電位から電場を求める例として、クーロン場の電位から、電場を求める。

出発点として、無限遠に基準点をとった電位を与える式から始める

$$V(\vec{r})=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}=V(r)$$

まず、この電位は $\vec{r}$（ベクトル）の関数と言うより、　r（スカラー）の関数と言える。r（スカラー）のみの関数を、xで偏微分する時は、下の公式が使える。

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x}=\frac{dV(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{dV(r)}{dr}\cdot\frac{x}{r}$$

これは、合成関数の微分の公式　$\frac{df(g(x))}{dx}=\frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$

を偏微分に拡張したものである。（合成関数：この例、f はgの関数であり、さらにgはxの関数、のように、２重構造になっている関数のこと）

定数と思って、普通に微分

ただし、

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\sqrt{x^2+\boxed{y^2+z^2}}}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

クーロン場の電位から、電場を求める。(2)

$$\frac{dV(r)}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2}\right)$$ を代入して

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x}=\frac{dV(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{x}{r}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{r^3}$$

y, z による偏微分は、上の式で x を y、 z に置き換えて得られるから、

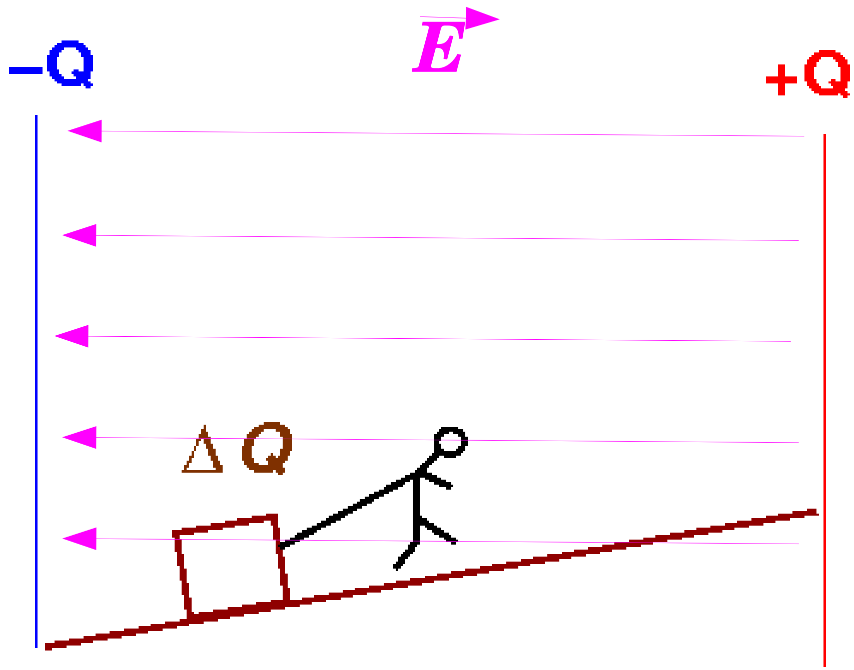
$$\vec{E}=-\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x,y,z)}{r^3}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$ ($\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}$ に注意)

