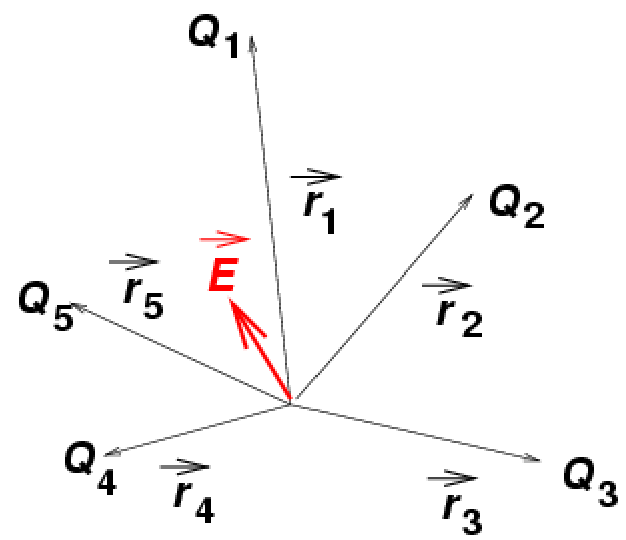
多数の電荷の作る電場 (重ね合わせの原理)



$\vec{r}_{\mathrm{i}}$ を、電場を求める点から各電荷までのベクトルとして

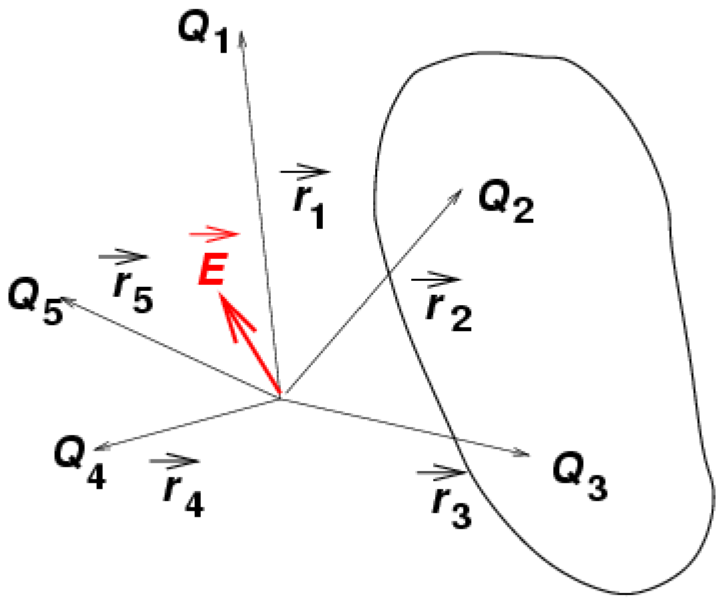
$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = -\sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{r}_i}{r_i^2}$$

（この式では、電荷を求めたい点を原点にしているので、１７ページの式とは符合が反対になる。）

つまり、原理的には、どんな電荷分布でも、(メチャクチャ時間を掛かければ) 計算できる。

でも、ガウスの法則を使うと、あっという間に計算できる場合がある。

多数の電荷がある場合の、ガウスの法則



$$\varepsilon_0 \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS = Q \qquad \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS = 0$$

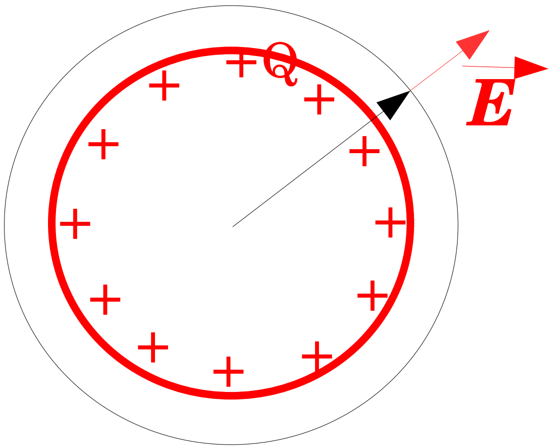
閉曲面の内側　　　　　閉曲面の外側

それぞれ和をとれば、

$$\varepsilon_0 \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS = \sum_{\text{内側にある電荷}} Q$$

