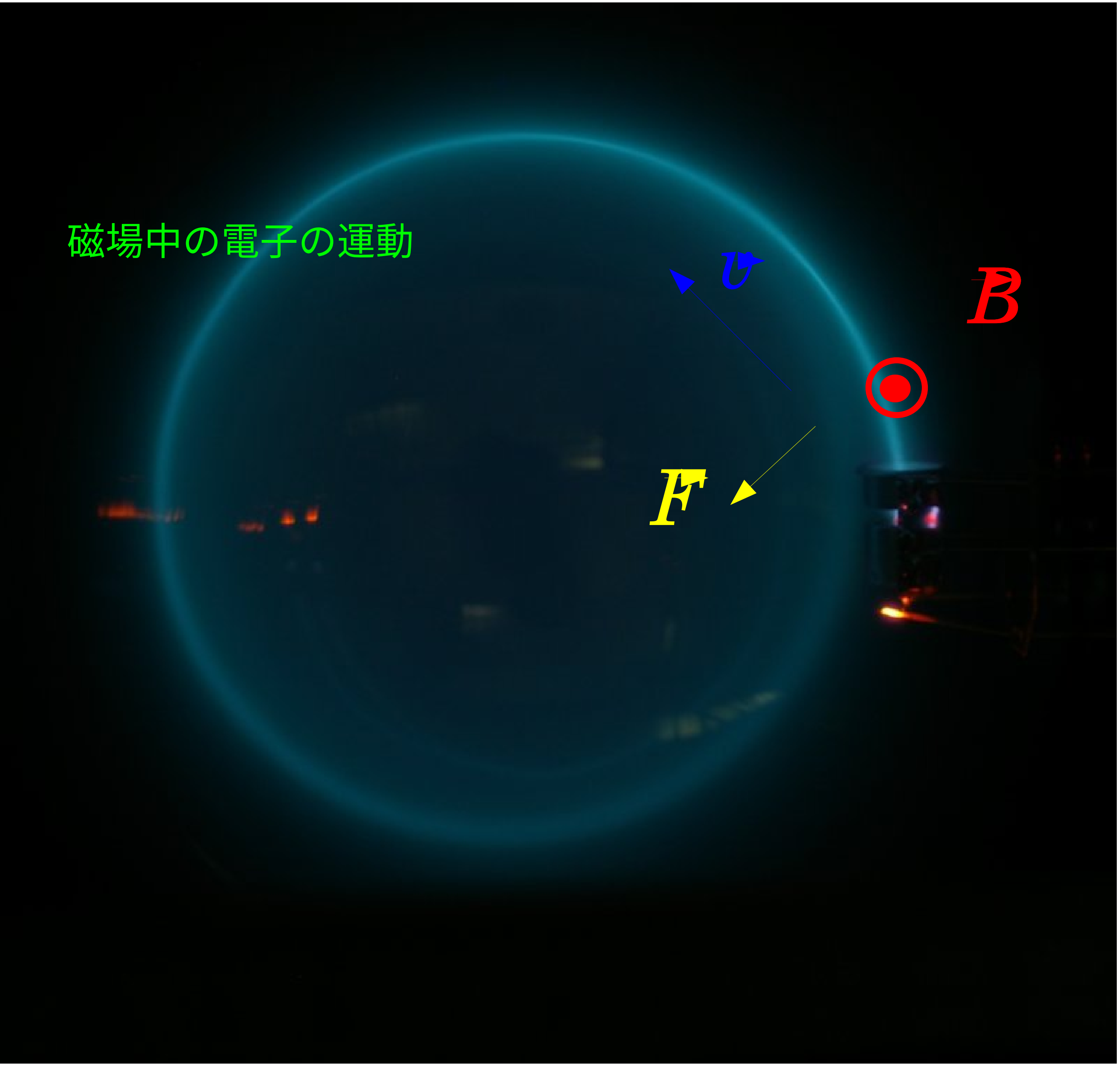
磁場が電荷にあたえる力の実験



力の大きさだけ考える

$$F_{磁場} = evB$$

これと遠心力

$$F_{遠心力} = \frac{mv^2}{r}$$

が釣り合うと考え

$$evB = \frac{mv^2}{r}$$

が釣り合うと考え

半径が、粒子の速度と磁場の強さから

$$r = \frac{mv}{eB}$$

と求められる。

一様な磁場中の荷電粒子の運動

運動方程式 $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$ を、次のように $\hat{i}\,,\hat{j}\,,\hat{k}$ で展開

$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

$$\vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$$

さらに、磁場はz軸に平行と考えてみると、

$$\vec{B}\|\hat{k} \longrightarrow \vec{B}=B_z\hat{k}=B\cdot\hat{k}$$

$$\begin{aligned}
m\frac{d}{dt}\left(v_x\underline{\hat{i}}+v_y\underline{\hat{j}}+v_z\hat{k}\right)&=q\left(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}\right)\times\left(B\cdot\hat{k}\right)\\
&=q\left(v_xB\left(\hat{i}\times\hat{k}\right)+v_yB\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)\right)\\
&=q\left(-v_xB\cdot\underline{\hat{j}}+v_yB\cdot\underline{\hat{i}}\right)
\end{aligned}$$

つまり、

$\hat{i}$ の係数　$m\dfrac{dv_x}{dt} = q \cdot v_y \cdot B$ …(a)　両辺をtで微分してmで割る-> $\dfrac{d^2 v_x}{dt^2} = \dfrac{qB}{m} \cdot \dfrac{dv_y}{dt}$ …(a')

$\hat{j}$ の係数　$m\dfrac{dv_y}{dt} = -q \cdot v_x \cdot B$ …(b)　両辺をmで割る　-> $\dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{qB}{m} \cdot v_x$ …(b')

$\hat{k}$ の係数　$m\dfrac{dv_z}{dt} = 0$

a' とb' から $\dfrac{dv_y}{dt}$ を消去して、 $\dfrac{d^2 v_x}{dt^2} + \left(\dfrac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0$

この微分方程式から、v_xをまず求め、それを使ってv_y, v_z を求めると、

$$v_x = v_\perp \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$v_y = v_\perp \cos(\omega t + \phi_0)$$

$v_z = v_\parallel$ (一定値、時間で変化しない)

ただし、 $\omega = \dfrac{qB}{m}$ かつ、

$v_\perp$ と $v_\parallel$ 、ϕ_0は積分定数

(解であることの確認は、微分方程式に代入すると確認できる)

さらに、位置 (x,y,z) を時間の関数として表す。

$$v_x = v_\perp \sin(\omega t + \phi_0)$$

$$\Rightarrow \quad x = \int v_x dt + x_0 = \int v_\perp \sin(\omega t + \phi_0) dt + x_0 = -r_0 \cos(\omega t + \phi_0) + x_0$$

