5月29日講義解説（スライドを見ながら読むことが前提）

第三回講義の解説の前に、

「今日の問題」の解答では答えだけでなく、問題も必ず書くようにすること。出題者に（先生）に解答を示すのでなく、学んだことからこの様な問題を考えることができて、その時の答えはこうなる、という流れを常に意識すること。出題された問題は、それ自体背景を説明しているので、まず問題を写してから、考え方と解答を示す。

また、最後まで解けなくとも、どこかでわからなくなったら、その時点までは書いて、必ず提出するように。実際の授業のように、出席を取れないので、とりあえず出席の証明になる。

なお、5月22日の「今日の問題」の解答に間違いが多かったので、要点だけに**省略した**解答例を示す。

半径 a と b の、2つの同心球に一様に電荷が分布して、それぞれ合計が $+Q$, $-Q$（絶対値は等しく、符号が反対）である。この時の電場を求めるため、ガウスの法則

$$\varepsilon_0 \int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\, dS = \sum_{\text{内側にある電荷}} Q$$

を適用すると、左辺は球対称性により $\varepsilon_0 4\pi r^2 \cdot E$ 、右辺は領域より値が変わり、結局

$$\varepsilon_0 4\pi r^2 \cdot E = \begin{cases} 0 & (b \le r) \\ +Q & (a \le r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

従って、電場の強さは、

$$E = \begin{cases} 0 & (b \le r) \\ \dfrac{+Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (a \le r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

ベクトルで書いて、

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (b \le r) \\ \dfrac{+Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & (a \le r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

となる。

＃この問題で、 電場が存在するのは、 $a \le r < b$ の領域だけになることの確認する。

ここからは、講義で話したことの要約。

36 ページ
これから、電場と電荷に関係する仕事、エネルギーを取り扱うので、仕事について復習する。特に、移動を妨げる力に逆らって移動する場合の仕事の表し方に注意する。

37 ページ
位置エネルギーは、重力に逆らって物体($\boldsymbol{m}$)を移動させる時に、 $-\vec{F}_g \cdot \vec{s}$ と書けることに注意する。ここで、 $\vec{F}_g$ は重力(大きさは $m \cdot g$)、 $\vec{s}$ は移動した距離ベクトルである。重力の位置エネルギーとしてよく知られているように、結局高さｈまで物体を移動させる時に必要な仕事は $m \cdot g \cdot h$ である。

38 ページ
電場でも位置エネルギーを考えることができる。二つの無限に広い平面に、それぞれ反対符合の電荷が同じ面密度で分布して、コンデンサーの極板を成している場合、両極板の中間の空間には一様な電場が形成される。
この電場 $\vec{E}$ から電荷ｑが受ける力を $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ と書くと、それに逆らって $\vec{s}$ だけ移動するために必要な仕事は、 $-\vec{F} \cdot \vec{s}$ となる。

ここでは－の極板から＋の極板まで電荷ｑを運ぶとすると、この時必要な仕事は、結局、 $q \cdot E \cdot d$ と書け、電場の位置エネルギーとしては $E \cdot d$ が重力場の位置エネルギーの $g \cdot h$ に対応していることがわかる。この時 $E \cdot d$ を極板間の電位差と呼ぶ。なお、電位差というものは我々が通常（直流の）電圧と読んでいるものと同じである。

39 ページ
平行板コンデンサーの極板に平行な第 3 の平面を考えると、一方の極板からこの平面へ電荷を運ぶための仕事は、どの点をとっても、同じである。この様な性質を持つ面を等電位面とよぶ。
この平面との電位差も、38 ページの電極間の電位差と同様に求めることが出来る。

40 ページ
さて、コンデンサーを考える時、いつまでも無限に広い平行な二つの極板を考えるわけには行かない。じっさい、この様なコンデンサーは実現不可能であるが、十分に広い二つの極板をもつコンデンサーなら、実現可能であり、実際我々の生活で使っている電子機器には必ず入っている。
無限に極板の広いコンデンサーを考える理由は、このように考えることにより、問題が単純化して色々な考察が可能になる点にある。そして、無限に広い極板をもったコンデンサーで成り立つ関係は、実現可能な十分に広い極板を持つコンデンサーにおいても、近似的に成り立つと考えられる。

実現できる実際のコンデンサーにおいては、極板上の全電荷 Q と、一様に分布した時の電荷密度σの間には $\sigma = Q/S$ の関係がある。ここで、S は、極板の面積である。とすると、電場の強さと、極板間の電位差は、それぞれ

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} \quad 、 \quad V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} \cdot d$$

