delta y/2, z)$, $B(x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z)$, $C(x-\Delta x/2, y+\Delta y/2, z)$, $D(x-\Delta x/2, y-\Delta y/2, z)$として、その囲む面積と辺で構成する閉曲線で、電磁誘導の法則を考える。電磁誘導の法則は、

$$\oint_{[ABCD]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\square ABCD} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

一周積分を各辺に分解して、

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_C^D \vec{E}\cdot d\vec{s} + \int_D^A \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\square ABCD} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$



と書けるが、Δx, Δyが非常に小さい時、辺AB、BC上の積分を、中間点を代表点として計算する。

$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = \vec{E}(x+\Delta x/2, y, z)\cdot\hat{j}\cdot\Delta y = E_y(x+\Delta x/2, y, z)\cdot\Delta y$$

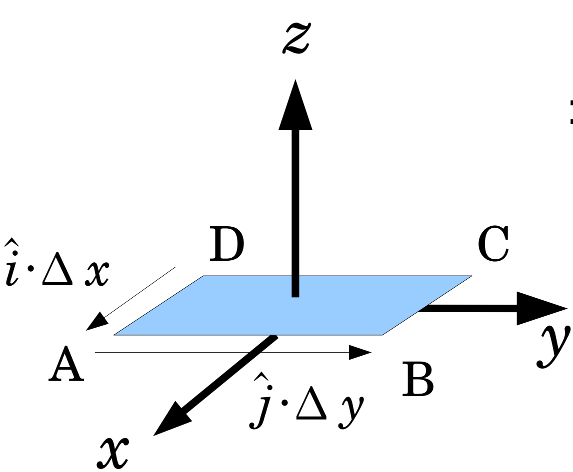
$$\int_B^C \vec{E}\cdot d\vec{s} = \vec{E}_x(x, y+\Delta y/2, z)\cdot(-\hat{i})\cdot\Delta x = -E_x(x, y+\Delta y/2, z)\cdot\Delta x$$

同じ条件で、DC、AD上の積分は、

$$\int_C^D \vec{E}\cdot d\vec{s} = \vec{E}(x-\Delta x/2, y, z)\cdot(-\hat{j})\cdot\Delta y$$
$$= -E_y(x-\Delta x/2, y, z)\cdot\Delta y$$
$$\int_D^A \vec{E}\cdot d\vec{s} = \vec{E}(x, y-\Delta y/2, z)\cdot\hat{i}\cdot\Delta x$$
$$= E_x(x, y-\Delta y/2, z)\cdot\Delta x$$

同じ電場ベクトル成分に注目して、４辺を合計

$$\oint_{[ABCD]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \left[E_y(x+\Delta x/2, y, z) - E_y(x-\Delta x/2, y, z)\right]\cdot\Delta y$$
$$+\left[-E_x(x, y+\Delta y/2, z) + E_x(x, y-\Delta y/2, z)\right]\cdot\Delta x$$

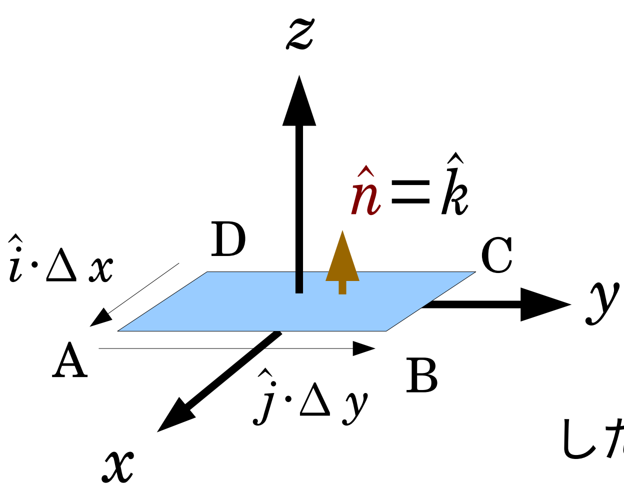


$$= [\Delta x \Delta y]\frac{E_y(x+\Delta x/2, y, z) - E_y(x-\Delta x/2, y, z)}{\Delta x}$$
$$- [\Delta x \Delta y]\frac{E_x(x, y+\Delta y/2, z) - E_x(x, y-\Delta y/2, z)}{\Delta y}$$
$$= [\Delta x \Delta y]\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$\Delta x, \Delta y$が非常に小さいとき電磁誘導の法則の右辺は、

$$-\frac{d}{dt}\int_{\square ABCD} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = -\boxed{\frac{d}{dt}}\left(\vec{B}(x,y,z,t)\cdot\hat{k}\cdot S_{ABCD}\right)$$

代表点で考えると座標の関数でもあるので、



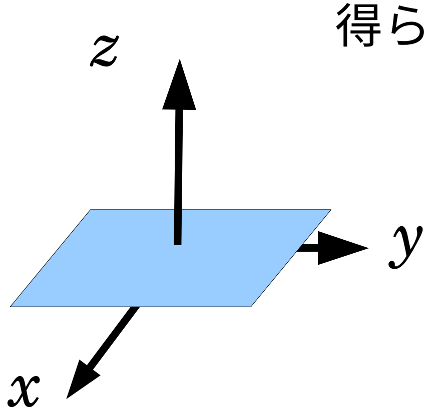
$$= -\frac{\partial B_z(x,y,z)}{\partial t}[\Delta x \Delta y]$$