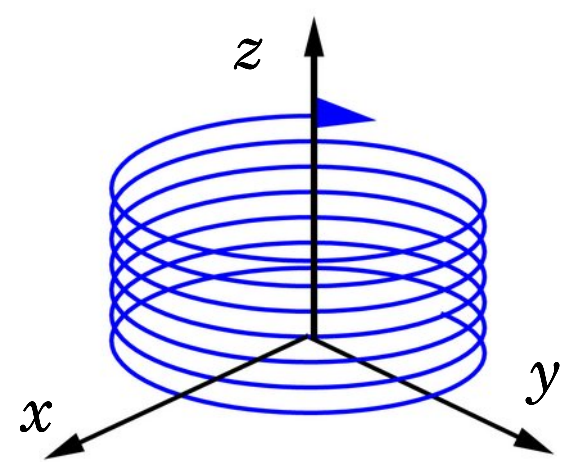
$$v_y = v_\perp \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\Rightarrow \quad y = \int v_y dt + y_0 = \int v_\perp \cos(\omega t + \phi_0) dt + y_0 = \quad r_0 \sin(\omega t + \phi_0) + y_0$$

$$v_z = v_\parallel$$

$$\Rightarrow \quad z = v_\parallel t + z_0$$

z 方向の螺旋運動



ただし、

$v_\perp$、$v_\parallel$、ϕ_0、

x_0、y_0、z_0は初期条件で決める積分定数。

また、$\omega = \dfrac{qB}{m}$

かつ

$$r_0 = \frac{v_\perp}{\omega} = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{p_\perp}{qB}$$

