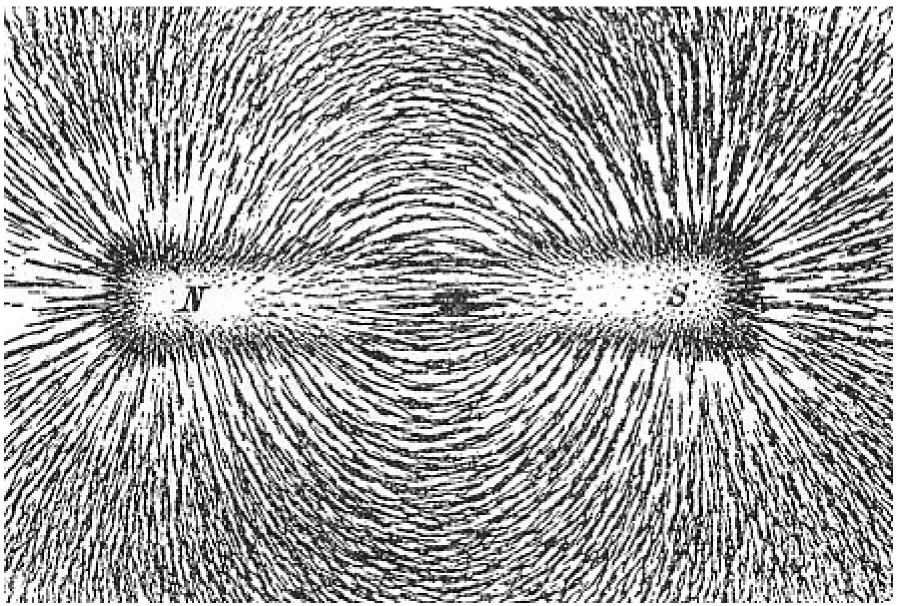
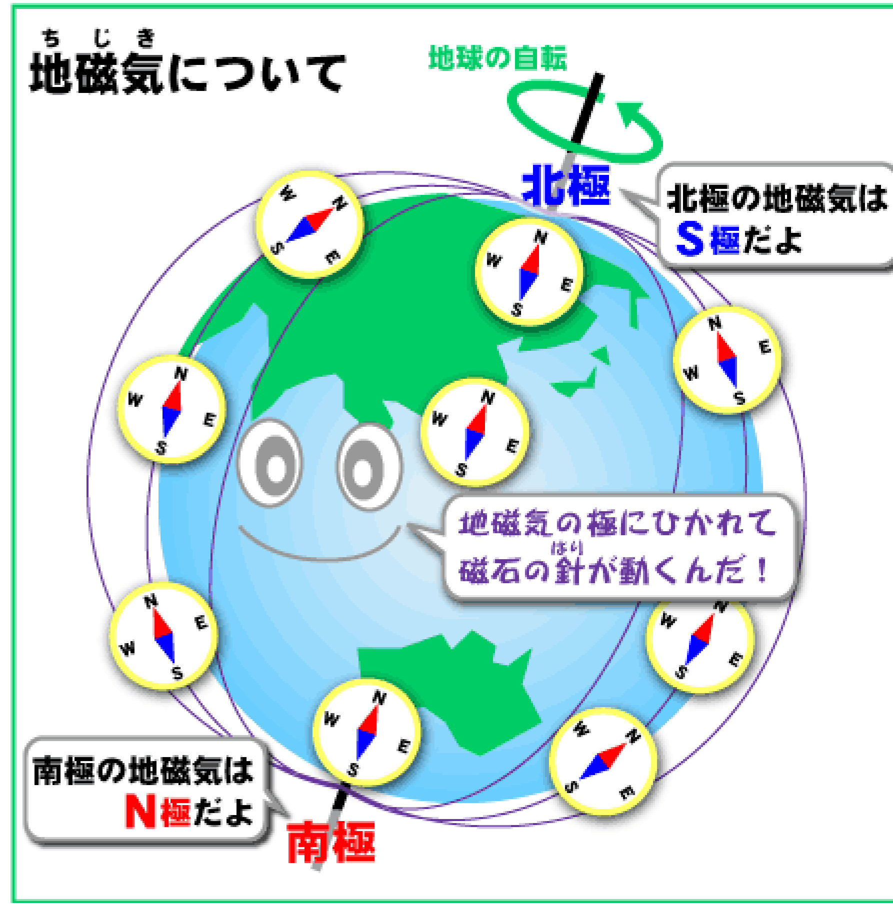
磁性：現象は、あちこちで見られる