したがって、xy平面上で、電磁誘導の法則の微分形は、

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

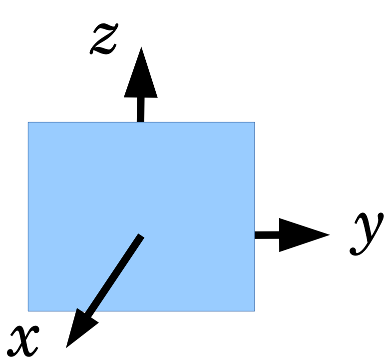
となる。

それぞれの平面に平行な小面積で、考察を繰り返して
得られる微分法則



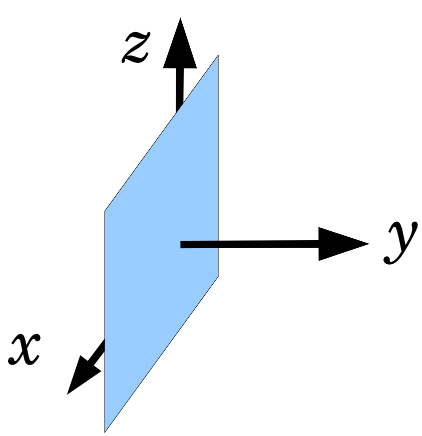
xy平面に平行

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial B_z}{\partial t}$$



yz平面に平行

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial B_x}{\partial t}$$



zx平面に平行

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)=-\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

磁場（磁束密度）ベクトルの時間による(偏)微分は

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\left(\frac{\partial B_x}{\partial t},\frac{\partial B_y}{\partial t},\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

と書けるから

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x},\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

と、電磁誘導の法則の微分形を得る。さらに、これらもベクトル演算子で

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ または $$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ と

表現される。意味するのはどちらも同じだが、後者は二つのベクトル

$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ と $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ の外積が

$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_y b_z,a_z b_x-a_x b_z,a_x b_y-a_y b_x)$ と書けることから、

ナブラ $\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ と $\vec{E}=(E_x,E_y,E_z)$

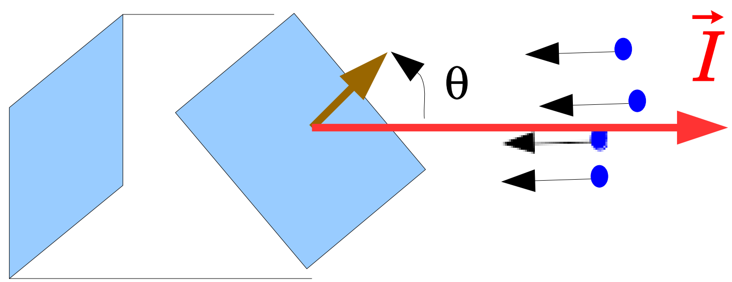
の形式的外積と考えたもの。

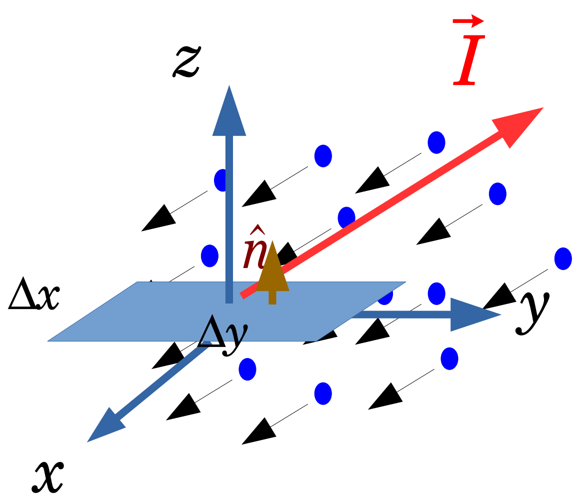
アンペール・マクスウェルの法則を

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \boxed{\sum_{[面積を通る]} I} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS$$

微分形へ

電流は、電荷の移動であることを思い出すと、電流にとっての面積は電荷の運動の方向と、垂直になっているときが最も広く見えており、面積が傾くと面積が狭く見える。面積の法線ベクトルと、電流ベクトルあるいは電荷の運動方向の成す角を θ として、面積が $cos\theta$ 倍に狭くなる。





内積で $cos\theta$ を作ることにして、電磁誘導の法則の微分化の時考えたの xy 平面に対して、

$$\sum_{[面積を通る]} I \rightarrow \vec{I}\cdot\hat{n}\cdot[\Delta x \Delta y]$$

$$= I_z \cdot [\Delta x \Delta y]$$

アンペール・マクスウェルの法則

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I \quad + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS$$

は、電流の項以外は電磁誘導の法則で出てきた表現なので、微分形は以下のようになる。

xy平面

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \mu_0 I_z + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

yz平面

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = \mu_0 I_x + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

zx平面

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \mu_0 I_y + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

ベクトルとしてまとめると、

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\mu_0\left(I_x, I_y, I_z\right)$$
$$+\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{\partial E_y}{\partial t}, \frac{\partial E_z}{\partial t}\right)$$

ベクトル演算子を導入して、

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

または

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

マクスウエルの方程式(群）、通常はこの微分形を意味する

電場のガウスの法則

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$ または $$\nabla\vec{E}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

電磁誘導の法則

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$ $$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

磁場のガウスの法則

$$\mathrm{div}\,\vec{B}=0$$ $$\nabla\vec{B}=0$$

アンペール・マクスウエルの法則

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$ $$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

今日の問題、

マクスウエルの方程式(群、微分形）、対応する積分方程式(群)
その名称を整理して示せ。