まとめると、

$$x = -r_0 \cos(\omega t + \phi_0) + x_0$$

$$y = \quad r_0 \sin(\omega t + \phi_0) + y_0$$

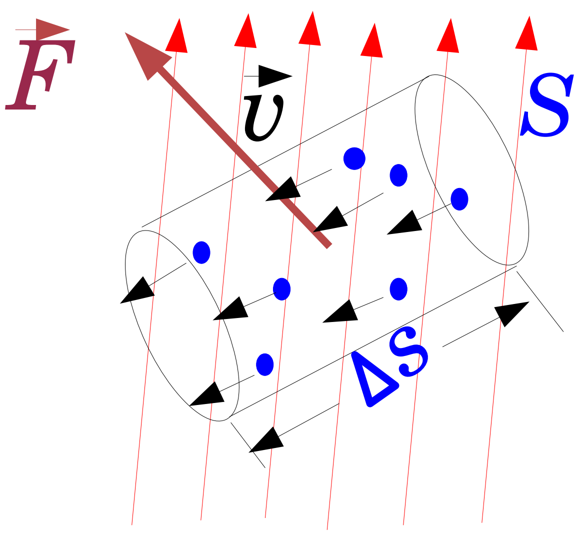
$$z = \quad v_\parallel t + z_0$$

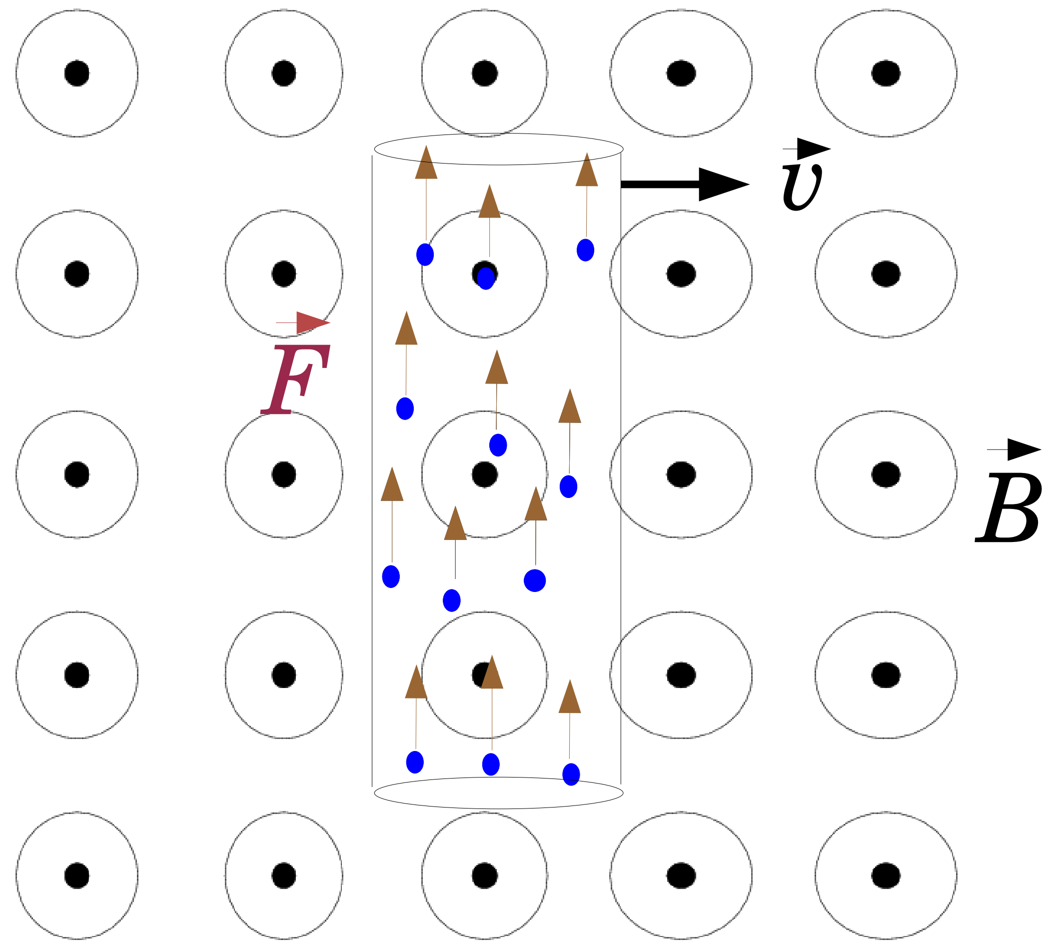
電磁誘導

動いている物体の中の電子に、磁場があたえる力

電線が横向きに動くと

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$



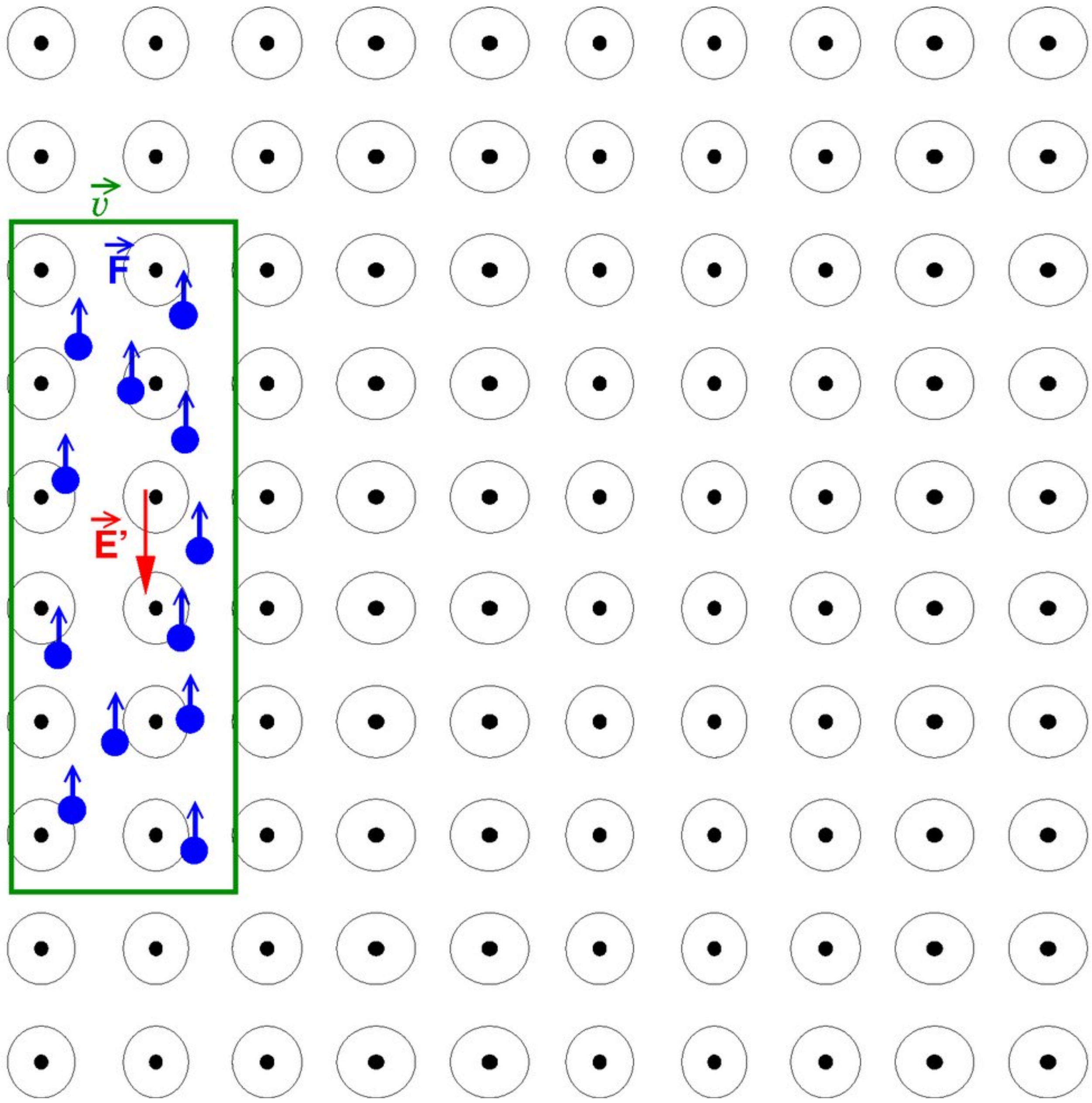


等価な(同じ力を与える)電場

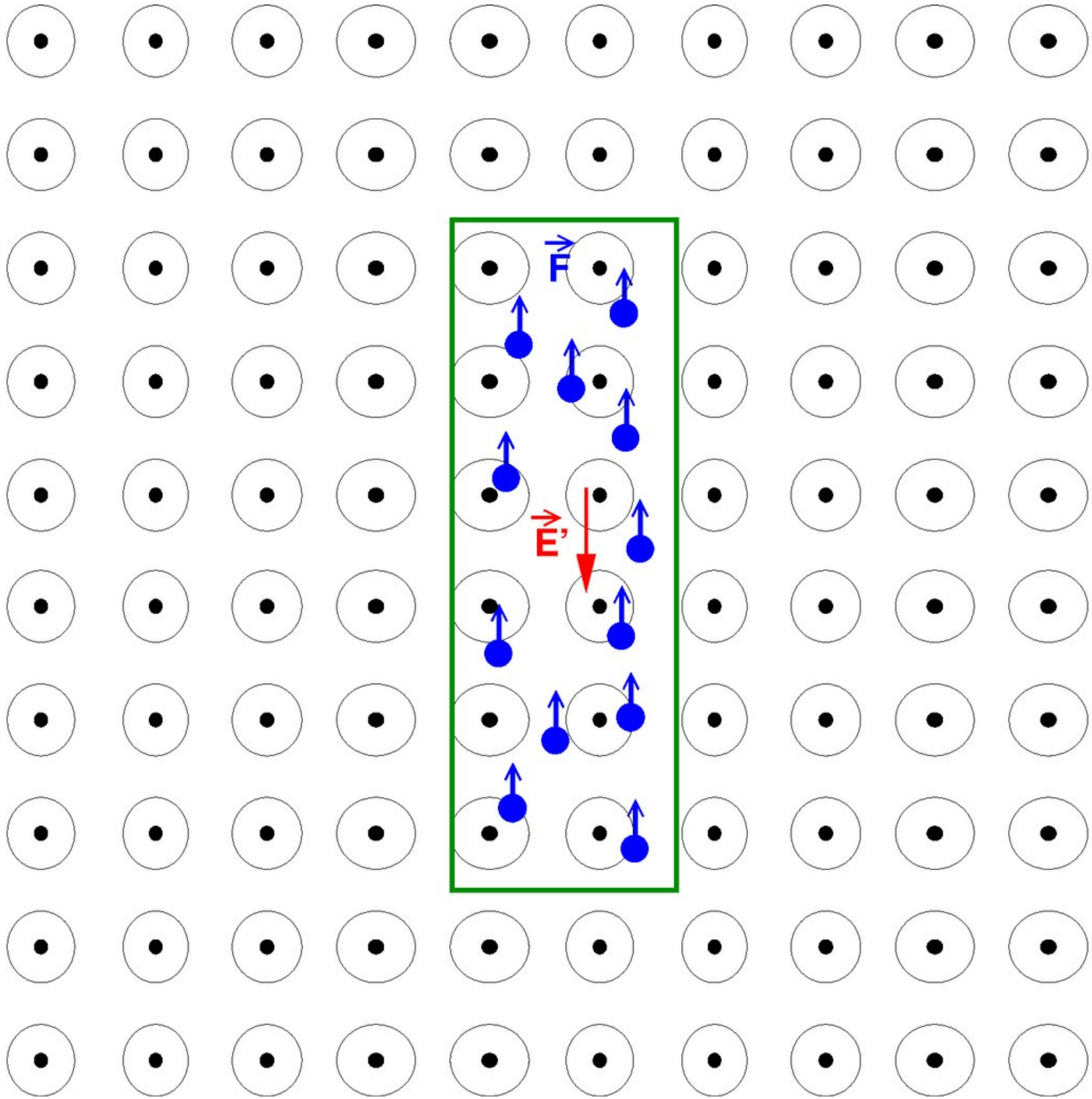
$\vec{E}\,' = (\vec{v} \times \vec{B})$ という電場があると $\vec{F} = -e\vec{E}\,'$

と、電荷は同じ力をうける。。

$$\vec{F} = -e\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = -e\vec{E}'$$