特に重要な２つの場合

球面上に一様に電荷が分布した場合

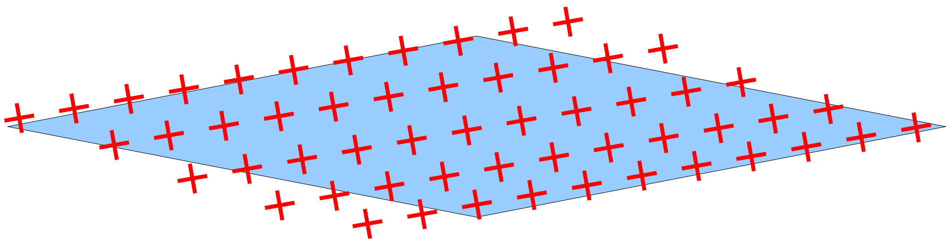


球対称性（クーロン場で既に使った）

同じ中心を持つ球面を一つとると、その球面上どこでも $\vec{E}$ の大きさは同じ。

$\vec{r}$ を中心から引いたベクトルとする時、同じ球面上の点では、$\vec{E}, \vec{r}\,(\hat{r}), \hat{n}$ は全部同じ方向のベクトル

（無限に）広い平面に一様に分布する場合



並進対称性

平面に平行な移動で状態が変わらない。

- 平行移動で電場の強さが変わらない。
  ばかりでなく、
- 電場の向きは平面に垂直、
- 平面からの距離で電場の強さが変わらない、

なども結論できる。

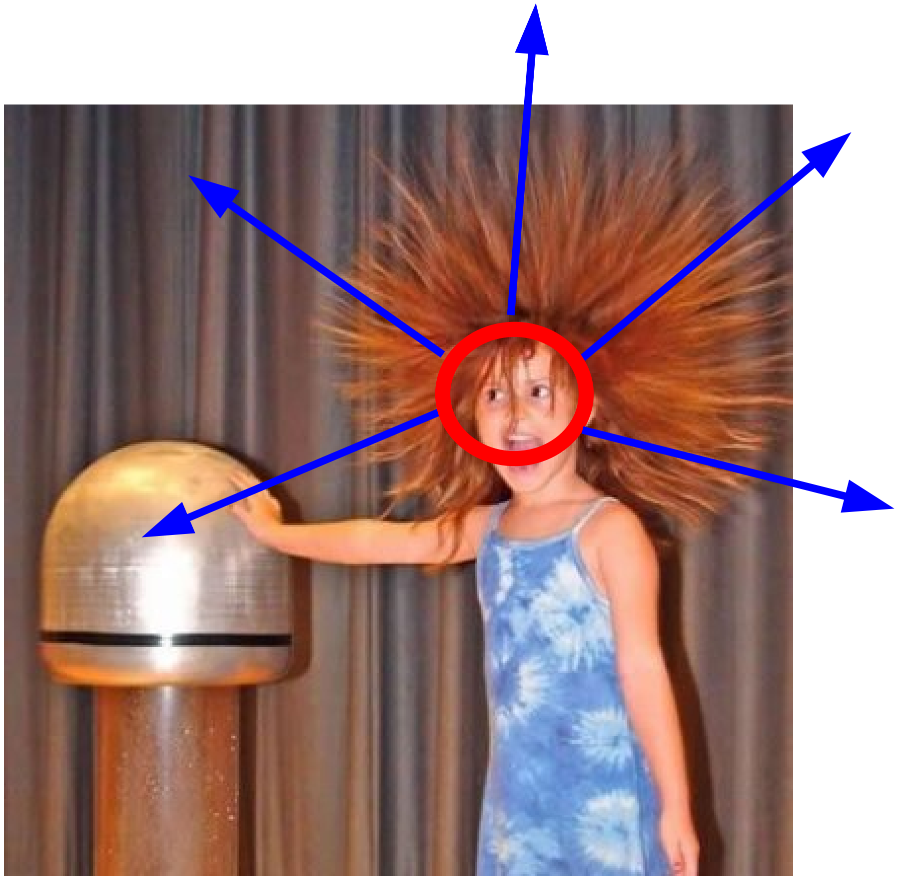
鏡面対称性

上下ひっくり返しても状態は変わらない。

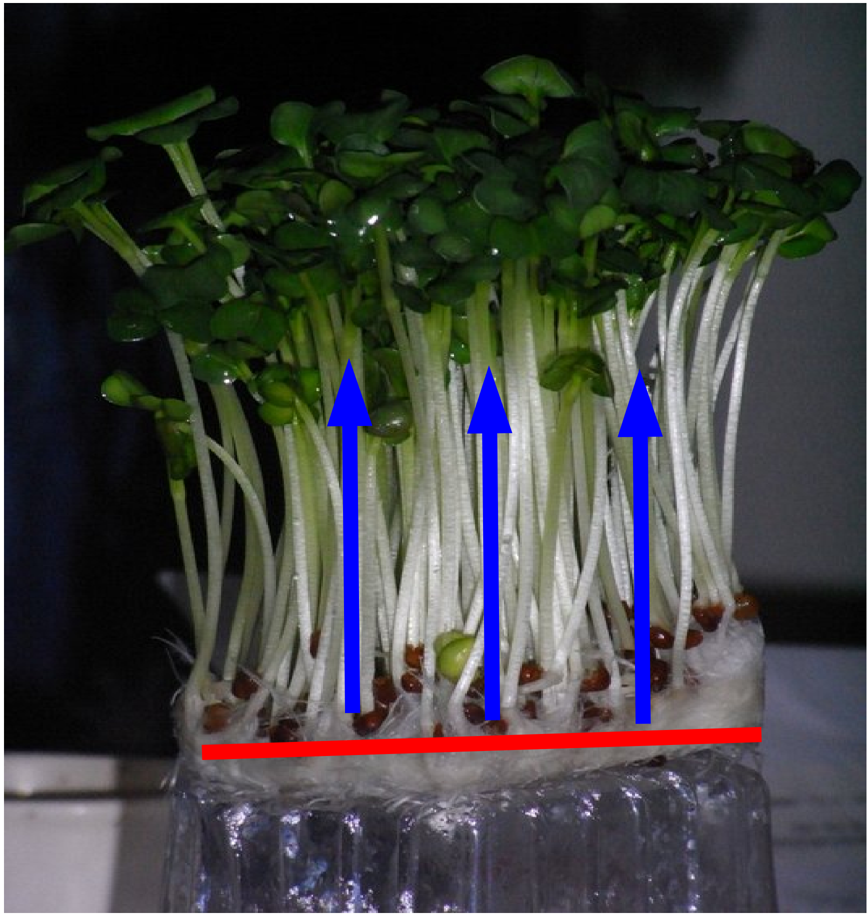
このような対称性に注目して、活用する。

一般の場合でも、近似的には