しかし、電荷 に相当する「磁荷」は見つかっていない。

磁荷: 別名磁気単極子





なら、「誰が」磁場をつくっているのか？

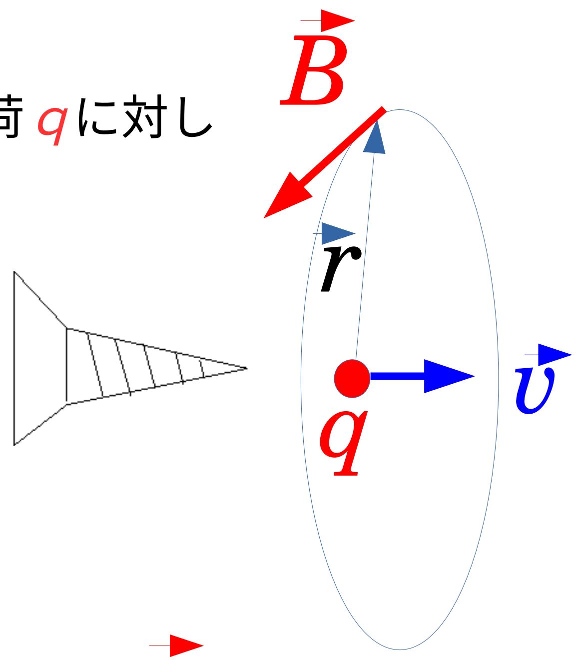
磁性の「犯人」も、やっぱり電荷

電荷が動くと、**磁力線**と言う**輪**をつくる。

外積

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot q\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

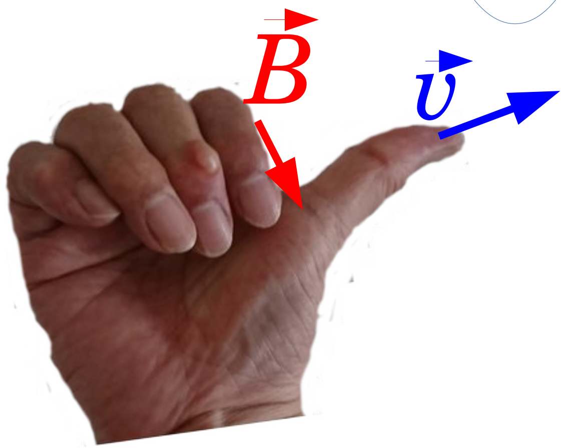
正の電荷 q に対し



つくる電荷の大きさに比例
強さは距離の二乗に反比例
} 電場と共通

- 方向を表すため、**外積** を用いる。
- 作られる磁場の強さは電荷の速度にも比例する、

μ_0 ：真空の透磁率



内積と外積（· と ×）　(注、・は普通の掛け算でも使う。)

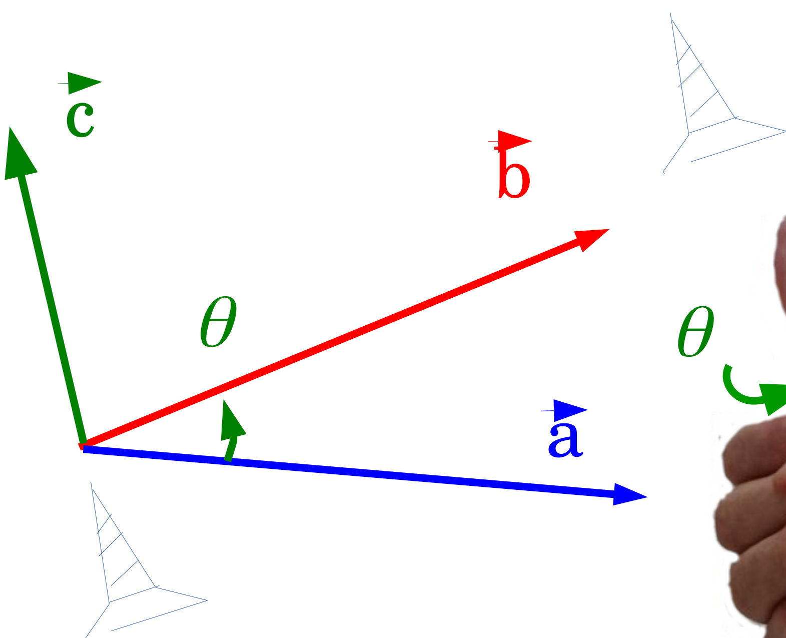
内積　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos\theta$　二つのベクトルから
普通の数(スカラー)へ