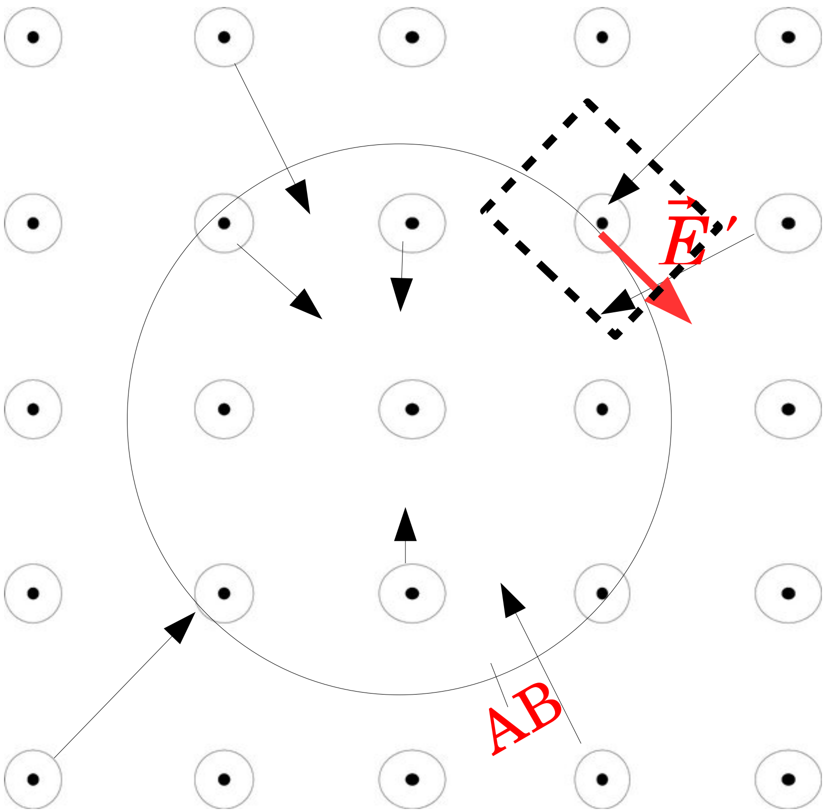


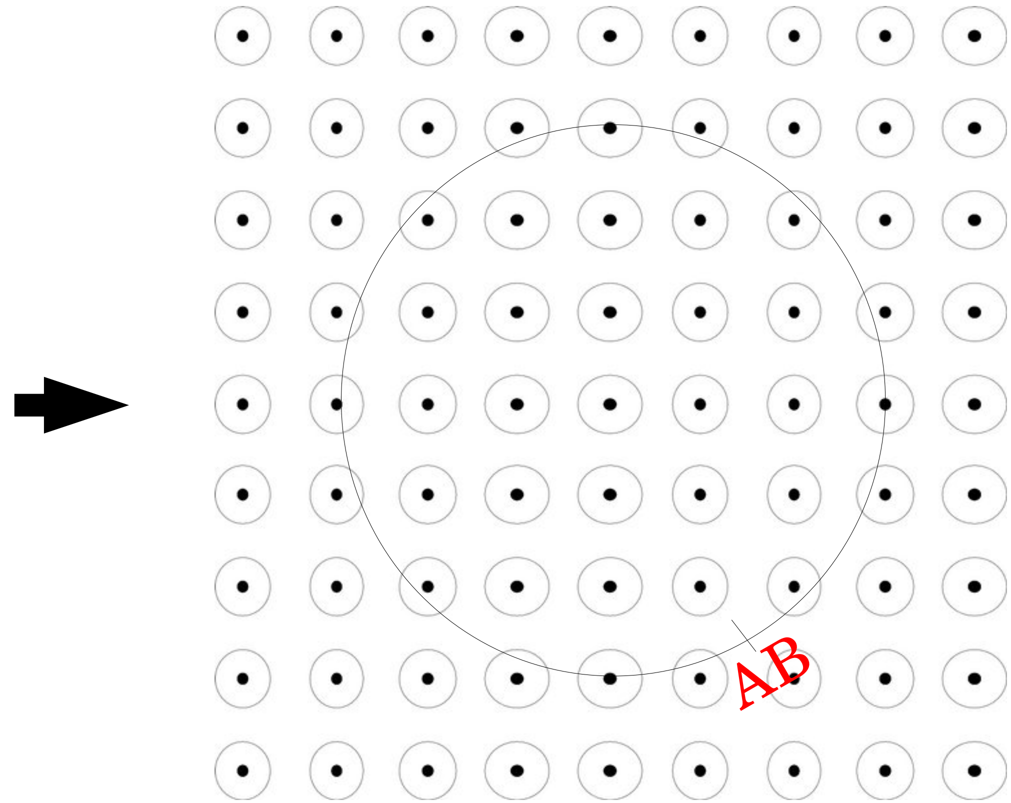
$\vec{B}$が、速度 $-\vec{v}$ で進む場合　　$\vec{F}=-e\vec{E}'=-e[-(\vec{v}\times\vec{B})]$



