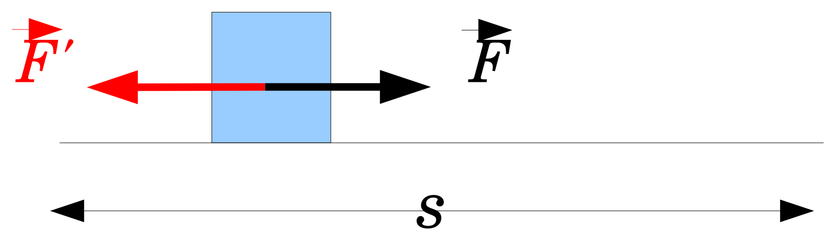
電場と電位

力と仕事の復習

仕事の定義: $U = F \cdot s$

[仕事]=[移動をなすための力]・[移動した距離]　であるが、

=ー[移動を妨げる力]・[移動した距離]　とも書ける。



力の方向と移動する方向が一直線上に無い時は、ベクトルの内積で表す。

$$U = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

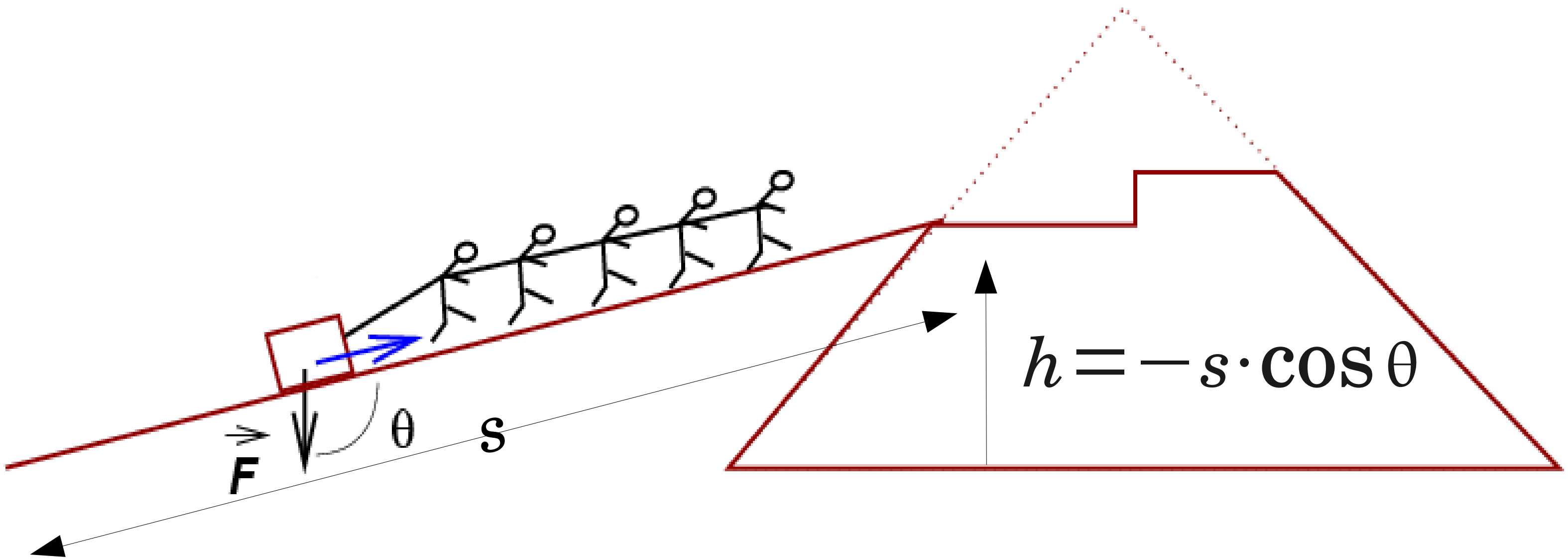
$$U = -\vec{F}' \cdot \vec{S}$$（$\vec{F}'$は移動を妨げる力）