のように書けることになる。

ここで注意したいのは、電荷を極板に蓄える方法である。実際には電池など両極と、コンデンサーの両極を電線などで繋いでやることで、コンデンサーの両極板の電位差が上の式を満たすようにこの起

電力から電荷が移動する（実際には電子の出入り）。従って、実際の場合は　結果として電荷が極板にたくわえられることになり、むしろ

$$Q=\frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d} \cdot V$$

と書いて、コンデンサーの極板に電圧を掛けると、極板に電荷が蓄えられると解釈したほうが現実にあっている。この時電荷と電圧（電位差）の比例定数

$$C=\frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d}$$

を、コンデンサーの電気容量と呼ぶ。

41−43 ページ、
クーロン電場がある場合の 2 点間の電位差。

41 ページ
球対象であるから、電荷を中心とした同心球面上では、同じ球面上であれば、どの点でも電位は同じと考えることが出来る。なので、球面の周りに同心球を考えることにより、考察する。
この図で重要な点は、半径がわずかに異なる二つの同心球面、特に赤い点線で囲んだ部分が、時祭には非常に小さいと仮定すると、38 ページの様な考察が可能であることである。
平面コンデンサーの時の知識を応用すると、二つの球面の電位差はこのページに示すように書ける。

42 ページ
クーロン場で任意の 2 点の電位差は、両点を含む様な球面を考え、その両球面の間にも、それぞれの間隔が非常に狭いたくさんの球面を考えることで、41 ページの議論を繰り返し応用することができる。そうすると、任意の 2 点の電位差はこのページの下に示されたような、半径 r の積分で計算出来ることになる。

43 ページ
42 ページで、クーロン電場の任意の 2 点の電位差は、半径積分で表現できることを知った。この積分はそんなに難しい積分ではないので、それぞれの半径を積分の始点（A)、終点（B)とする定積分を実行して、2 点の電位差を計算できる。
積分の始点をどこかの点に固定すると、その点からの電位差は、スカラー関数となる、このスカラー関数を、ここで固定した点を基準点とする電位とよぶ。
クーロン電場では、この点を無限遠に持っていくことが出来るが、その時の電位はここで示すように簡単な関数になる。しかし、電荷の分布の状態により、基準点を無限大持っていくと、電位差を求める積分が発散することがある。したがって、基準点を無限遠に取ることは、いつも出来るわけではない。

44 ページ
電位差の一般論
一般的な電場に対して、2 点間の電位差を求めるためには、まず、2 点を結ぶ曲線を選んで、その上でこのページで説明している「線積分」を行う。

45 ページ
しかし、43 ページのクーロン電場のようにスカラー関数の電位が定義出来るためには、条件がある。

電位が定義出来るための必要十分条件は、どんな閉曲線にたいしても、44 ページで定義された線積分の値が 0（ゼロ）になることである。
実は、電荷でつくられる電場だけを対象としている時は、常にこの条件を満たしている。しかし、この授業の後半で説明する電磁誘導の法則は、この条件を破る法則になっている。つまり、磁場が時間的に変化するようなときには、電位はうまく定義できない。電位の概念は、磁場が関係する時には拡張されなければならない。

46−50 ページ
電位が与えられた時、電場を求める。

46 ページ
電位はスカラー関数、電場はベクトル関数である。一点で、それぞれスカラーとベクトルを与えるので、持っている情報量は 3 倍違っているように思われるが、45 ページで示した、電位がスカラー関数として定義できる場合、電位から電場を求めることができる。45 ページの条件を満たす電場の持つ情報量は強く制限されている。

わずかに離れた 2 点の電位差は、38 ページ、あるいは、44 ページの一つの分割の電位差を求めるしかた、 $\vec{E}\cdot\Delta\vec{s}$ のように書くことができる。しかし、スカラー関数の電位が与えられている場合には 2 点間の電位の差 $\Delta V = V(\vec{r}+\Delta\vec{s}) - V(\vec{r})$ のように計算することもできる。

47−48 ページ
数学的に $\Delta V = V(\vec{r}+\Delta\vec{s}) - V(\vec{r})$ を偏微分で計算する方法。

49 ページ
わずかに離れた電位差を計算した $\vec{E}\cdot\Delta\vec{s}$ と $\Delta V = V(\vec{r}+\Delta\vec{s}) - V(\vec{r})$ を成分表示で計算して比較すると、電位から電場を求める方法になっている。

50 ページ
49 ページのような計算はいつも微分計算のセットになっているので、これらをまとめて記述する方法の紹介。このような、計算方法を表現したものを演算子とよぶ。