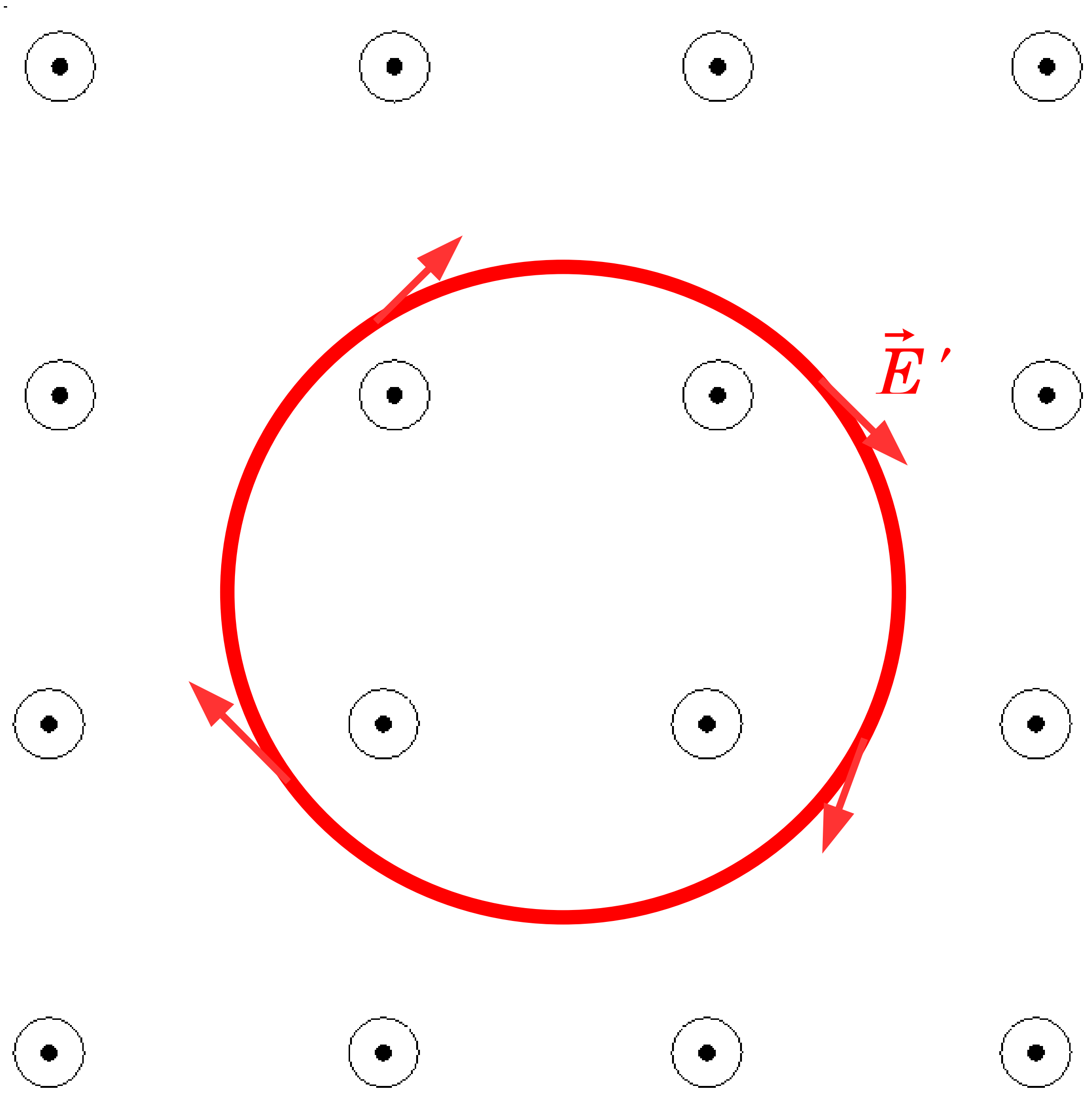
円形の導線の中の磁場が、次第に強くなる場合、

右の図の4倍の磁力線密度へ、





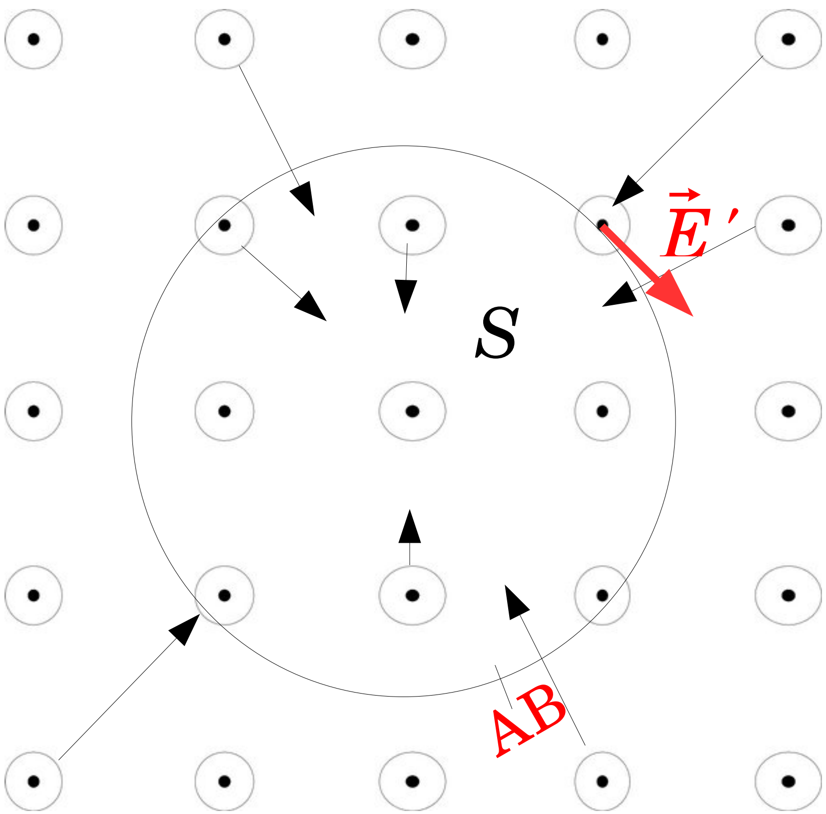
$\vec{E}'$ は、電流を引き起こす力＝「起電力」になる。
起電力は、正の電荷の受ける力に等しいので、
電子の受ける力とは逆向き。



磁場が強くなる時は、磁力線の移動が伴う。

電磁誘導(3)

一周積分 $\oint \left[\left(\vec{v}_{[磁場の移動する速度]}\right)\times\vec{B}\right]\cdot d\vec{s}$



は、積分路内に単位時間に入って来る磁力線の数であるが、同様な量は、下の式でも計算できる。

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

ここで $\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$ は、

面積Sを通る磁力線の数を数える操作。(ガウスの法則参照)

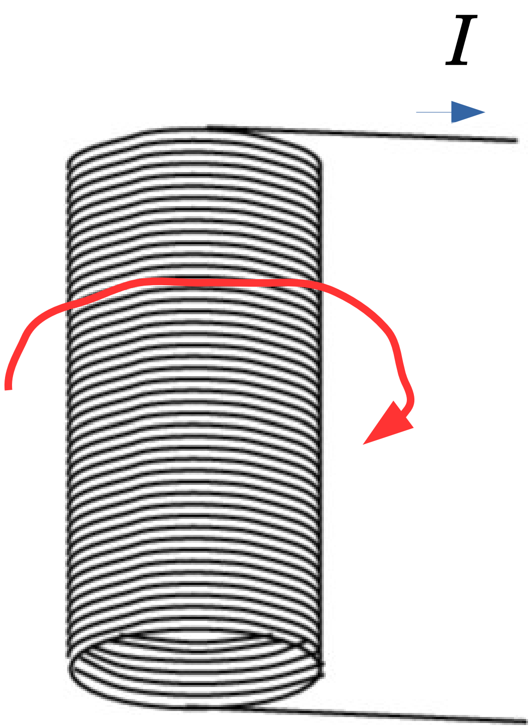
結局、AB間の電位差は、

$$V_{[AB]} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

と書け、ABがつながった場合には、電流を流す力になる。(誘導起電力)