位置エネルギー

物を持ち上げるために必要な仕事は、持ち上げる高さに比例する
＝＞位置エネルギーとして、蓄えられる。

$$U = -F_g \cdot s \cdot \cos\theta = -\vec{F}_g \cdot \vec{s}$$

重力は下向き、かつθは重力と力のなす角



注意、符号に注意。

重力は移動を妨げる力　＝＞　重力に“-”符号が付く。

電位差：電場の中で、電荷の位置エネルギーを考える時の「高さ」

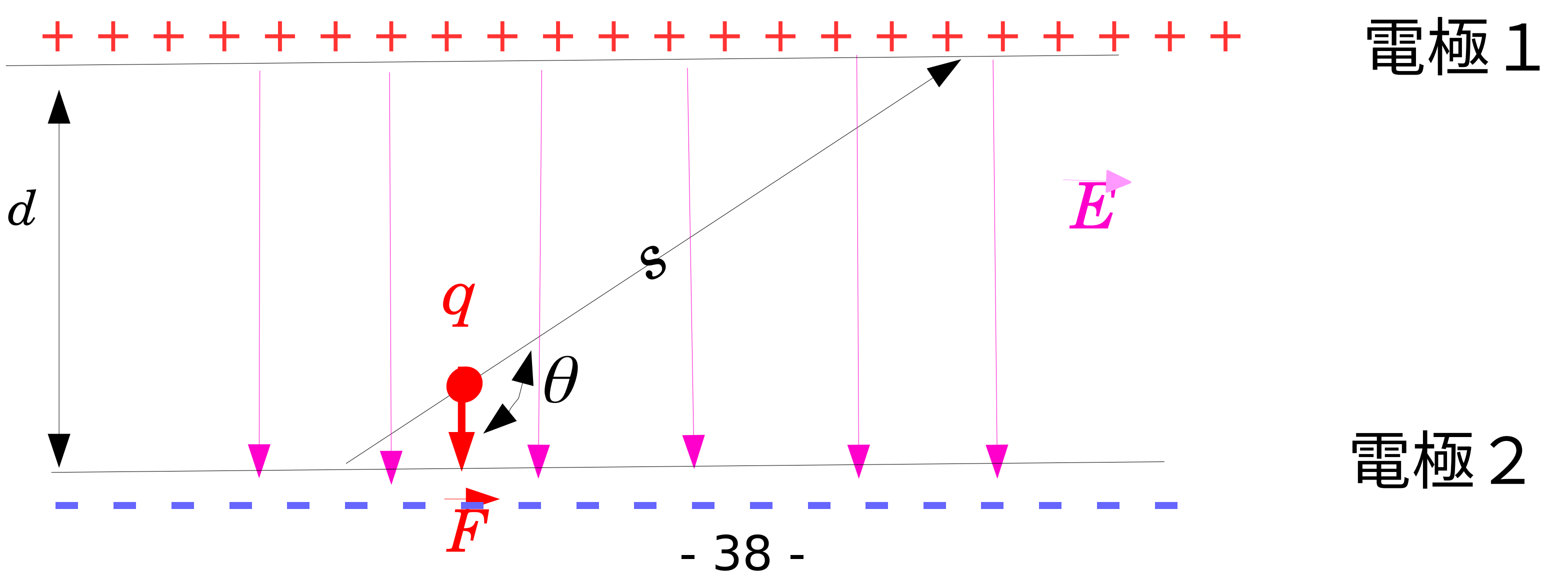
２つの平面が距離 d 離れて平行に置かれ、コンデンサーの電極を成している。

＋の電極から－の電極へ向かい $\vec{E}$ の電場がつくられている場合、+q の電荷を－の極板から、＋の極板まで移動させるのに必要な仕事(＝電荷の得る位置エネルギー)は、

$$U=-\vec{F}\cdot\vec{s}=-q\left(\vec{E}\cdot\vec{s}\right)=-q\cdot E\cdot s\cos\theta=q\cdot E\cdot d$$