外積　$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$　二つのベクトルから
ベクトルへ

大きさ　$a\cdot b\cdot\sin\theta$

$$(\rightarrow\ \vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b})$$

掛ける順番で結果が変わる事に注意！



右ネジの
進行方向

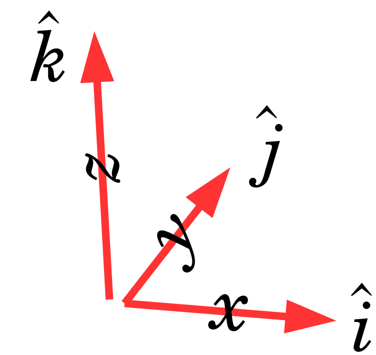
方向は右ネジの進行方向

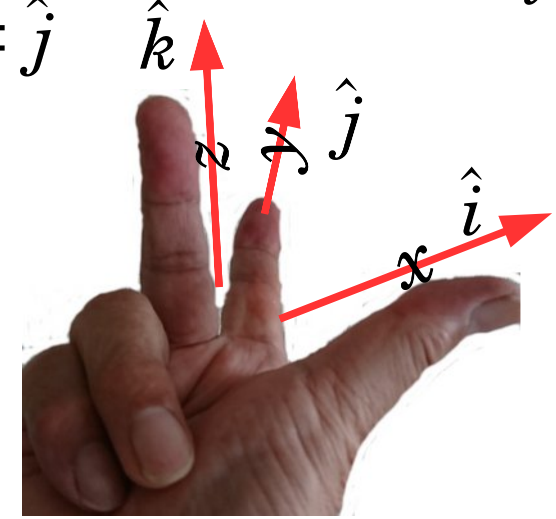
右手系の
座標軸に平行な単位ベクトルの外積

$$\boxed{\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}}$$

$$\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$$

$$\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$



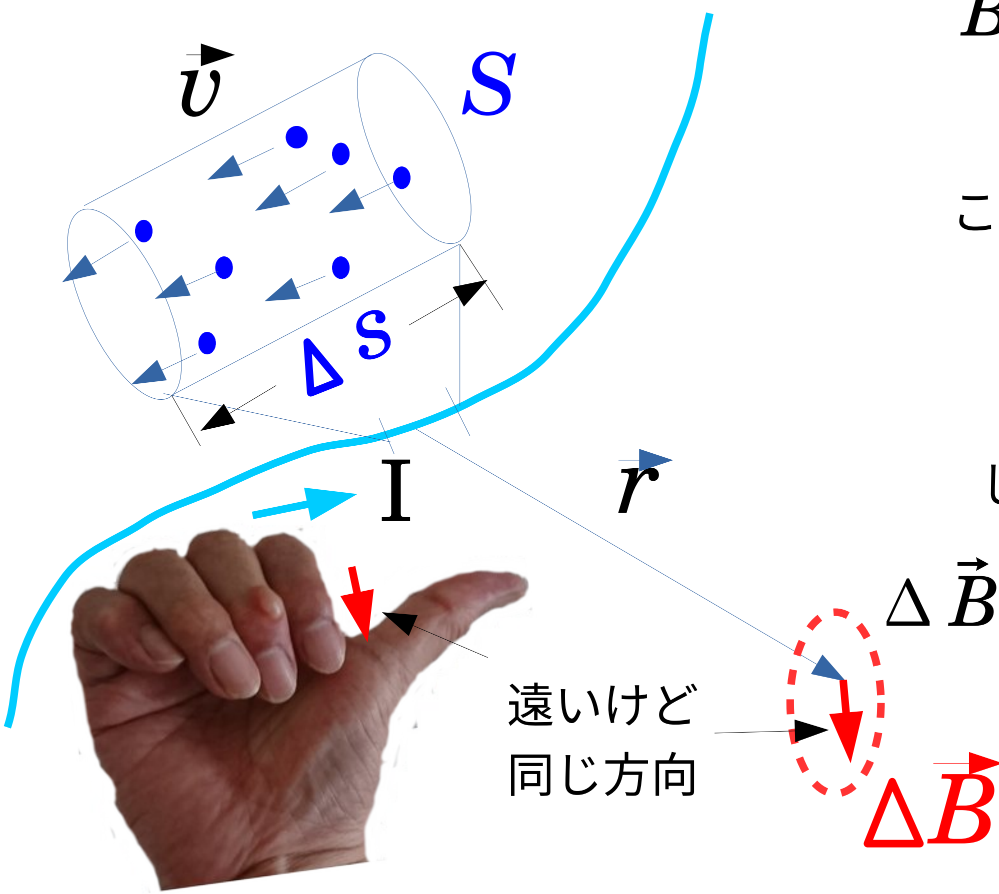


電流がつくる磁場 (電流と磁場は相性がよい)

短い区間を流れる電流のつくる磁場は、その中の
電荷(電子)のつくる磁場の合計で与えられる。

$$\vec{I}=-e\rho_e S<\vec{v}>$$ 電流の定義

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot(-e)\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$ 電子一個のつく磁場