$\vec{E}'$ の方向は、起電力の方向。

相互誘導



ソレノイドに一周巻きついた導線に発生する

電位差は、ソレノイドの磁場： $B=\mu_0 n_1 I$

より、

$$V_{[AB]}=-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

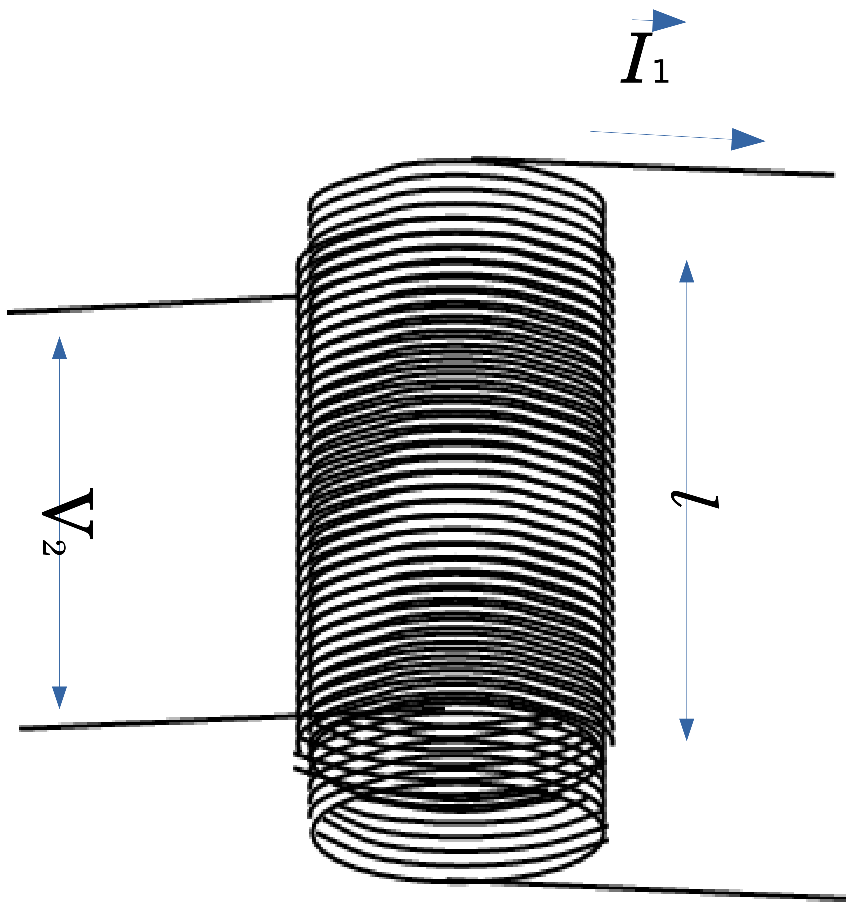
$$=-\frac{d[B\cdot S]}{dt}=-S\mu_0 n_1\frac{dI}{dt}$$

巻き数がN回ならば、N倍の起電力。

$$V=-N\cdot S\mu_0 n_1\frac{dI}{dt}$$

直接接続されていない、コイル同士の
磁気による結び付きを相互誘導と呼ぶ。

トランス



二つのソレノイドがかさなりあっている。かさなりの長さを l、それぞれの巻き線密度を n_1, n_2、ソレノイド1 を流れる電流を I_1 とする。

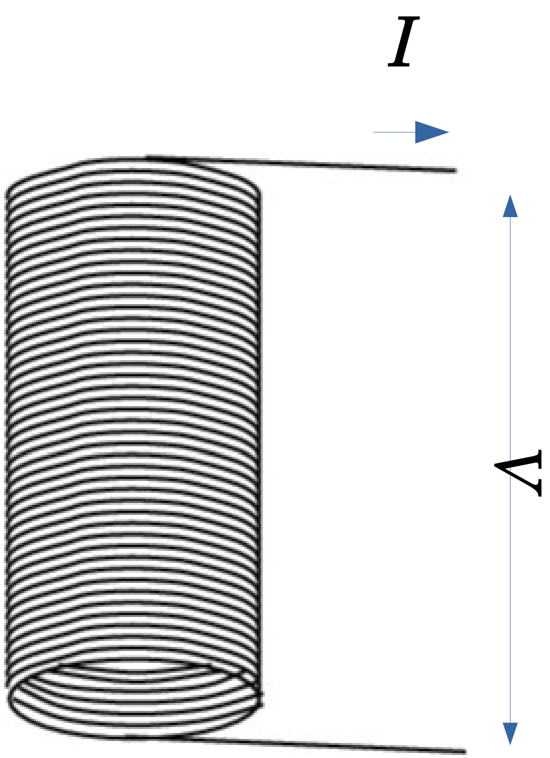
ソレノイドの両端で、磁場が広がる効果を無視すると、ソレノイド2 に誘導される起電力 V_2 は、重なっているソレノイド2 の巻数　$N = l \cdot n_2$ より、

$$V_2 = -l \cdot n_2 \cdot S \mu_0 n_1 \frac{dI_1}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

と書ける。

電流の変化と起電力の比例定数 M を相互インダクタンスと呼ぶ。

自己誘導



ソレノイドの磁場の強さの変化は、
そのソレノイド自身にも起電力を引き起こす。
この現象を自己誘導と呼ぶ。
その起電力は、相互誘導の強さを与える式、

$$V_2 = -l\,n_2 \cdot S\,\mu_0\,n_1 \frac{dI_1}{dt}$$

に $n_1 = n_2$ を代入、不要な添字を整理して、

$$V = -l\,S\,\mu_0\,n_1^2 \frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

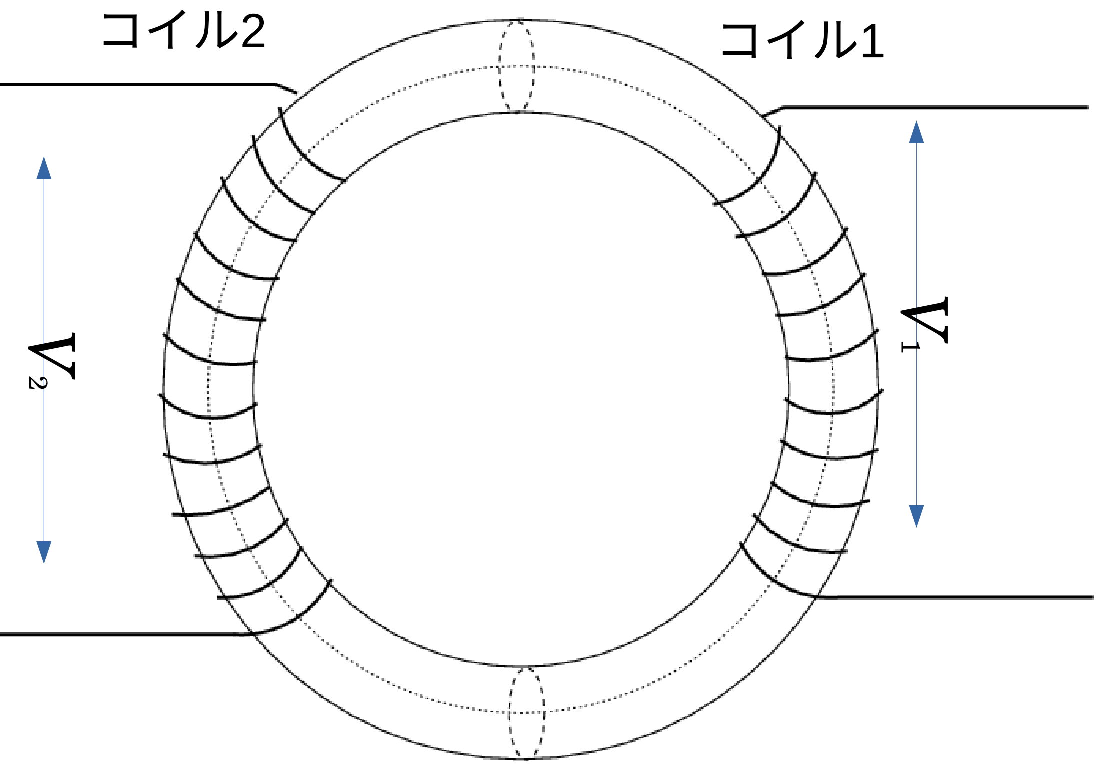
と与えられる。

この電流の変化率と起電力の比例定数L を
自己インダクタンスと呼ぶ。

トランス２

左下の様な、ドーナッツ型の磁性体の芯をもつトランスは、磁束(磁場)の漏れ出しが少なく、効率が良い事が知られている。(トロイダル型トランスとよぶ)