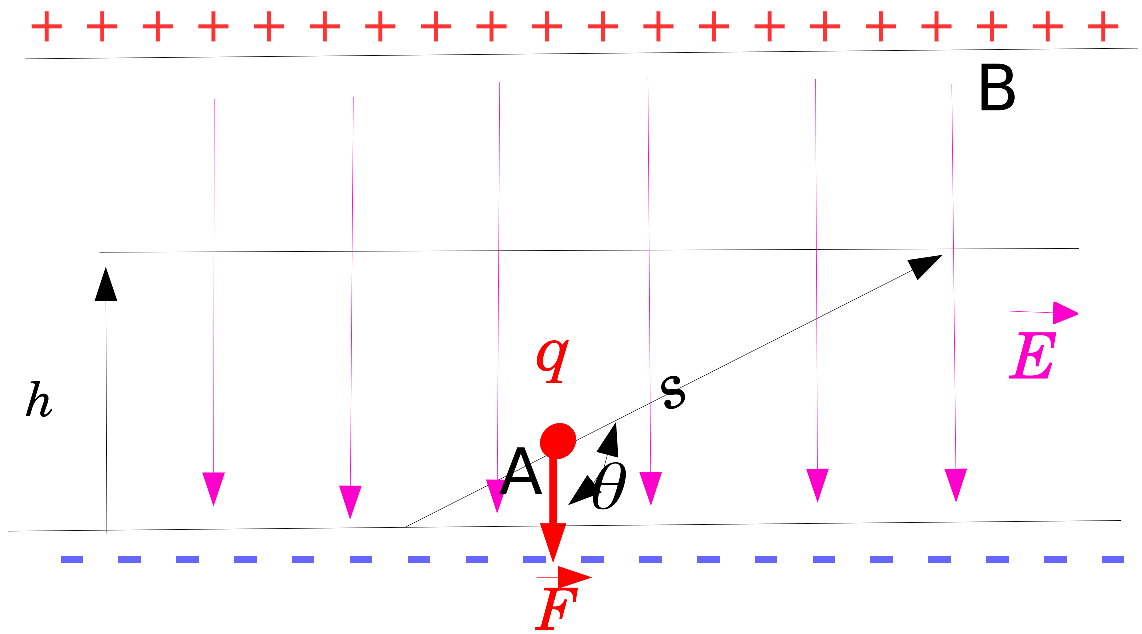
つまり、仕事は動かす電荷の大きさと、 $E\cdot d$ （[電場の強さ] x [極板間の距離] ）の積で決まる。 この必要な仕事を計算する時の電荷の係数となる $\Delta V\equiv E\cdot d$ を、二つの電極の電位差と呼ぶ。

＝＞電位差は、重力場で、位置エネルギーを計算する高さに対応する。



等電位面

ある点からの電位差が一定である平面を等電位面とよぶ。
コンデンサーの極板も等電位面である。



平行板コンデンサーの場合極板に平行な平面は等電位面になる。

一の極板から、平行な平面へ電荷を移動させる時も、必要な仕事は、
この平面までの距離hを使って、

$$U = -\vec{F}\cdot\vec{s} = -q\left(\vec{E}\cdot\vec{s}\right) = -q\cdot E\cdot s\cos\theta = q\cdot E\cdot h$$

と書け、この平面の一極板からの電位差は $\Delta V = E\cdot h$ である。

実際のコンデンサーで、電位差の近似式は、

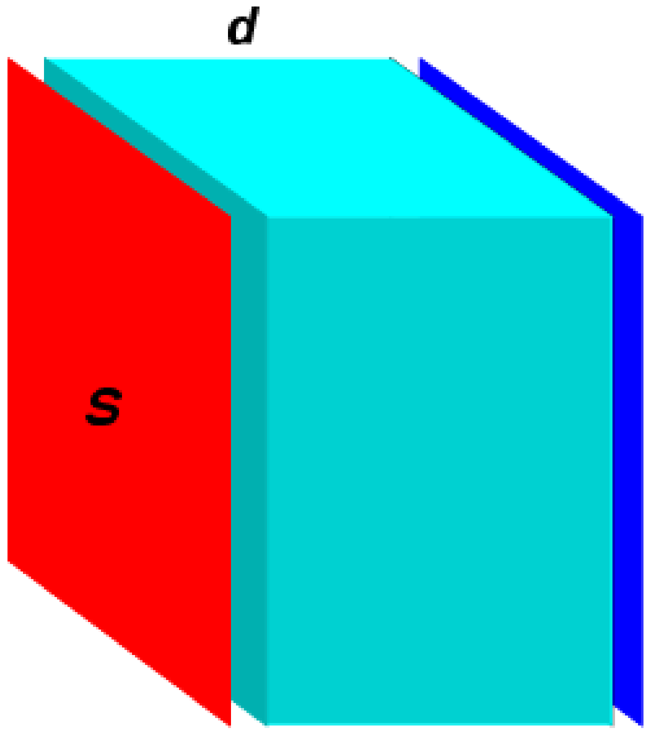
$$V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d$$ となるが