- 球対称の場合に近いと考えられる場合と、
- 平面に分布するとして考えられる場合が多い。



http://www.tamabi.ac.jp/idd/shiro/electricity/elektriciteit.html
よりコピー



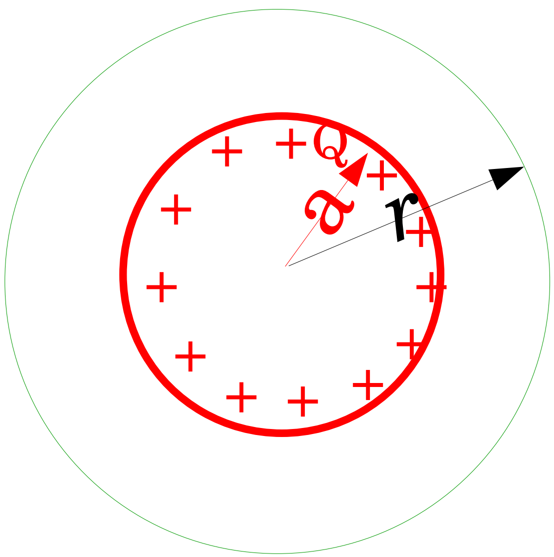
半径aの球面上に一様に計Qの電荷が分布する場合(1)

（クーロン電場の計算と共通点が多い）

球対称性をフル活用。

もうひとつ、同じ中心をもつ球を考え、この球面上で

ガウスの法則を考える。ガウスの法則は



$$\varepsilon_0 \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS = \sum_{\text{内側にある電荷}} Q$$

であるが、

左辺はいつも $\varepsilon_0 \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS = \varepsilon_0 4\pi r^2 \cdot E$