この様な場合コイルのかさなりの長さは、全周の長さ l、巻き線密度は、$n_1 = N/l$ と考えてよい。



$$V_1 = -S\mu \frac{N_1^2}{l} \frac{dI_1}{dt}$$ 自己誘導

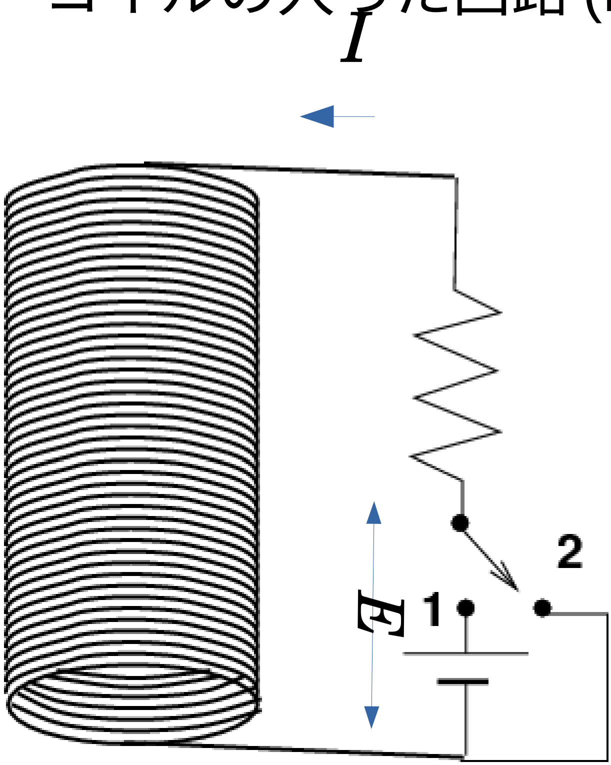
$$V_2 = -S\mu \frac{N_1 \cdot N_2}{l} \frac{dI_1}{dt}$$ 相互誘導

となるので、

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

が得られた。

コイルの入った回路 (LR 回路)



左図の様にソレノイドに、電池の様な直流電源を用いて、電流を流していたとしよう。

ある瞬間(t=0)に、スイッチが切り替わって、電池のところが、ただの導線に変った。

スイッチ1の状態での電圧のバランス。

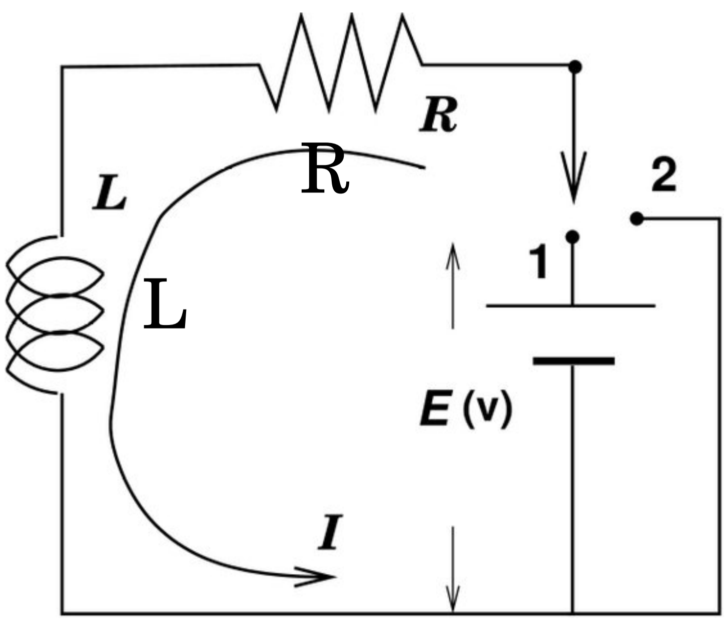
$$E = RI + L\frac{dI}{dt}$$

この状態で、長時間放置されれば、電流の時間変化は無視できる。したがって、

$$E = RI$$

スイッチ2の状態での電圧のバランス。

$$0 = RI + L\frac{dI}{dt}$$



スイッチ2の状態で、微分方程式を解く

$$0 = RI + L\frac{dI}{dt} \rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$ (変数分離型の微分方程式)

$$\rightarrow \frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}$$

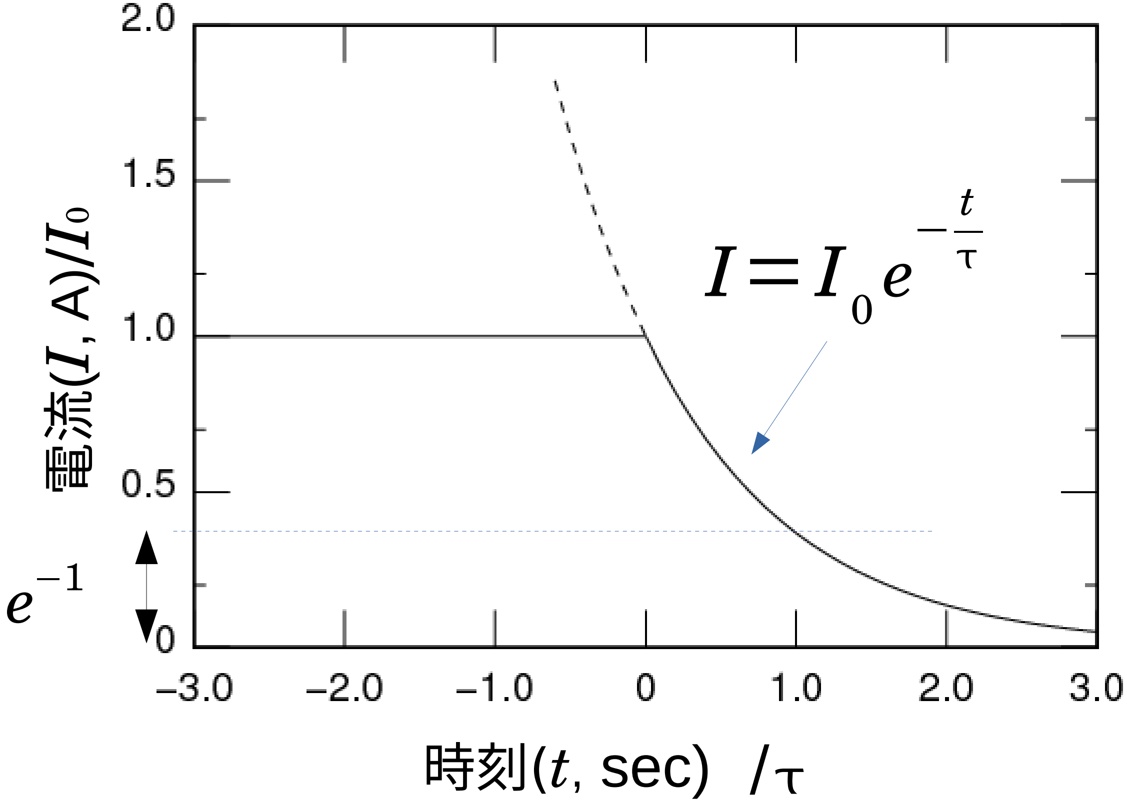
$$\int_0^t \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}dt = \int_0^t \left(-\frac{R}{L}\right)dt$$