電荷と電位差の関係 $$V = \frac{d}{\varepsilon_0 S} Q$$ を

$$Q = \boxed{\frac{\varepsilon_0 S}{d}} V$$ と書いて、

電位差と電荷の比例定数

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$ を、



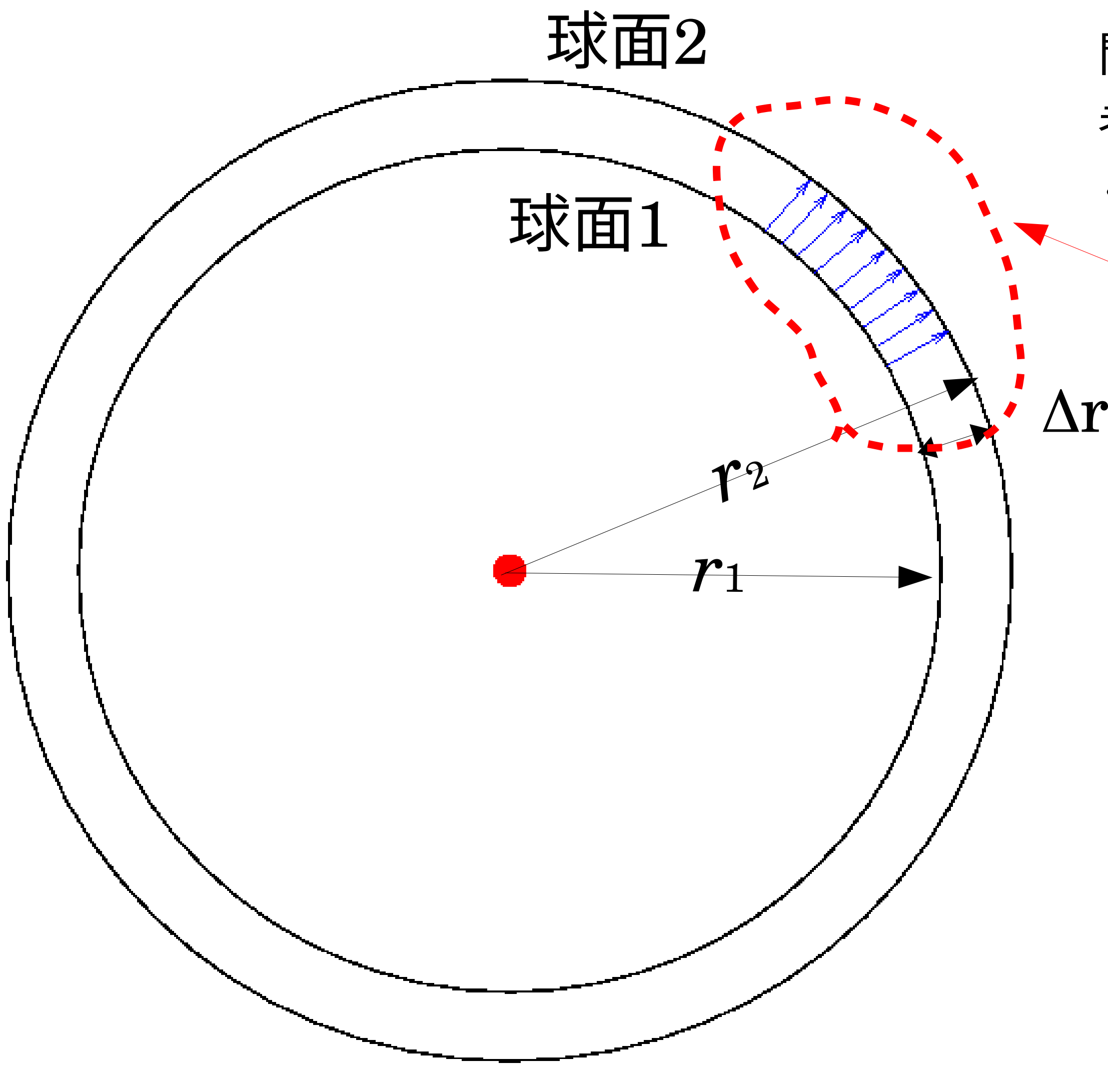
コンデンサーの容量と呼ぶ。

実際のコンデンサーは電荷を蓄える装置として利用される。
また、思考実験の装置としても、重要。

一個の電荷の作る電場（クーロン場）の電位

電荷を中心とした球面対称性＝＞電荷を中心とする球面が等電位面

間隔の狭い２つの電荷を中心とする球面(等電位面)の電位差



間隔は十分狭く、電場は一様、また考える球の表面も平面で近似できるぐらい狭い範囲で考え、

３７、３８ページの議論を適用

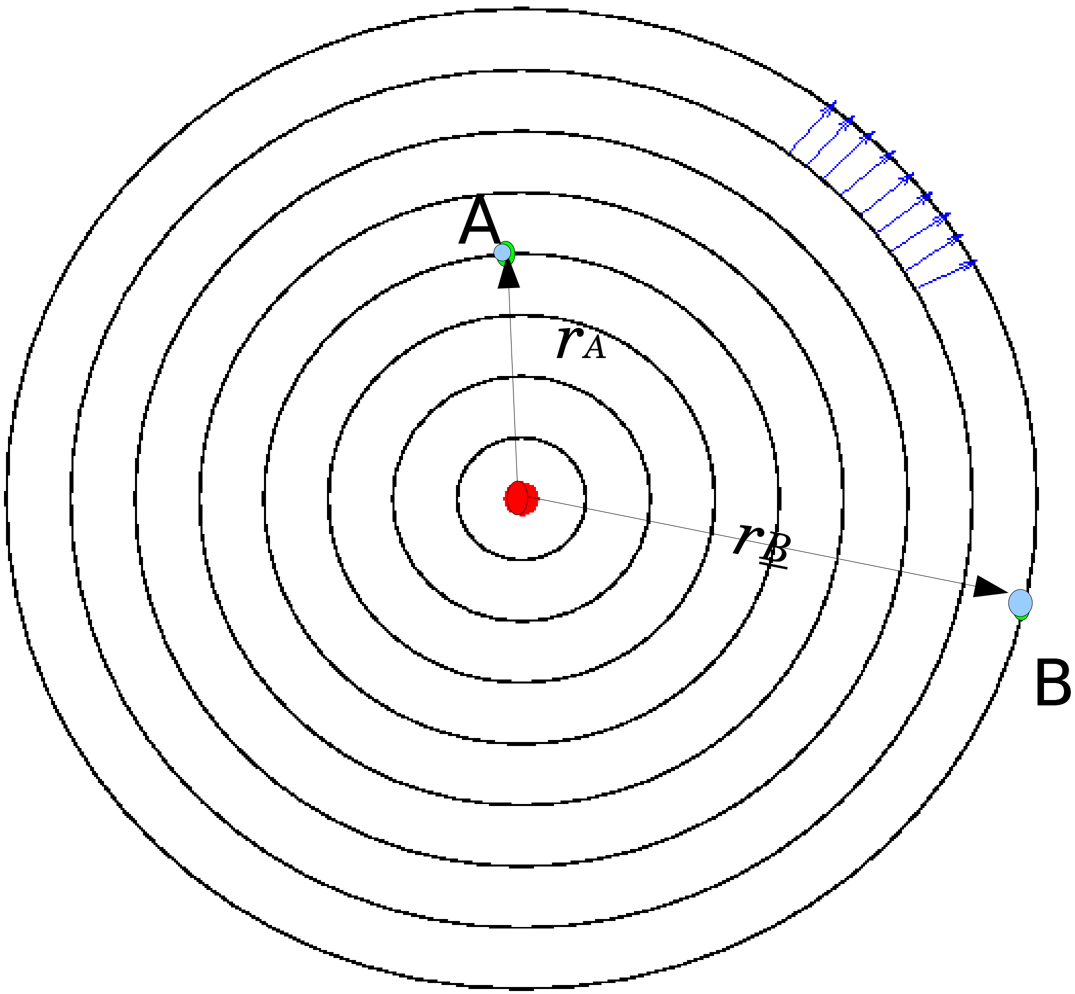
球面1と球面2の電位差

$$\Delta V = -E \cdot \Delta r$$

$$\simeq -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\Delta r$$

一個の電荷の作る電場（クーロン場）の電位差

任意の２点間(AとB)の電位差 ΔV



$r=r_A$ から $r=r_B$ まで、

$$\Delta V_i = -E_i \cdot \Delta r_i \simeq -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\Delta r_i$$

を足し合わせる。

$$\Delta V_{AB} = \sum_i \Delta V_i \simeq -\sum_i \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i^2}\Delta r_i \simeq -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr$$

結局　$\mathbf{r}_a$ と $\mathbf{r}_b$ の電位差は、

$$\Delta V_{A,B} = -\left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_b} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

と書ける。

位置の関数　$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|} + C(\text{定数})$　を導入すると、

$$\Delta V_{A,B}(\vec{r}) = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A)$$