確かに、一個の電荷の作る電場、 $\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$ と、一致する。

電場の持つエネルギー

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験から、始めよう

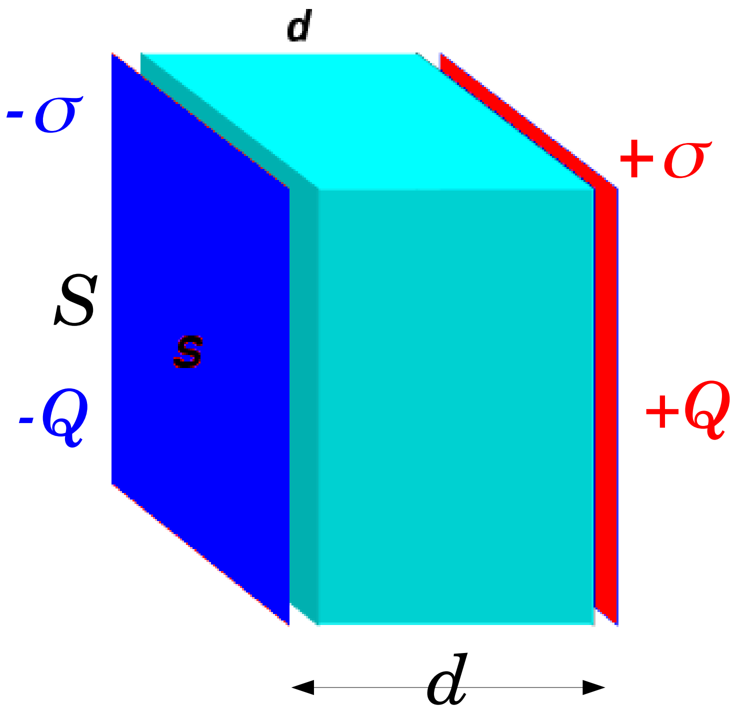


$V \cdot \Delta Q$ ：電場から受ける力に逆う仕事

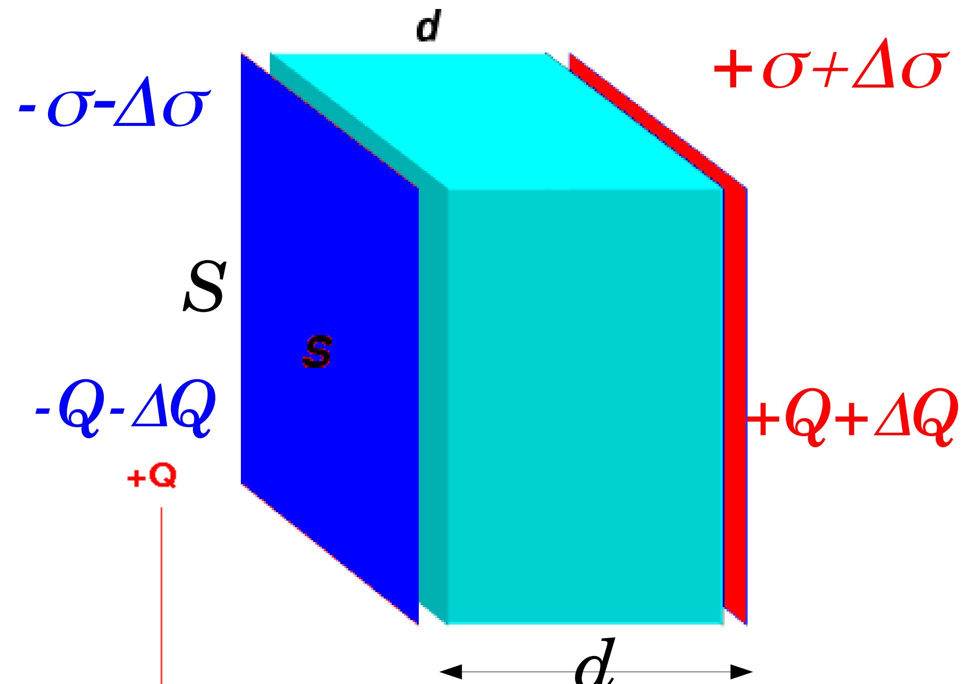
ただし、大きさが有限のコンデンサーでは、
極板間の電位差が ΔQ の移動とともに変化する。