$$\int_{I(0)}^{I(t)} \frac{dI}{I} = \int_0^t \left(-\frac{R}{L}\right)dt$$

$$\log\frac{I(t)}{I(0)} = -\left(\frac{R}{L}\right)t \rightarrow I(t) = I(0)e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

電流を時間 t の関数で表す。

$$I(t)=I_0 e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$ ただし、 $I_0=I(0)$



$$\tau \equiv \frac{L}{R}$$:時定数

時刻 t=0 で、スイッチ1から、スイッチ2に、切り替わった。

スイッチが２に切り替わってから、$\boxed{\text{抵抗に発生する全熱量}U}$

$$U=\int_0^\infty R\cdot I^2(t)\,dt$$

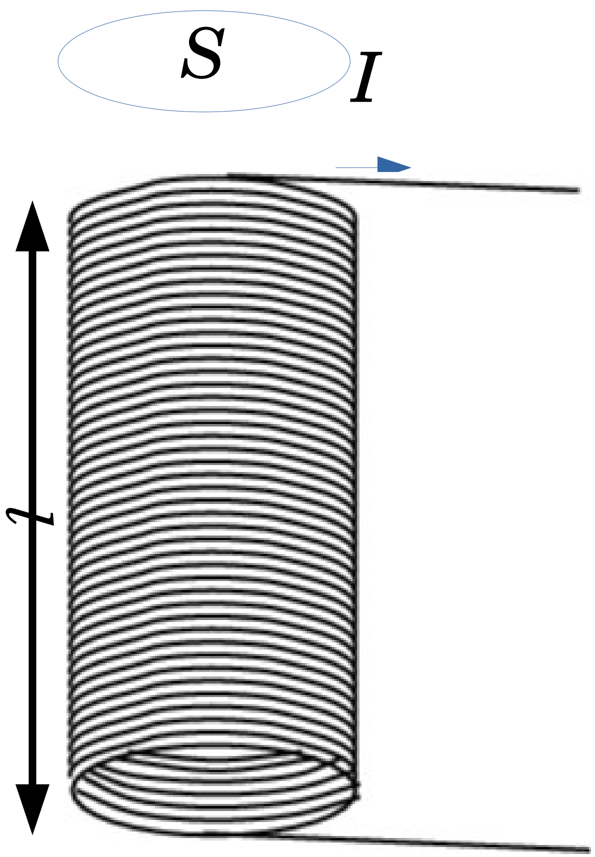
$$=R\cdot {I_0}^2\cdot\frac{\tau}{2}\cdot\left[e^{-2\frac{t}{\tau}}\right]_0^\infty$$

電池につながっていない時に流れた電流の
消費したエネルギー

$$\boxed{U=\frac{1}{2}L{I_0}^2}$$

は、状態1で、電流 I_0 が流れていた時、
コイルに蓄えられていたエネルギー

コイルに蓄えられたエネルギーを磁場で書いてみる



まず、自己インダクタンスの式、$L = lS\mu_0 n_1^2$ と、

$B = \mu_0 n_1 I$ から、求めた $I = \dfrac{B}{\mu_0 n_1}$ を

コイルに蓄えられたエネルギーの式、

$$U = \frac{1}{2} L I_0^{\ 2}$$ に代入

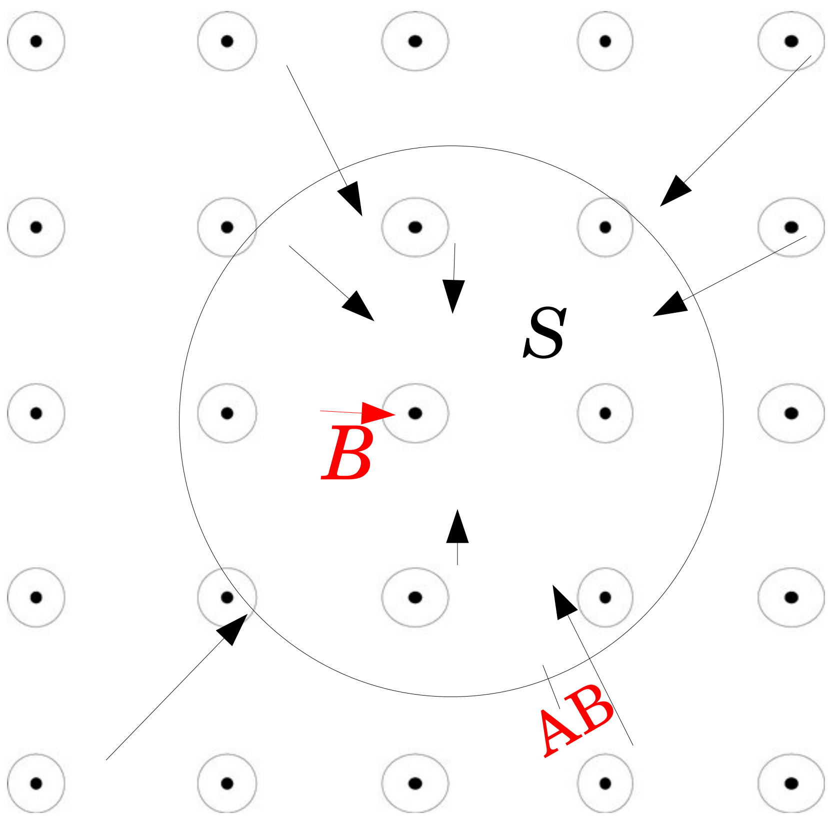
$$U = \frac{1}{2} l S \mu_0 n_1^2 I^{\ 2} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 [lS]$$

$[l\ S]$は、ソレノイド内部の体積だから、

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^{\ 2}$$

は、ソレノイド内部の磁場のエネルギー密度と考えられる。

今日の問題



一様な磁場があり、その中に磁場に垂直に円形で面積Sの導線があり、一箇所切れ目があり、僅かに離れている両端をA,Bとする。

1, 磁場の強さが時間の関数として、

$$B = b \cdot t + B_0$$

のように変化するとき、A,Bに発生する起電力を求めよ。

2, 磁場の強さが時間の関数として、

$$B = B_0 \sin(\omega t)$$

のように変化するときでは、起電力はどうなるか。

(簡単で良いので、起電力を時間の関数としたグラフも付けること。)