と、書ける事に注意。これを基準点をAとした、B点の電位と呼ぶこともある。
なお、クーロン場では、無限遠を基準点として、C(定数)=0とした、

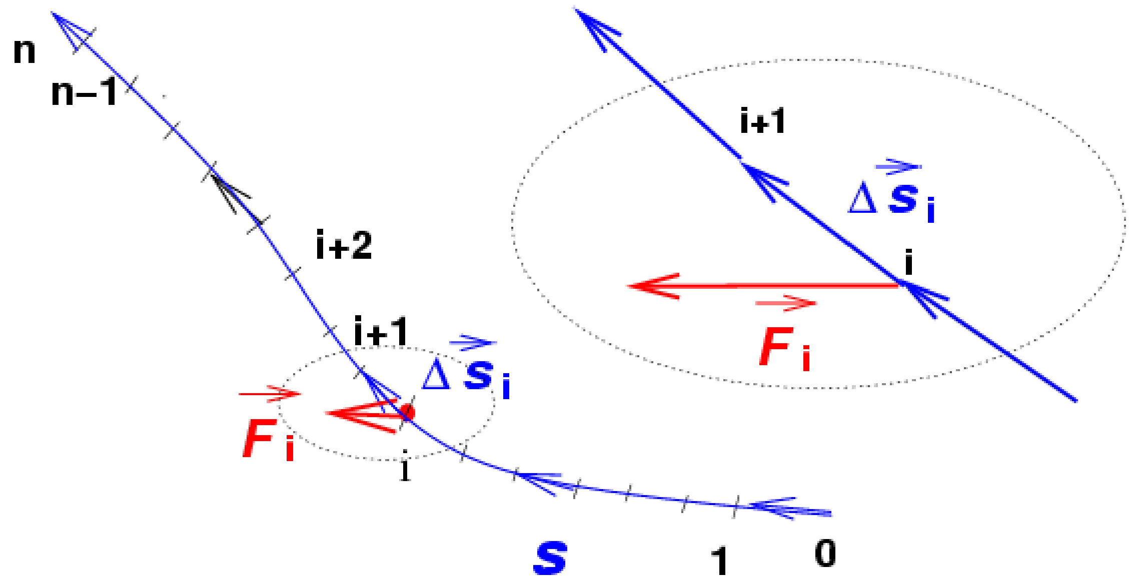
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

を、電位とすることができる。

注意、クーロン場以外では、いつも無限遠を基準と取れるわけでは無い

一般的な曲線にそって結ばれる２点の電位差

＝＞ 分割して個々の電位差の和



$$V \simeq -\left(\vec{E}_0 \cdot \Delta \vec{s}_0 + \ldots \boxed{+ \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i +} \ldots + \vec{E}_n \cdot \Delta \vec{s}_n\right)$$

曲線の分割上の仕事

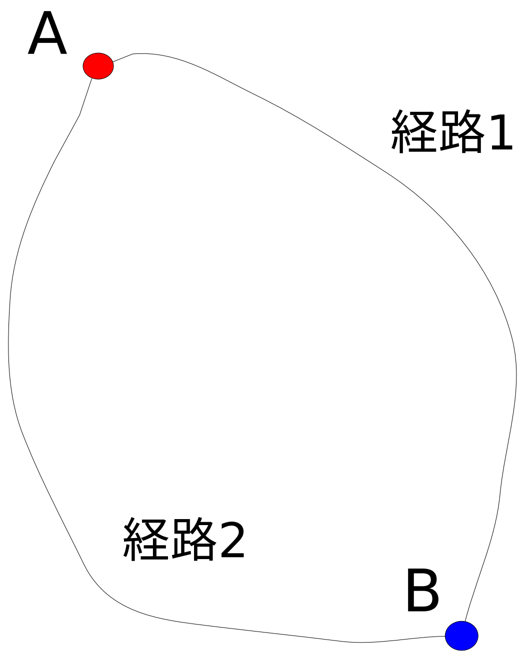
$$= -\sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i \simeq -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

線を分割するから、線積分

従って、$\vec{r}_0$ から $\vec{r}_n$ まで、電荷qを移動させるときの仕事は

$$U \simeq -q \cdot \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i \simeq -q \cdot \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

V_{AB} が計算出来て、一つの値に定まるためには、



$$\left[\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{\text{経路1}} = \left[\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{\text{経路2}}$$

$$\left[\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{\text{経路1}} = -\left[\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{\text{経路2(逆向き)}}$$

$$\left[\oint_B^B \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{\text{経路1から 経路2(逆向き)}} = 0$$