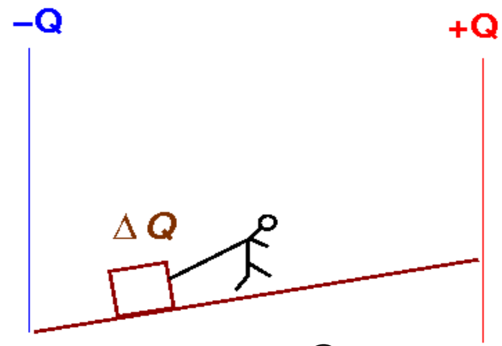
コンデンサーの中の微小電荷の移動前後の比較

ΔQ の電荷の移動の前



ΔQ の電荷の移動の後



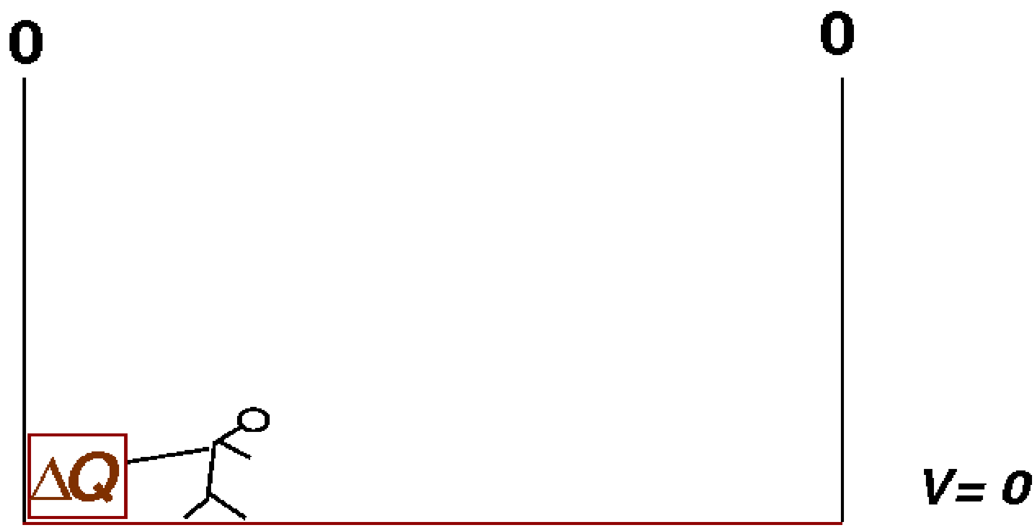


- 極板の電荷密度の変化 $\quad \sigma\left(=\dfrac{Q}{S}\right) \rightarrow \sigma+\dfrac{\Delta Q}{S}$

- 極板間の電場の変化 $\quad E\left(=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) \rightarrow E+\dfrac{\Delta Q}{\varepsilon_0 S}$

- 極板間の電位差の変化 $\quad V(=E\cdot d) \rightarrow V+\dfrac{d}{\varepsilon_0 S}\Delta Q=\boxed{V+\dfrac{\Delta Q}{C}}$

コンデンサーの中の微小電荷の移動(まとめ)



両極板の電荷 *0* の状態から

n回ΔQ の移動が繰り替えされた状態

•極板の電荷密度 $$\sigma\left(=\frac{Q}{S}\right)=n\frac{\Delta Q}{S}$$

•極板間の電場 $$E\left(=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)=n\frac{\Delta Q}{\varepsilon_0 S}$$

•極板間の電位差 $$V\left(=E\cdot d\right)=n\frac{d}{\varepsilon_0 S}\Delta Q=\boxed{n\frac{\Delta Q}{C}}$$