この区間の中の自由電子の数は

$$N_e=\rho_e\cdot S\cdot\Delta s$$

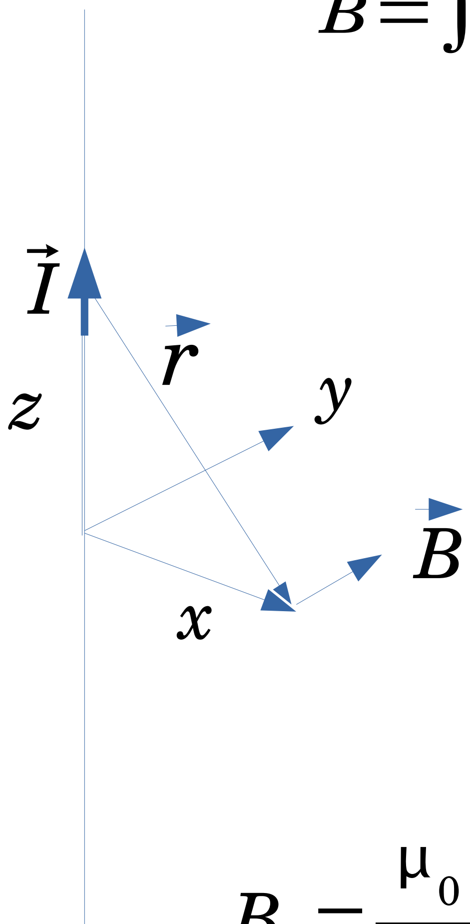
したがって、

$$\Delta\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{[\vec{I}\cdot\Delta s]\times\hat{r}}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\vec{I}\times\hat{r}}{r^2}\Delta s$$

ビオ・サバールの法則

変化しない(定常)電流のつくる磁場を、静磁場と呼ぶ事がある。

無限に長い直線電流の作る磁場



$$\vec{B}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{I}\times\hat{r}}{r^2}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{I}\times\vec{r}}{r^3}dz \qquad \left(\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{I}=I\cdot\hat{k} \qquad \vec{r}=x\hat{i}-z\hat{k}$$

$$\vec{I}\times\vec{r}=I\cdot x(\hat{k}\times\hat{i})-I\cdot z(\hat{k}\times\hat{k})=I\cdot x\cdot\hat{j}$$

従って、

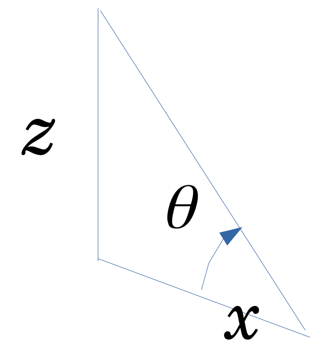
$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$ とおくと、

$$B_x=B_z=0$$

$$B_y=\frac{\mu_0}{4\pi}I\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}^3}dz=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(z/x)^2}^3}d(z/x)}$$

定積分の答えは、ただの数

$$\frac{z}{x}=\tan\theta$$ とおくと



$$d(\tan\theta)=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

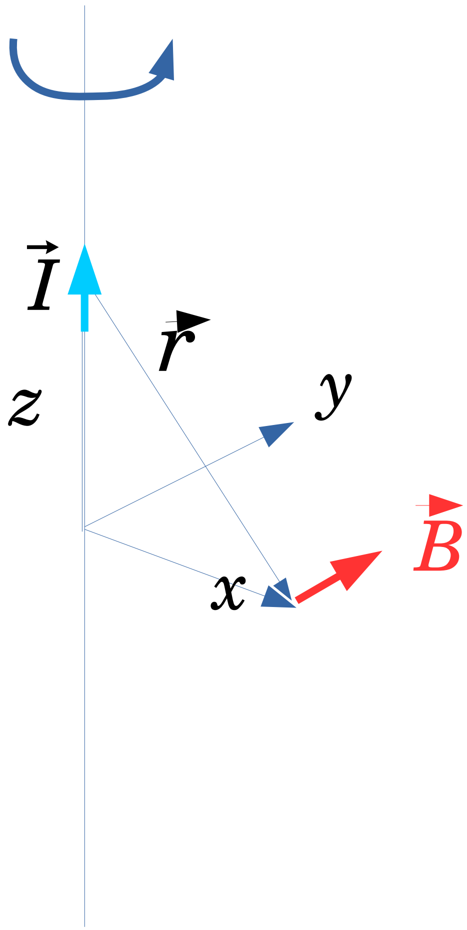
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(z/x)^2}^{\,3}}d(z/x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}^{\,3}}d(\tan\theta)$$