かつ、

$\vec{E}$、$\vec{r}$、$\hat{n}$ は全部同じ方向のベクトル。

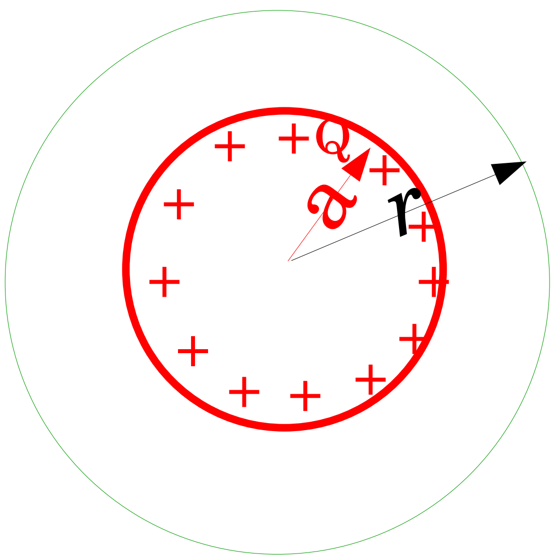
従って、右辺 $\sum_{\text{内側にある電荷}} Q$ の評価が

ポイント

半径aの球面上に一様に計Qの電荷が分布する場合(2)

半径 r の球の内部の電荷を評価すると、

$$\sum_{\text{内部}} Q = \begin{cases} Q & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$



前のページのガウスの法則の左辺の計算を使って、

$$\varepsilon_0 4\pi r^2 \cdot E = \begin{cases} Q & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

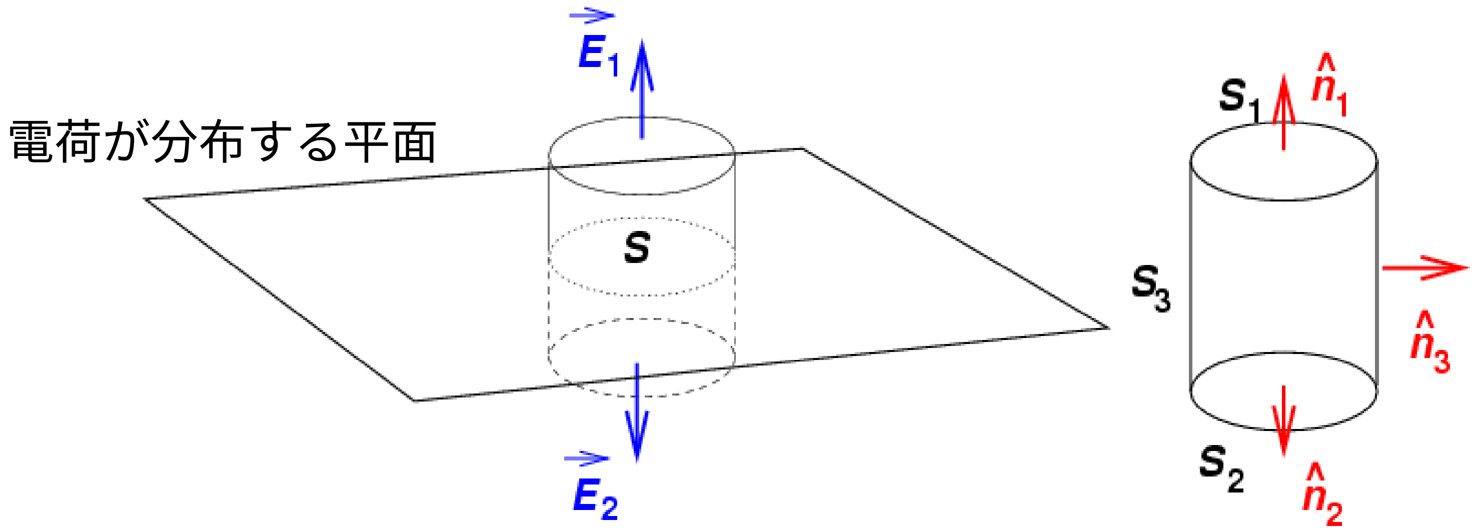
以上より、
電場の大きさは、$E = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$

ベクトルで書いて、

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & (r > a) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

