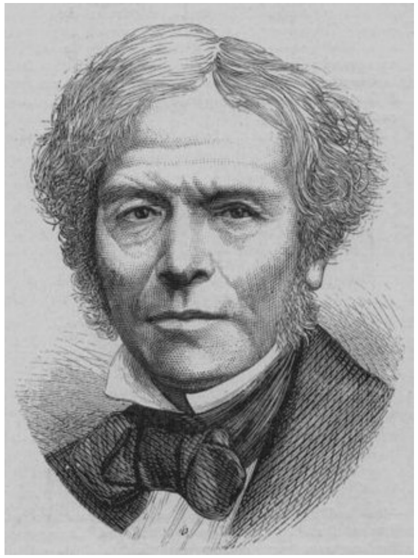
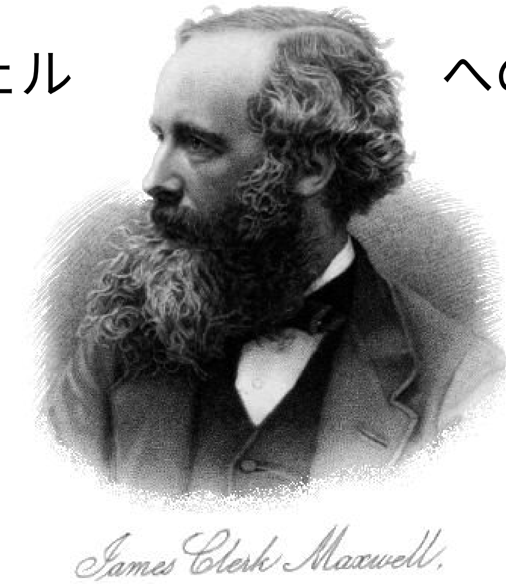
電磁気学基礎論

ファラデー



から、マクスウェル



への手紙

1791-1867

1831-1871

「数学者が物理的な作用の研究にたずさわり、ある結論に到達したとき、それは
普通の言葉を使っても、数式に劣らず不足なく、表現できないものでしょうか。
もし、そういう表現 つまり私たちも実験を通してその研究に参画できるように、
秘密の記号を翻訳した表現ができれば、私などには大変ありがたいのですが。」

二人の大科学者の答え＝電気力線と磁力線

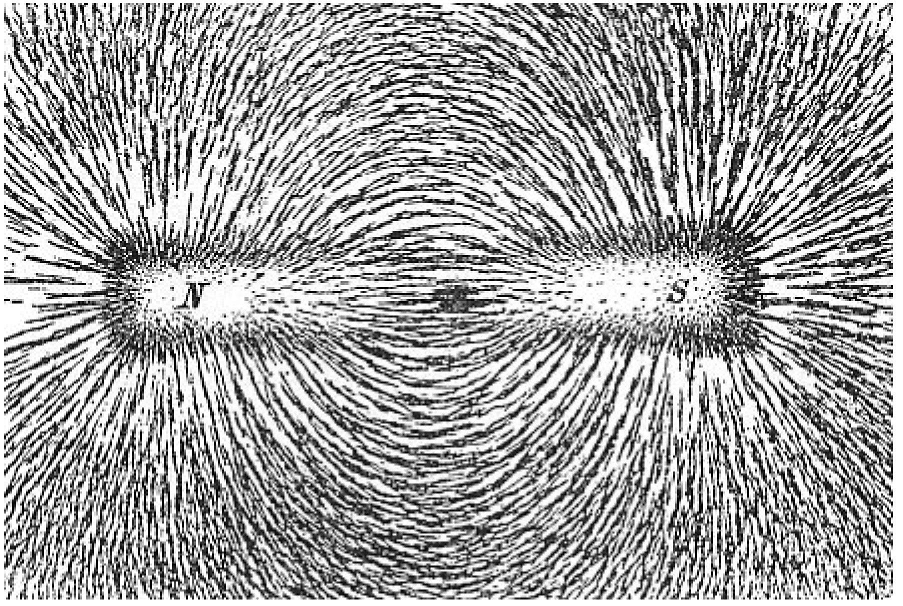
電気力線の可視化　(目に見えるようにする)