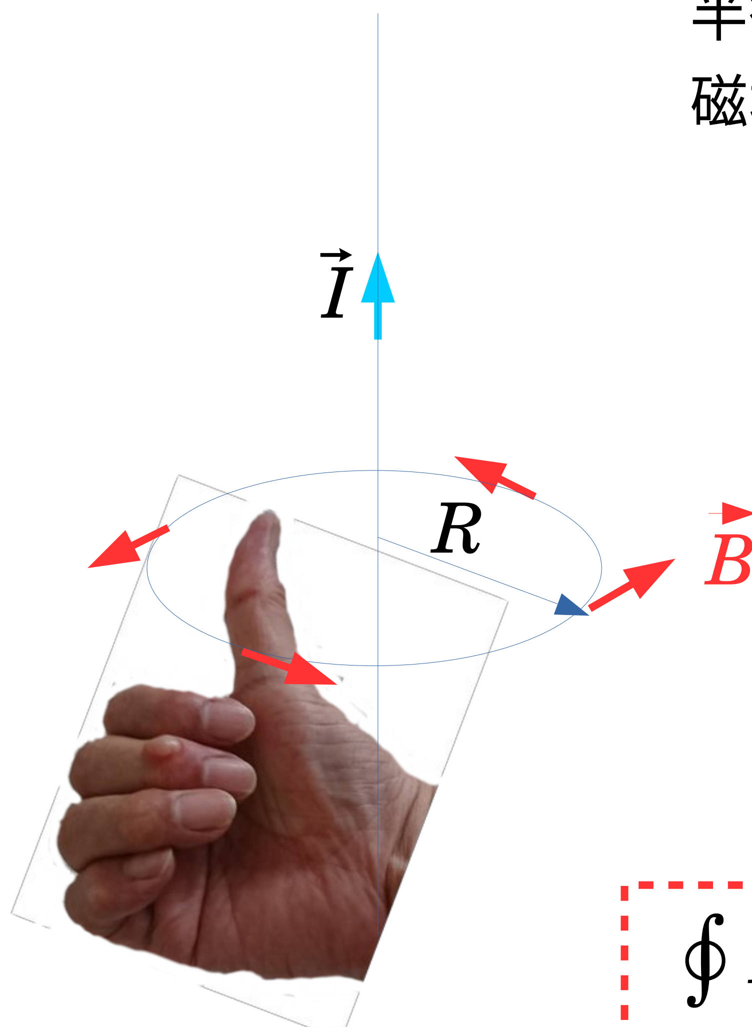
$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta=[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$=2$$

続き　　したがって　$B_y = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$

回転対称性





回転対称性を考えると、
半径 R の円周上どこでも
磁場の強さは、

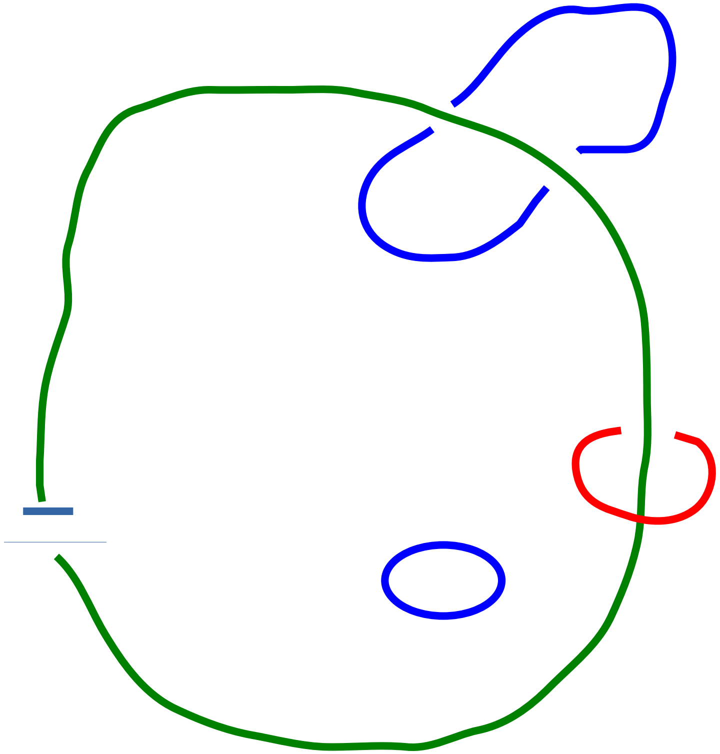
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

円周一周の積分は、

$$\boxed{\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \oint B\, ds = \mu_0 I}$$