（無限に）広い平面に一様に電荷が分布する場合

ガウスの法則を応用する閉曲面の選び方



S_1, S_2 : 電場に垂直な面　=> 電場 // $\hat{n}$

この上の面積分は　$E \cdot S$

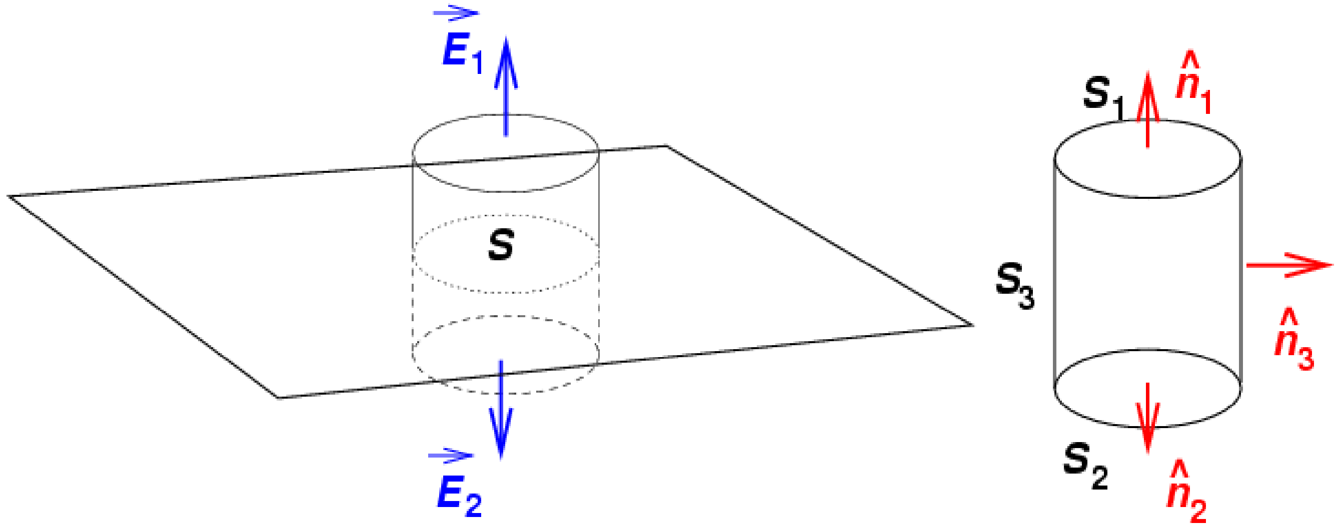
(電場の強さと面の面積の積)

S_3　: 電場に平行な面 => 電場　⊥　$\hat{n}$

この上の面積分は　0 (ゼロ)

この２種類だけで、閉曲面を構成する。

前のページで選んだ閉曲面に、ガウスの法則を応用する



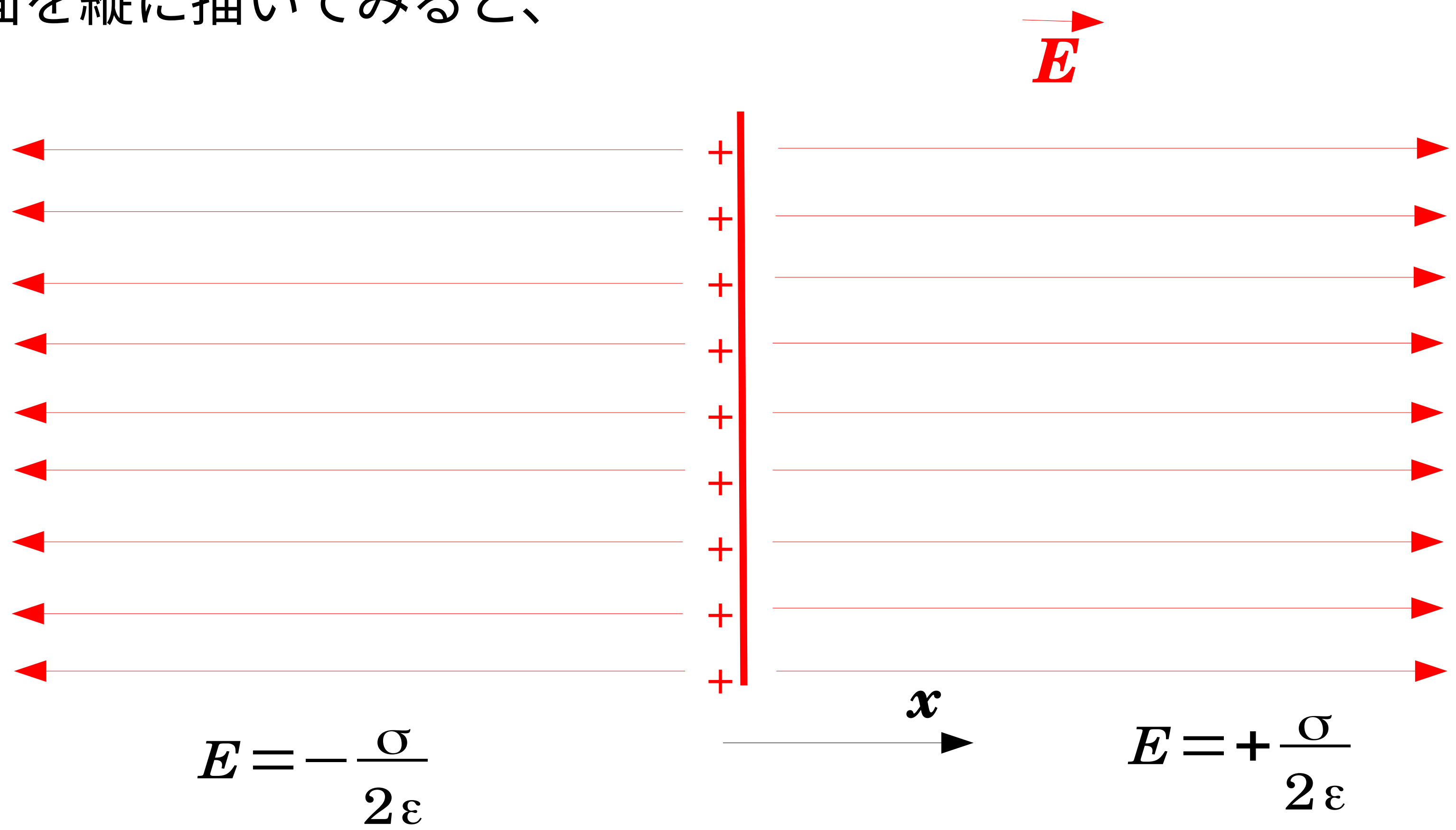
ガウスの法則、$\varepsilon_0\int_S(\vec{E}\cdot\hat{n})dS=\sum_{\text{内側にある電荷}}Q$ の面積積分をを各面で分割して、