コンデンサーになされた仕事の合計

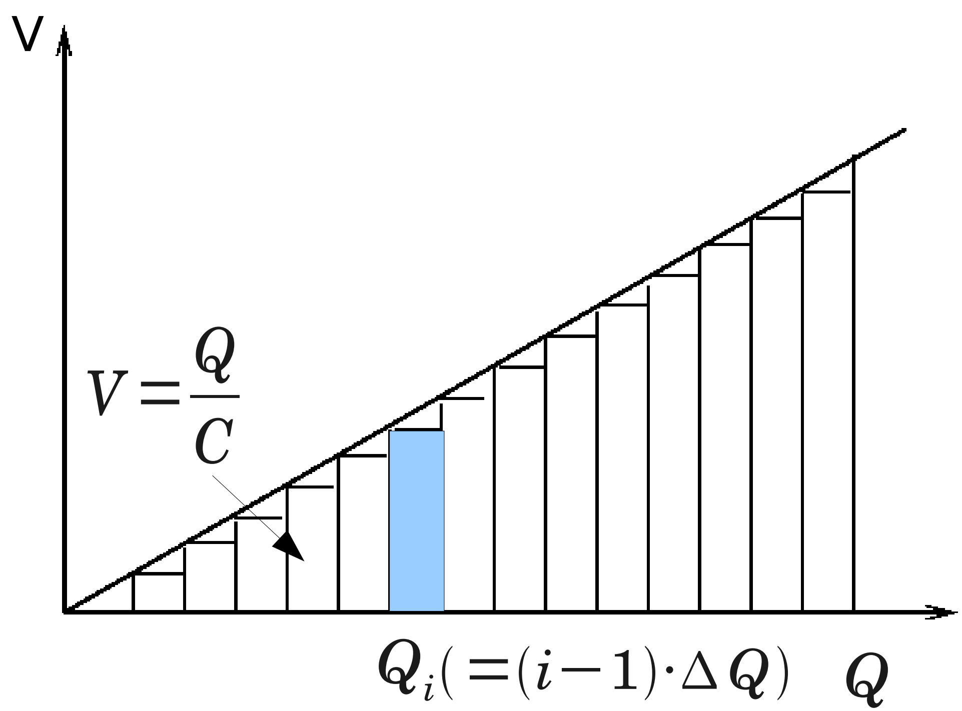
(電荷を蓄えるのに必要な仕事)

i 回めに ΔQ を、運ぶための仕事は　$V_i \cdot \Delta Q$

両極板の電荷が0の状態から、最終的に電荷±Q になったとして、

仕事の合計は、

$$U = \sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{C} \Delta Q \simeq \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ$$



したがって、この合計は

$\Delta Q \to 0$

の極限で、

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

となる。

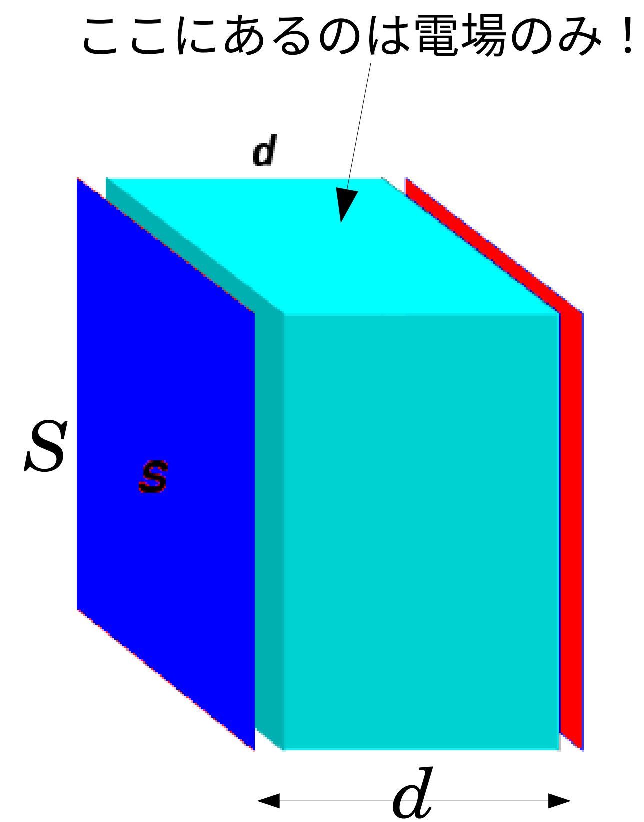
コンデンサーになされた仕事の合計 (2)

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$ および $$C\equiv\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$ より、

$$U=\frac{d}{2\varepsilon_0 S}(S\sigma)^2=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S\cdot d=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S\cdot d$$