ごめん！この証明は時間がかかりすぎ、ここではやらないが、

実は、もっと一般的な法則アンペールの法則が成り立つ



閉じた定常電流に対し、任意の一周積分は、

その中を電流が通っていれば、

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

通っていない場合は

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

注意：磁場に対するガウスの法則は常に

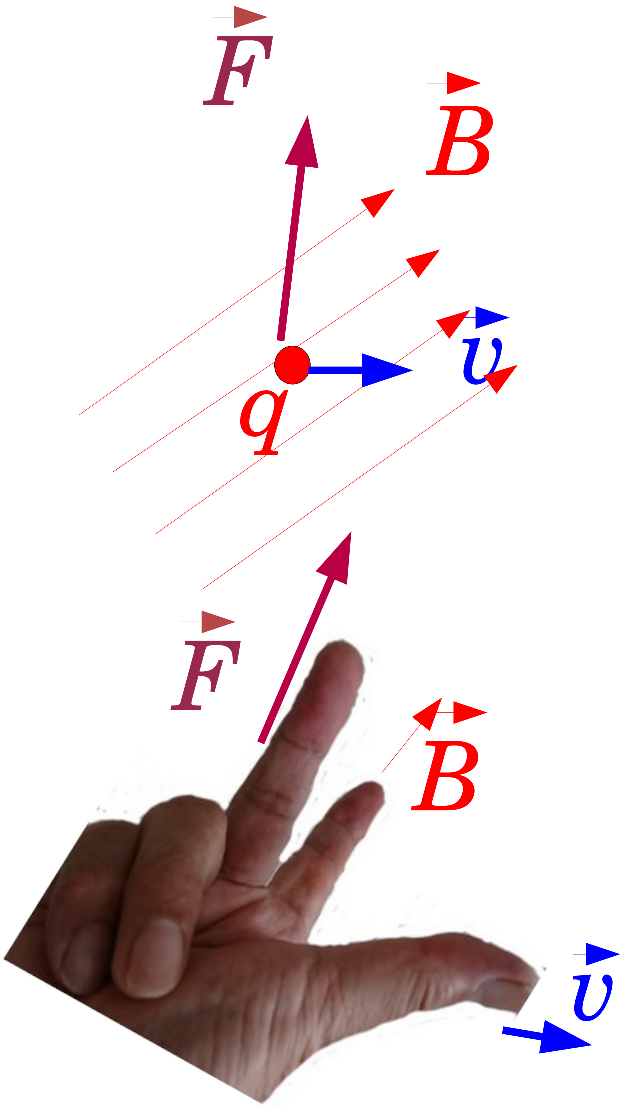
$$\int \vec{B}\cdot \hat{n}\, dS = 0$$

磁力線は、閉曲線であること、

面積分は面を通る磁力線の数を数える操作なので、自明

磁場が電荷にあたえる力

やはり外積で表現される



$$\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B})$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$$

電場も加えて、電磁場が電荷に与える力は

$$\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B}+\vec{E})$$

ともっとも一般的に書かれる。

これを、ローレンツ力と呼ぶ。

外積がでたら右手が便利

一様な磁場中の荷電粒子の運動

荷電粒子の速度を

$$\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)=(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$$

一様な磁場ベクトルを

$$\vec{B}=(B_x, B_y, B_z)$$

とおくと、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=q(\vec{v}\times\vec{B})$$

運動エネルギーは、

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$$

だから、

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)=\vec{v}\cdot\left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

だが、運動方程式を代入すると、

$$\frac{dE}{dt}=\vec{v}\cdot\left(q(\vec{v}\times\vec{B})\right)=q[\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})]=\boxed{0} \qquad \left(\vec{v}\perp(\vec{v}\times\vec{B})\right)$$