$$\varepsilon_0\left(\underbrace{\int_{S1}\vec{E}_1\cdot\hat{n}_1\,dS}_{E\ \cdot\ S1}+\underbrace{\int_{S1}\vec{E}_2\cdot\hat{n}_2\,dS}_{E\ \cdot\ S2}+\underbrace{\int_{S1}\vec{E}_3\cdot\hat{n}_3\,dS}_{0}\right)=\sum_{\text{円筒の内の}}Q$$

$$2E\cdot S=\sum_{\text{円筒の中の}}Q=\sum_{\text{面積}S\text{上の}}Q \qquad (S_1=S_2=S)$$

さらに、電荷の面密度 $\sigma=\dfrac{\sum_{\text{面積}S\text{上の}}Q}{S}$ を用いると $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ となる。

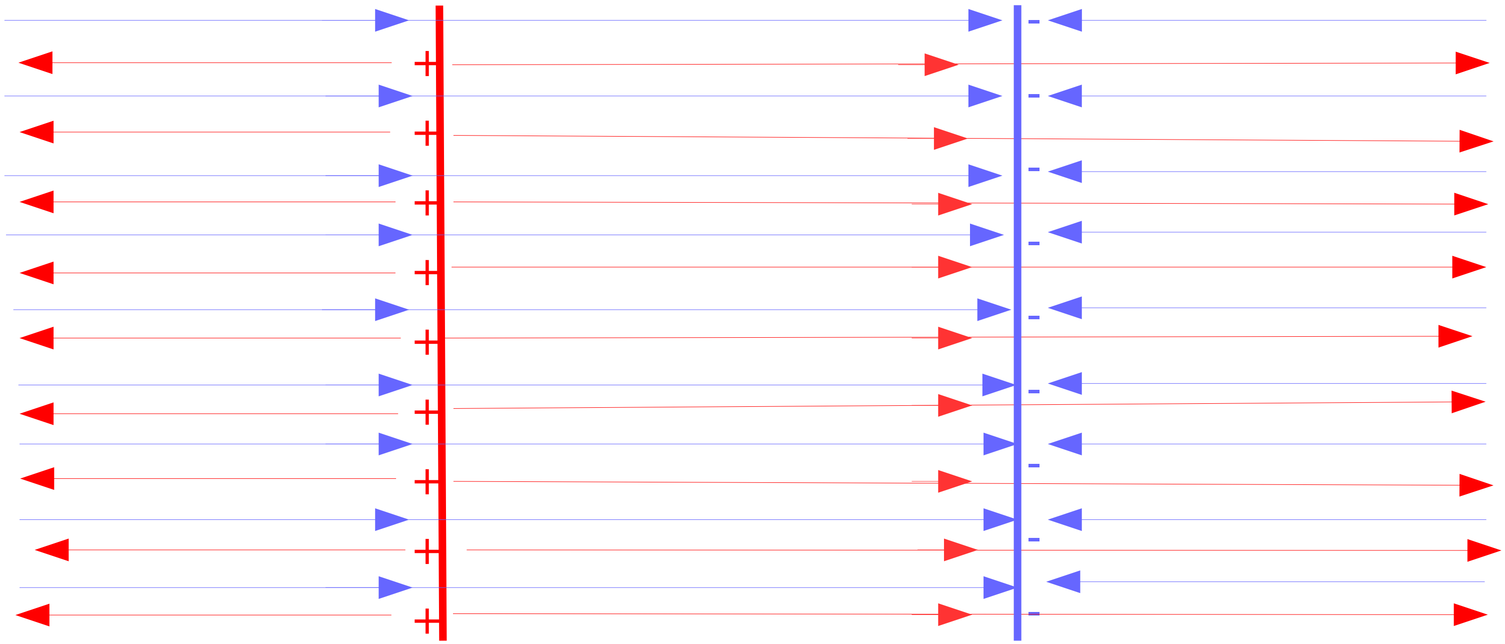