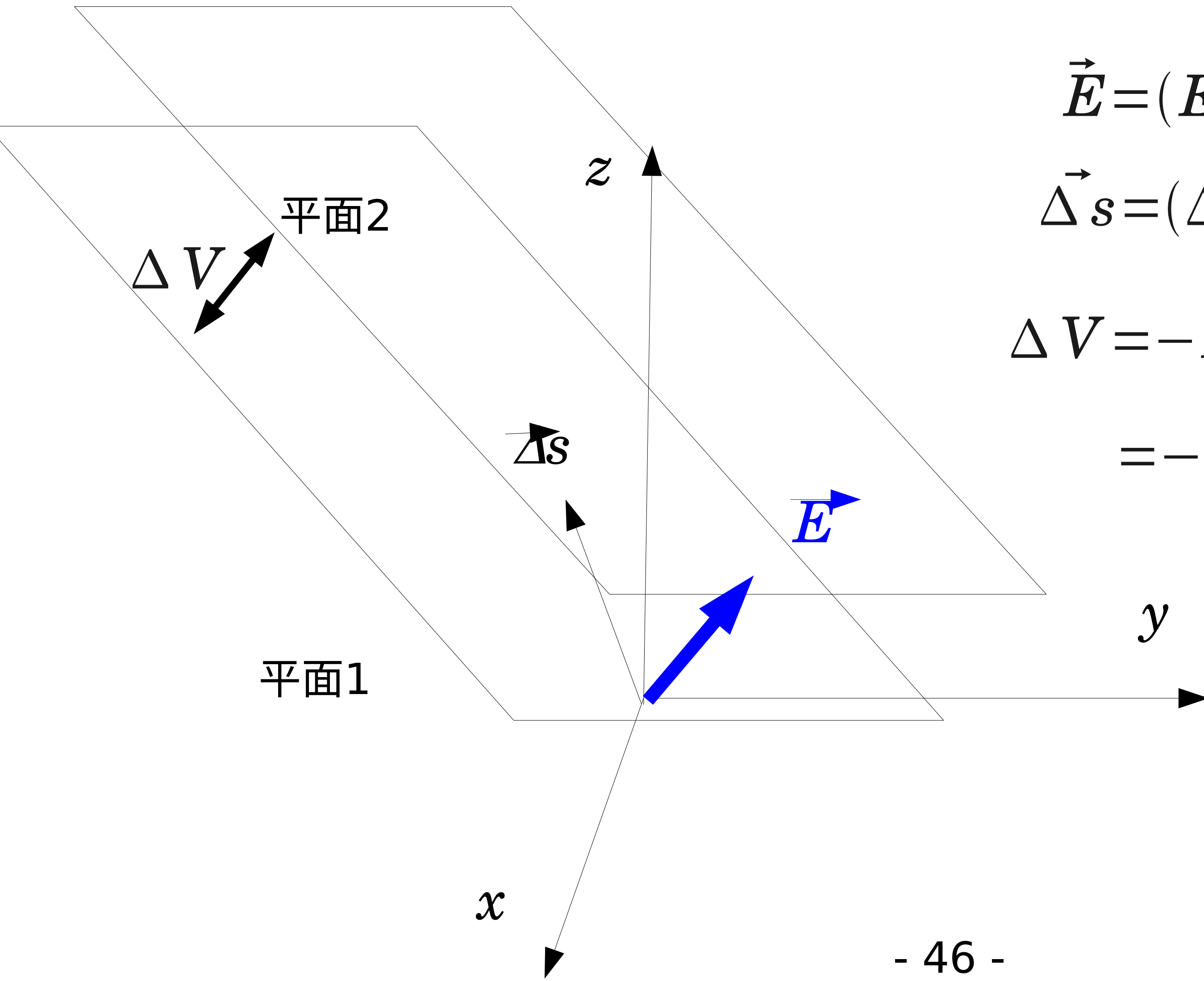
つまり、 $\oint_B^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$ が必要十分条件

クーロン場はこれを満たしている。

電位から電場を求める。

電位差の2つの計算の比較

A. **電場と距離ベクトルの内積** (座表を用いた、3次元的イメージ)



$$\vec{E}=(E_x, E_y, E_z)$$

$$\vec{\Delta s}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$\Delta V=-\vec{E}\cdot\vec{\Delta s}$$

$$=-(E_x\cdot\Delta x+E_y\cdot\Delta y+E_z\cdot\Delta z)$$

B, 電位が位置の関数として与えられているとして、

x, y, z それぞれ$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ だけ変化するとき、$V(x,y,z)$ の変化は、

$$\Delta V = V(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - V(x, y, z)$$

$$= V(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) \boxed{- V(x+\Delta x, y+\Delta y, z)}$$