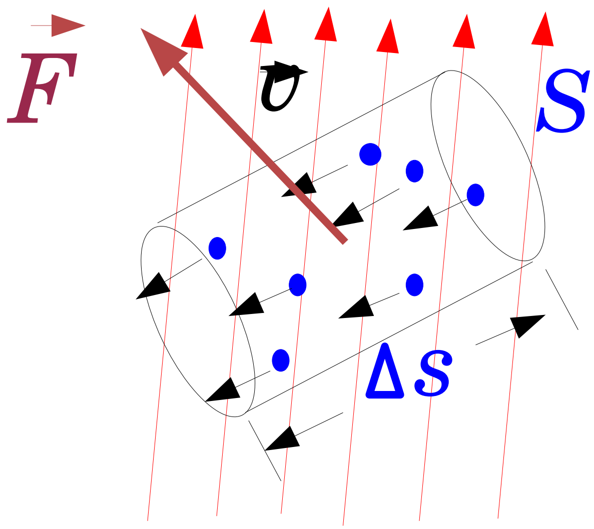
つまり、磁場中では（加速度は受けるが）運動エネルギーは変化しない。

磁場が電流に与える力

短い区間を流れる電流が磁場から受ける力は、
その中の電荷(電子)が磁場から受ける力の合計。

$$\vec{I} = -e\rho_e S \langle \vec{v} \rangle$$ 電流の定義

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$ 電子一個受ける力



この区間の中の自由電子の数は

$$N_e = \rho_e \cdot S \cdot \Delta s$$

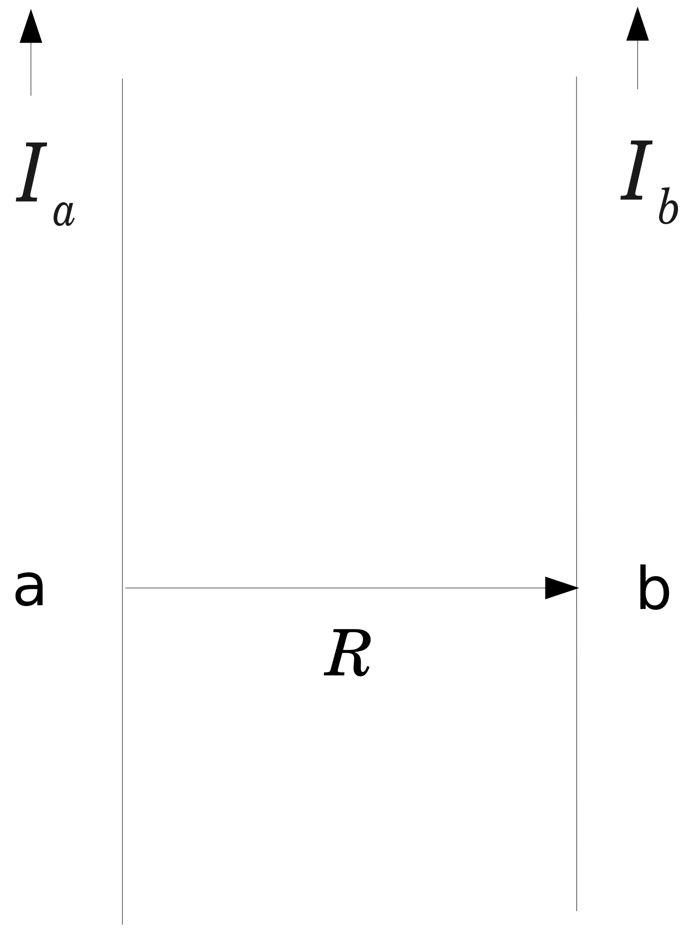
したがって、

$$\Delta \vec{F} = [\vec{I} \cdot \Delta s] \times B = \vec{I} \times \vec{B} \Delta s$$

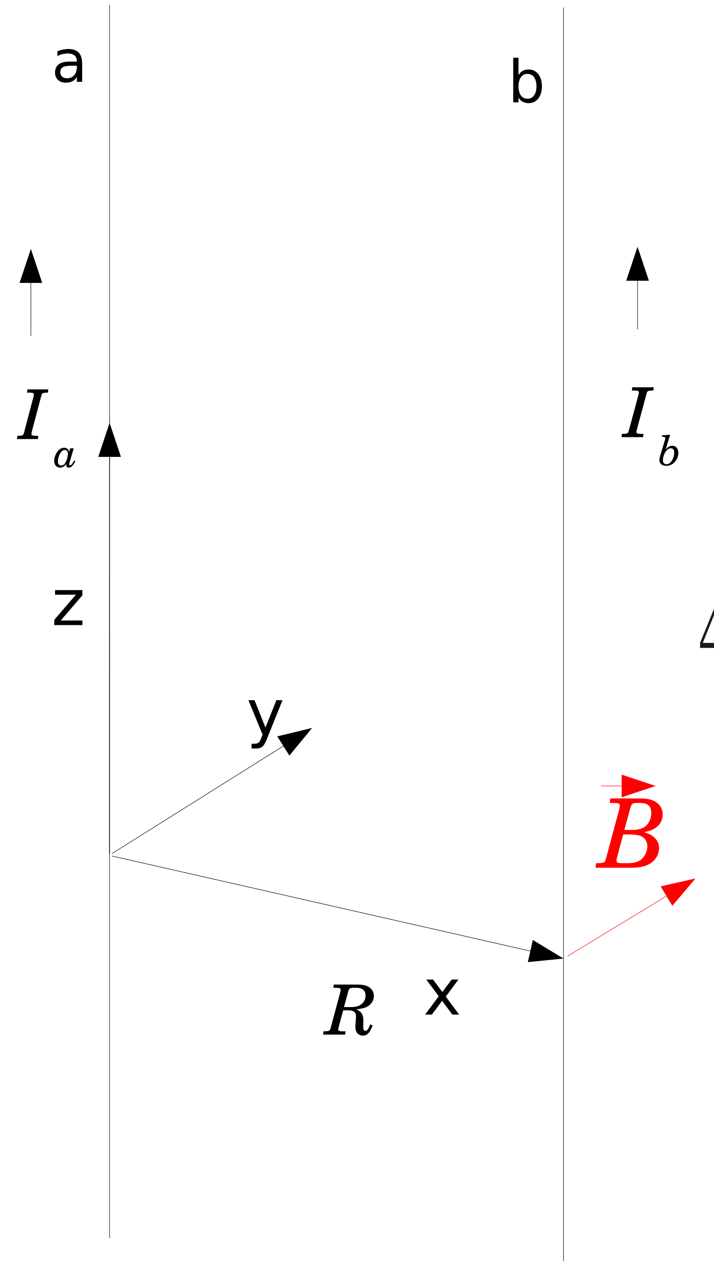
$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

今日の問題（今日はやらない）

下図の様に二つの無限に長い直線(a,b)を電流が流れている。
それぞれの間に働く、単位長さあたりの力を求めよ。
それは、引力であることを示せ。



平行な直線電流に働く力



まず、直線電流a が直線電流b の位置につくる磁場の強さB を求める。a bの距離はRだから、図のように座標を導入して

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I_a}{2\pi R}\hat{j}$$

次に、直線電流b が、磁場から受ける力を求める。

$$\Delta\vec{F}=[(I_b\hat{k})\times\vec{B}]\Delta s=[\frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi R}(\hat{k}\times\hat{j})]\Delta s$$