無限に広い平面に一様に電荷が分布する場合,
平面を縦に描いてみると、



こんな感じ。
平面を境にして、電場の大きさは同じだが、方向が変わっている事に注意。
図では、右向きを正として、左向きを負で表している。

もう一枚平行に無限に広い平面があり、そこに反対の符合の電荷が一様に分布する時、それぞれの場所で両方の電場を合成する。

$\vec{E}$ 、$\vec{E}$



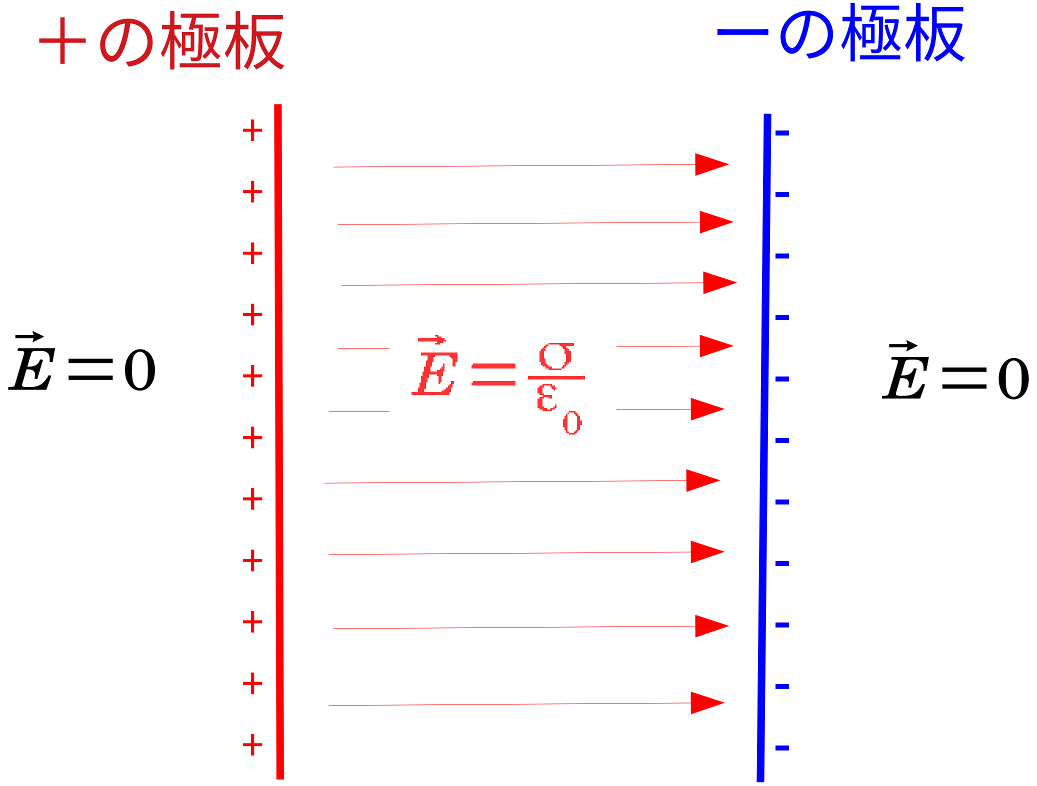
$$E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$
$$= \ 0$$

$$E = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$
$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$E = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$
$$= \ 0$$