$$\boxed{+ V(x+\Delta x, y+\Delta y, z)} \boxed{- V(x+\Delta x, y, z)}$$

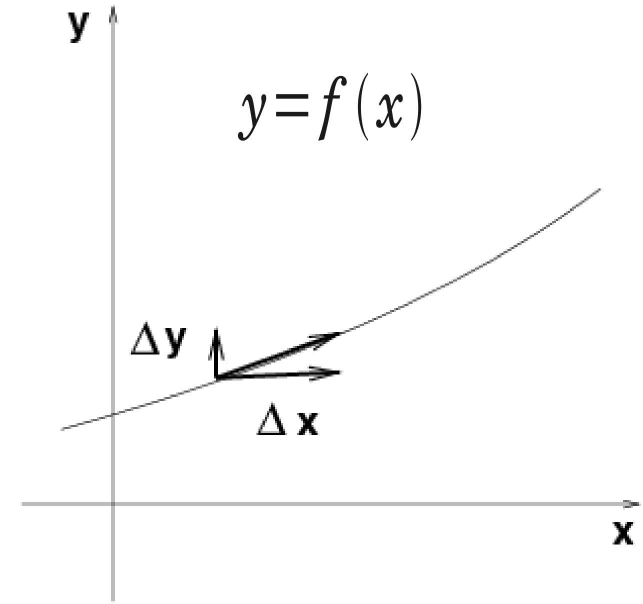
$$\boxed{+ V(x+\Delta x, y, z)} - V(x, y, z)$$

変化する変数が一つだけになるよう、分解して差をとる。

$$\simeq \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z)\cdot\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}(x+\Delta x, y, z)\cdot\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\cdot\Delta z$$

$$\boxed{\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z}$$

微分：物理では、小さい量の比(割り算)。



$$f'(x)=\frac{df}{dx}\simeq\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)\simeq\frac{df}{dx}\cdot\Delta x\ \left(=f'(x)\cdot\Delta x\right)$$

偏微分は、他の変数を定数の様に扱う。

$$\frac{\partial V}{\partial x}\simeq\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}=\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

x による偏微分

$$\Delta V=V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)\simeq\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\Delta x$$

A, B を比較

$$\Delta V = -\vec{E}\cdot\vec{\Delta s}$$

A, 電磁場のイメージ

$$= -(\boxed{E_x}\cdot\Delta x + \boxed{E_y}\cdot\Delta y + \boxed{E_z}\cdot\Delta z)$$

$$\Delta V \simeq \boxed{\frac{\partial V}{\partial x}}\Delta x + \boxed{\frac{\partial V}{\partial y}}\Delta y + \boxed{\frac{\partial V}{\partial z}}\Delta z$$

B, 偏微分の性質

すなわち、

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad \left(\simeq -\left(\frac{\Delta V}{\Delta x}, \frac{\Delta V}{\Delta y}, \frac{\Delta V}{\Delta z}\right)\right)$$

この表現、

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad \left(\simeq -\left(\frac{\Delta V}{\Delta x}, \frac{\Delta V}{\Delta y}, \frac{\Delta V}{\Delta z}\right)\right)$$

については、「ベクトル解析」で使われる記号があり、

$\vec{E} =$ **-grad** V または、

$\vec{E} = -\nabla V$ と書かれ、V の勾配と呼ぶ。

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

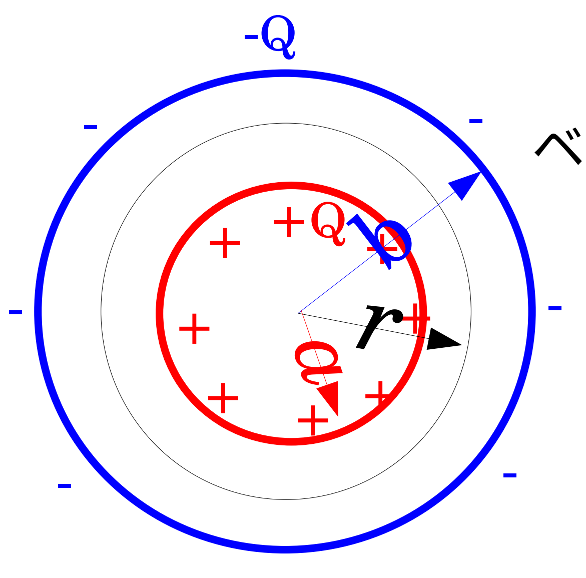
この記号は、
ナブラと呼ばれるベクトル・微分演算子である。

今日の問題：球形コンデンサーの極板の電位差

下図の様な、半径aとbの、2つの同心球で構成する球形コンデンサーにおいては、
電場は次のように書ける。

電場の大きさは、

$$E=\begin{cases} 0 & (b\leq r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (a\leq r<b) \\ 0 & (r<a) \end{cases}$$



ベクトルで書いて、

$$\vec{E}=\begin{cases} 0 & (b\leq r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & (a\leq r<b) \\ 0 & (r<a) \end{cases}$$

二つの極板の電位差を求めよ。

ヒント、４２ページのクーロン電場に対する考察を、
そのまま使うことが出来る。