http://www.scimuseum.kita.osaka.jp/~saito/job/writing/rep/2001/seidenki.htm

http://karapaia.com/archives/51965391.html

から画像をコピーしました。

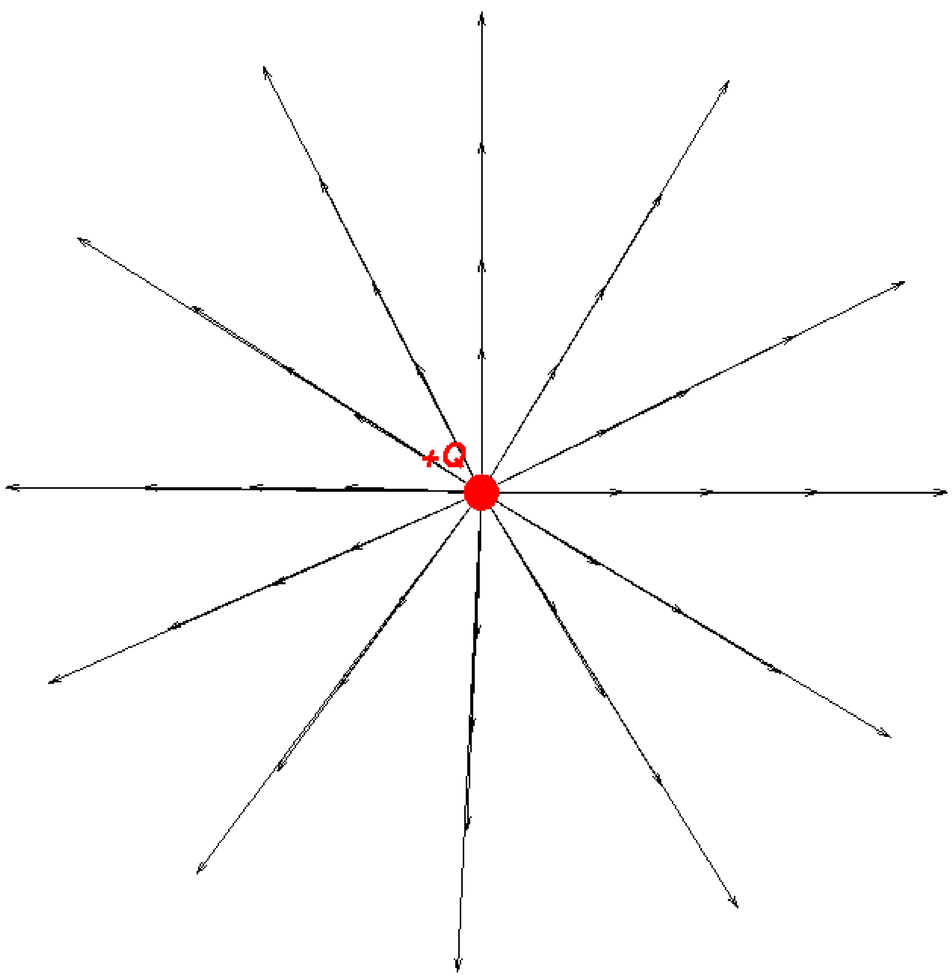
磁力線も、可視化できる。（こっちのほうが有名？）

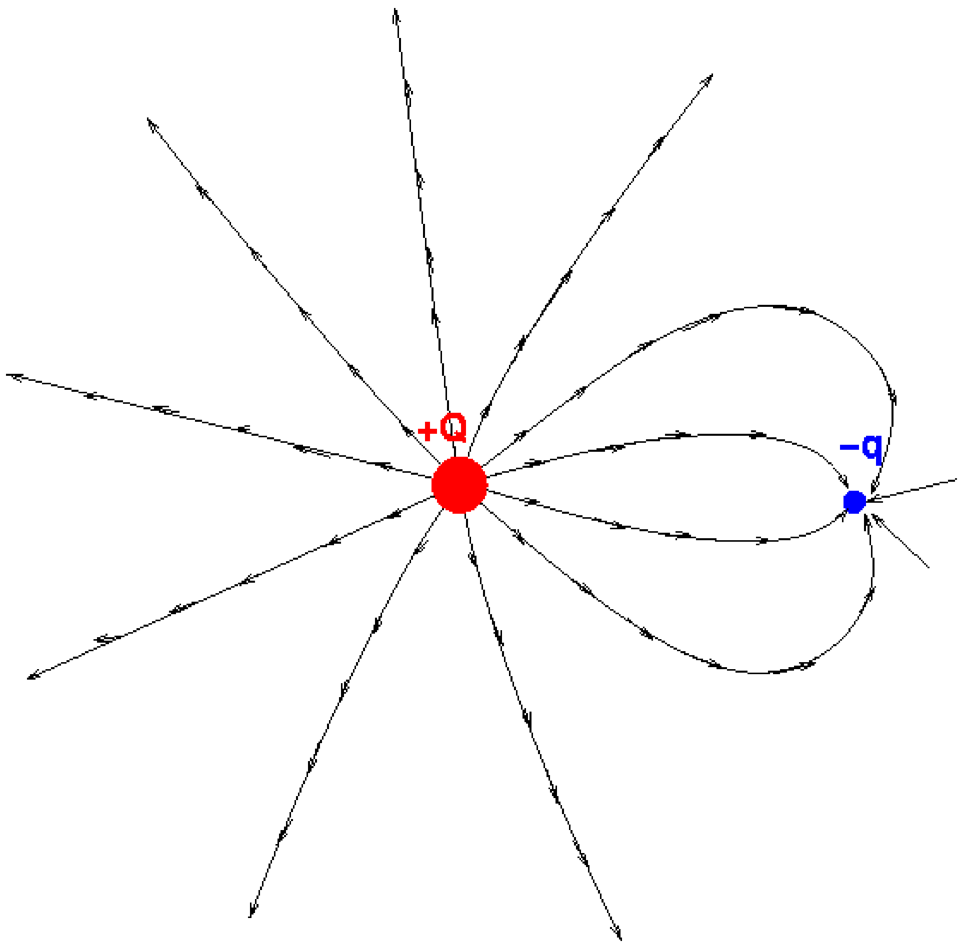


しかし、電荷に相当する「磁荷」は見つかっていない。
この答えは授業の後半で。

この授業の出発点

電荷からは、電気力線が伸ている





単独の電荷の場合は、放射状に

複数の電場では配置によって曲線を描く

•大きさ＋Qの電荷からはQ本の電気力線が伸びている。

線の数は整数のはずだが、十分大きいので実数として取り扱う。
電荷との関係に、比例定数を導入することもできる。

•電気力線は＋の電荷から－の電荷まで、または無限遠まで伸びる。

言い換えると電気力線は＋の電荷と－の電荷をつなぐが、一方が無限遠にある場合もある。

•電気力線が満ちている空間の各点には、電気力線の伸びる方向と同じで、大きさ（強さ）が電気力線の密度と、比例定数$1/\varepsilon_0$で比例する、「電場ベクトル」が存在している。