ここで、

$$S\cdot d=[\text{極板間の体積}]$$ に注目。



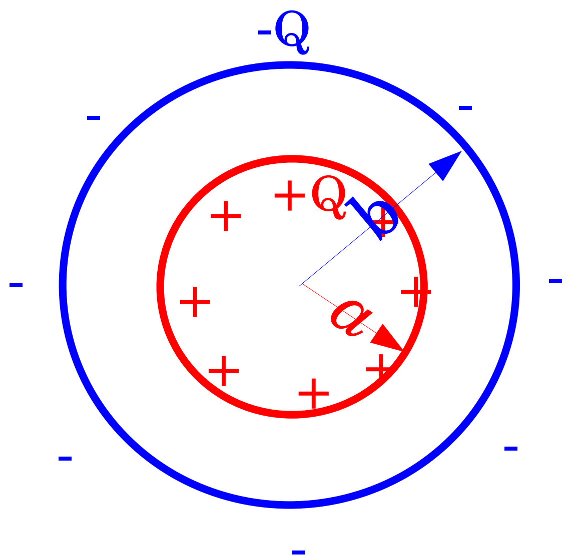
つまり、コンデンサーになされた仕事は、電場の存在する空間に分布すると考えられる。そして、そのエネルギー密度は

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

である。

球形コンデンサー

半径aとbの球面それぞれに＋Q、-Q の電荷を与えた時と、電荷はそれぞれの球面に、一様に広がり、分布したものとする。



この時、二つの球面はコンデンサーを構成して、電場はこの極板の間$(a<r<b)$に、だけ存在する。

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

極板間の電位差　(クーロン場の時と同様)

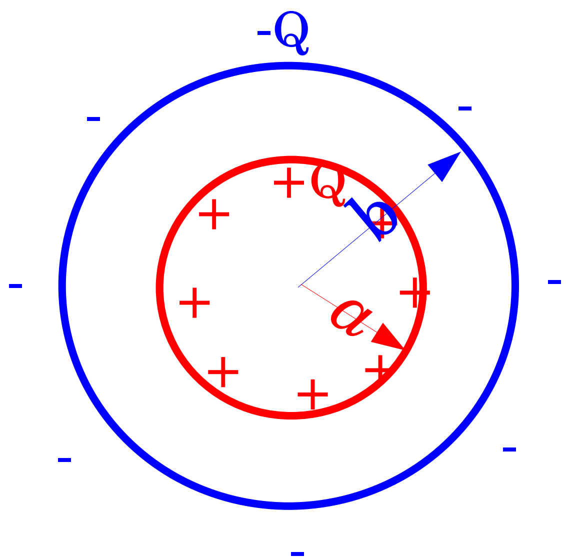
$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

従って、電気容量Cは

$$Q=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}V \text{ より } \quad C=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

と計算される。

球形コンデンサー ：蓄えられるエネルギー、外側の球が無限大に大きくなると、

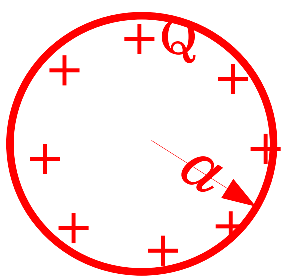


電気容量

$$C=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

より、蓄えられるエネルギーは、

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$



b → ∞ の時、

$$U=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

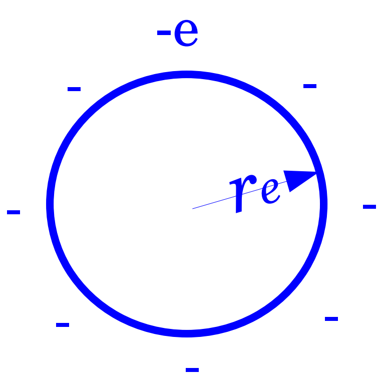
電気容量も

$$C=4\pi\varepsilon_0 a$$

となる。

電子の古典半径

電子が半径 r_e の球と考えると、電子の電場のエネルギーの合計は、コンデンサーとしてのエネルギーに等しい。



$$U = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_e}$$

これが電子の静止エネルギー(mc^2 、相対性理論より)に等しいと考えると、電子の半径として、

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}$$

が得られる。これを電子の古典半径と呼ぶ。

物理量 ：物理的な量で、単位つきで用いられる。

古典力学で最も基本的と考えられる物理量は、

長さ(m)、時間(s)、質量(kg)