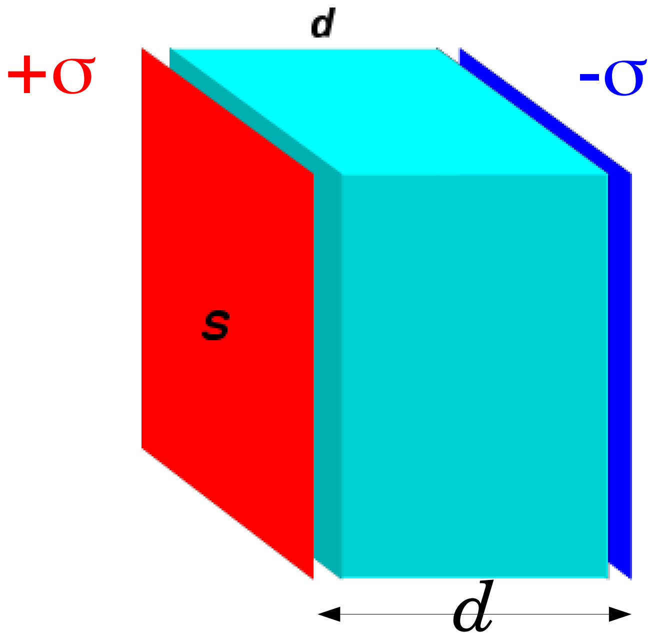
つまり、２つの平行板の中間の領域では両方の電場は強めあい、
それ以外では電場は打ち消しあう。

二つの無限に広い平面が平行に置かれ、それぞれ異なった符合の電荷が一様に分布する時、二つの平面の間だけに電場は存在するるる。



実際に無限に広い平面を持ってくることは出来ないが、十分に平面が広い場合、平面の縁を除くと、この様に電場がつくられると考えられる。このようにして、電場を閉じ込める装置をコンデンサーと呼ぶ。

実際のコンデンサー



それぞれの平面を極板と呼ぶが、その面積 S、極板上の電荷 Q それぞれが有限なので、極板の平均電荷密度 σ を、

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

と計算できる。これを、極板が無限に広い時に得られた関係式、

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

に代入して、極板の面積が十分広い場合に

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

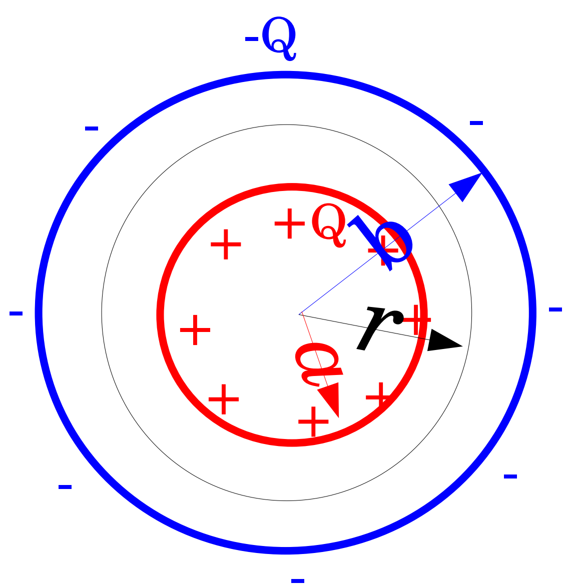
と、実際のコンデンサーの場合に電荷から電場を求めることの出来る、近似式を得る。

今日の問題　　文章と整合するよう、抜けている式の右辺を埋めよ。

半径aとbの、2つの同心球に一様に電荷が分布して、それぞれ合計が
$+Q$, $-Q$（絶対値は等しく、符号が反対）である。この時の電場をガウスの法則

$$\varepsilon_0 \int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dS = \sum_{\text{内側にある電荷}} Q$$

で調べるためには、同じ中心を持つ半径rの球の内部の電荷を、場合分けして評価する。



$$\sum_{\text{内部}} Q = \begin{cases} +Q - Q = 0 & (b \le r) \\ +Q & (a \le r < b) \\ 0 & (r \le a) \end{cases}$$

球対称な場合の面積分を行い、ガウスの法則へ応用すると、

$$\varepsilon_0 4\pi r^2 \cdot E = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

であるので、

電場の大きさは、　　　　　ベクトルで書くと、

$$E = \begin{cases} \\ \\ \end{cases} \qquad \vec{E} = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

となる。