また、　$\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$　より、

単位長さあたりの力は

$$\vec{F}=-\frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi R}\hat{i}$$

つまり、2つの電流は引き合う

今日の問題、磁場に垂直な平面上の荷電粒子の運動

一様な磁場があり、その磁場に垂直な平面の上を荷電粒子が運動すると、回転運動になる。この回転運動の半径を求めよ。

（ヒント）粒子の運動と磁場が垂直なので、力の大きさだけ考えると、

$$F_{磁場}=evB$$

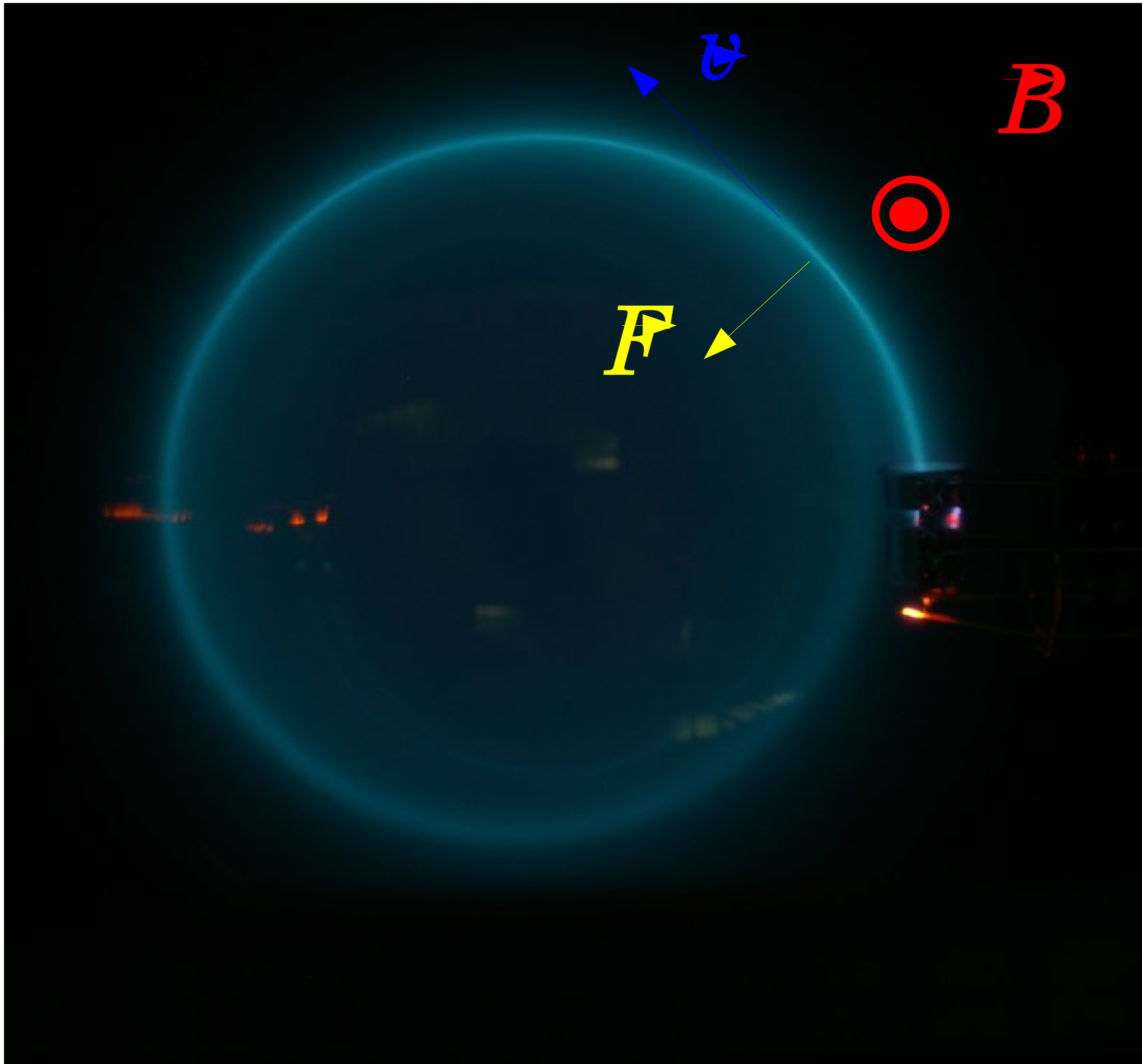
これと遠心力

$$F_{遠心力}=\frac{mv^2}{r}$$

が釣り合うと考えて、

（ここまで、そのまま写しとり、後を続ける。）

磁場中の電子の運動



内積と外積の確認

二つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ がある。これらのベクトルの内積と、外積について、

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 、$\vec{a}\times\vec{b}$ それぞれの大きさ

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 、 $\vec{a}\times\vec{b}$ それぞれの大きさが、最大になるときの条件。

3, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 、 $\vec{a}\times\vec{b}$ それぞれの大きさが、最小(=0)になる条件。