歴史的理由

電磁気学ではこれに電荷量が加わる。しかし、測定のし易さから、

電流(A)が基本物理量として用いられる。(MKSA単位系)

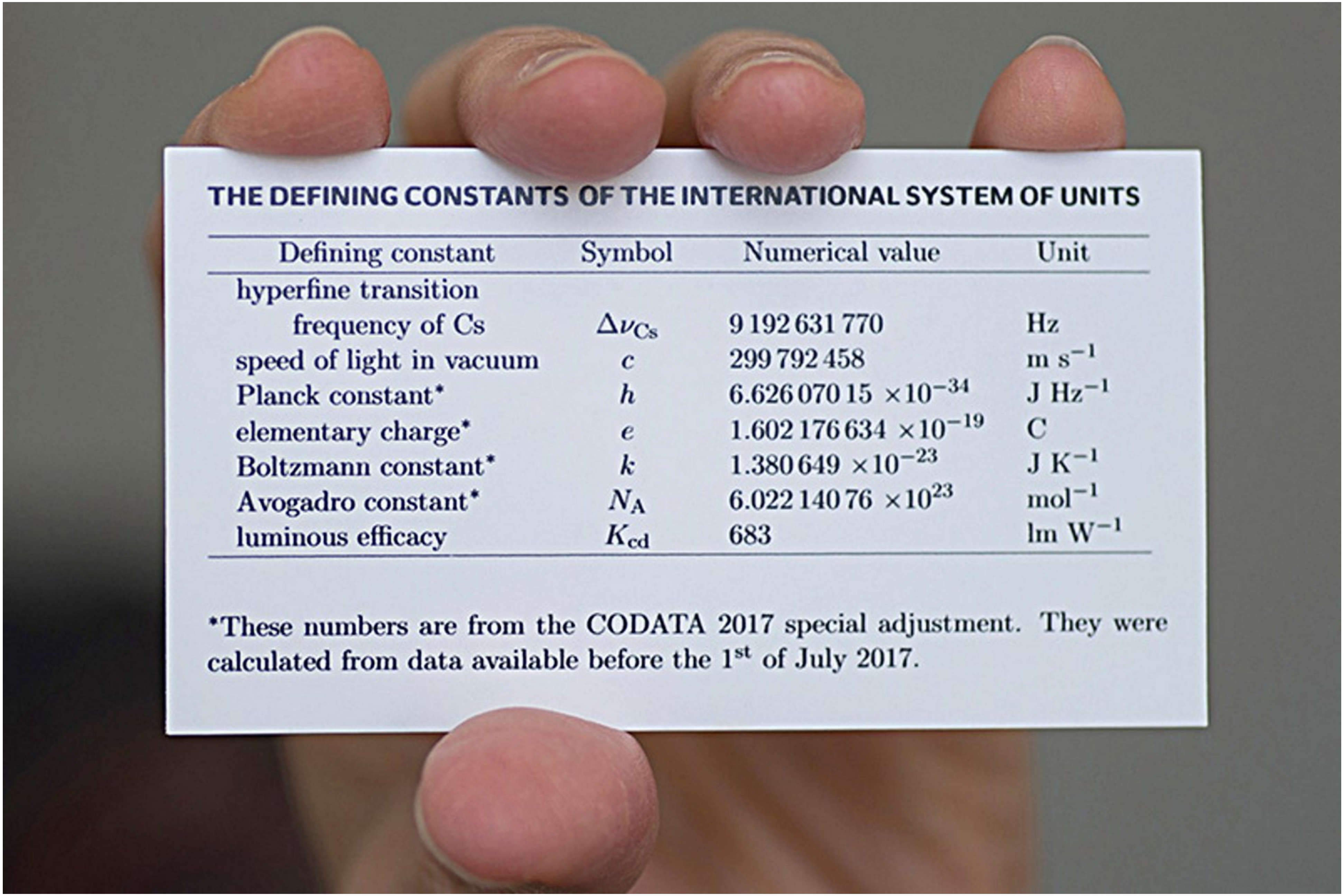
単位の例

物理量	SI(国際)単位系	基本単位だけで
力	N(ニュートン)	$kg\ m\ s^{-2}$
電荷	C(クーロン)	$A\ s$
電位	V(ボルト)	$kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-1}$
電場の強さ	V/m = N/c	$kg\ m\ s^{-3}\ A^{-1}$
コンデンサーの容量	F(ファラッド)	$kg^{-1} m^2\ s^4\ A^2$

注意 ε_0 もただの数でなく $8.85418782 \mathrm{x} 10^{-12}\ kg^{-1} m^{-3}\ s^4\ A^2$

と単位つきで書かれる物理量。 (SI単位系では F/m)

物理量　：物理的な量で、単位つきで用いられる。

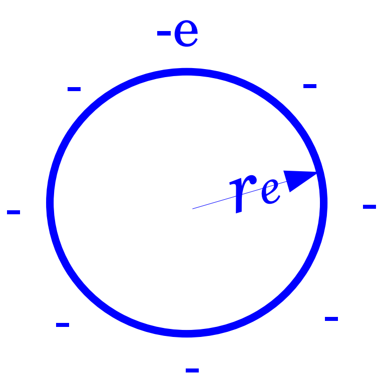


THE DEFINING CONSTANTS OF THE INTERNATIONAL SYSTEM OF UNITS

Defining constant	Symbol	Numerical value	Unit
hyperfine transition frequency of Cs	$\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$	9 192 631 770	Hz
speed of light in vacuum	c	299 792 458	$\mathrm{m\ s^{-1}}$
Planck constant*	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\mathrm{J\ Hz^{-1}}$
elementary charge*	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C
Boltzmann constant*	k	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\mathrm{J\ K^{-1}}$
Avogadro constant*	N_{A}	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	$\mathrm{mol^{-1}}$
luminous efficacy	K_{cd}	683	$\mathrm{lm\ W^{-1}}$

*These numbers are from the CODATA 2017 special adjustment. They were calculated from data available before the 1st of July 2017.

電子の古典半径 (2)



$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}$$ に、具体的な数値

$$e = -1.60217653\times 10^{-19}\,[A\,sec]$$

$$m = 9.1093826\times 10^{-31}\,[kg]$$

$$\varepsilon_0 = 8.85418782\times 10^{-12}\,[m^{-3}kg^{-1}sec^4A^2]$$

$$c = 2.99792458\times 10^{8}\,[m\cdot sec^{-1}]$$

を代入すると、

$$r_e = \frac{(1.6022\times 10^{-19})^2}{8\times 3.1416\times 8.8542\times 10^{-12}\times 9.1094\times 10^{-31}\times (2.9979\times 10^8)^2}\left[\frac{[A\,sec]^2}{[m^{-3}kg^{-1}sec^4A^2][kg][m\cdot sec^{-1}]^2}\right]$$

$$r_e = 1.4090\times 10^{-15}\ [m]$$

今日の問題

下の計算は、電子の古典半径を求める計算である。
これに至る考察と、下の計算を全ての数値を一桁に四捨五入して、
筆算で計算を行い、その経過を示せ。

これまで課題を提出した人の多くには繰り返しになるが、示すのは計算の経過であり、
答えではない。また、電卓を使うとおそらくは違った数値になる。

$$r_e = \frac{(1.6022\times10^{-19})^2}{8\times3.1416\times8.8542\times10^{-12}\times9.1094\times10^{-31}\times(2.9979\times10^{8})^2}\left[\frac{[A\,sec]^2}{[m^{-3}kg^{-1}sec^{4}A^{2}][kg][m\cdot sec^{-1}]^2}\right]$$