つまり、「電気力線の密度」＝ε_0×「電場ベクトルの大きさ」

•電場（ベクトル）は、電荷に力を与える。

これについては後で定量的に説明する。

これらを用いて、電（磁）気学を始めよう。

必要な数学の基礎（高校で学ぶ数学の基礎でもある）

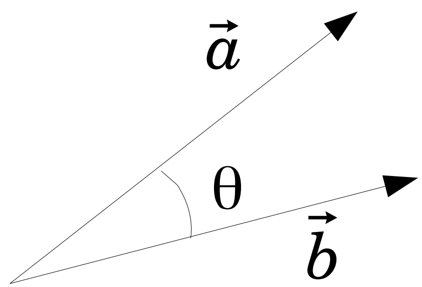
1、ベクトル

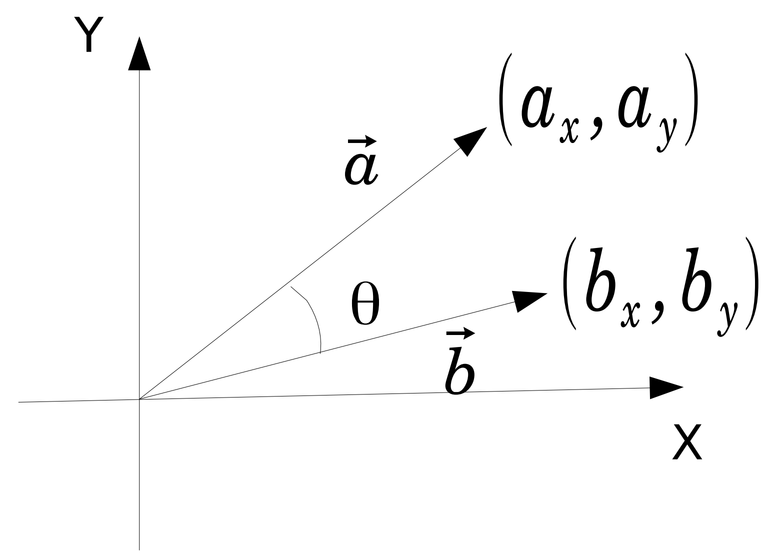
大きさと方向を同時もつ量 <=> スカラー：大きさだけの量

表し方１、図に矢印を描く（大きさを長さ、方向は矢印の方向で表す）

表し方２、１の矢印の始点を座標軸の原点に置いて、終点の座標で表す。

1.1、ベクトルの内積





表し方１では

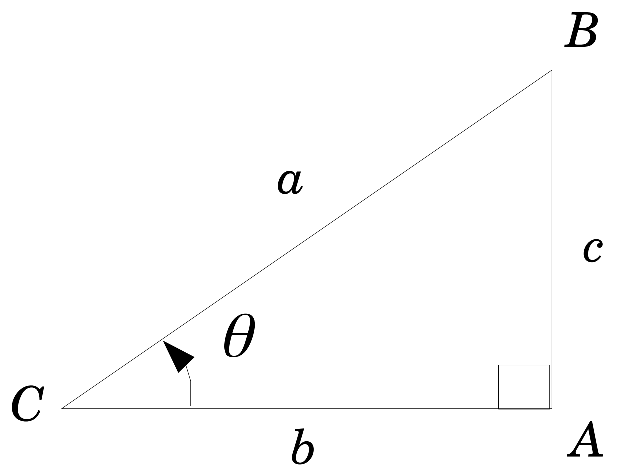
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta$$

$a=|\vec{a}|, b=|\vec{b}|$ を暗黙の了解事項とする。

表し方２では、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+b_y\cdot b_y$$

2, 三角関数

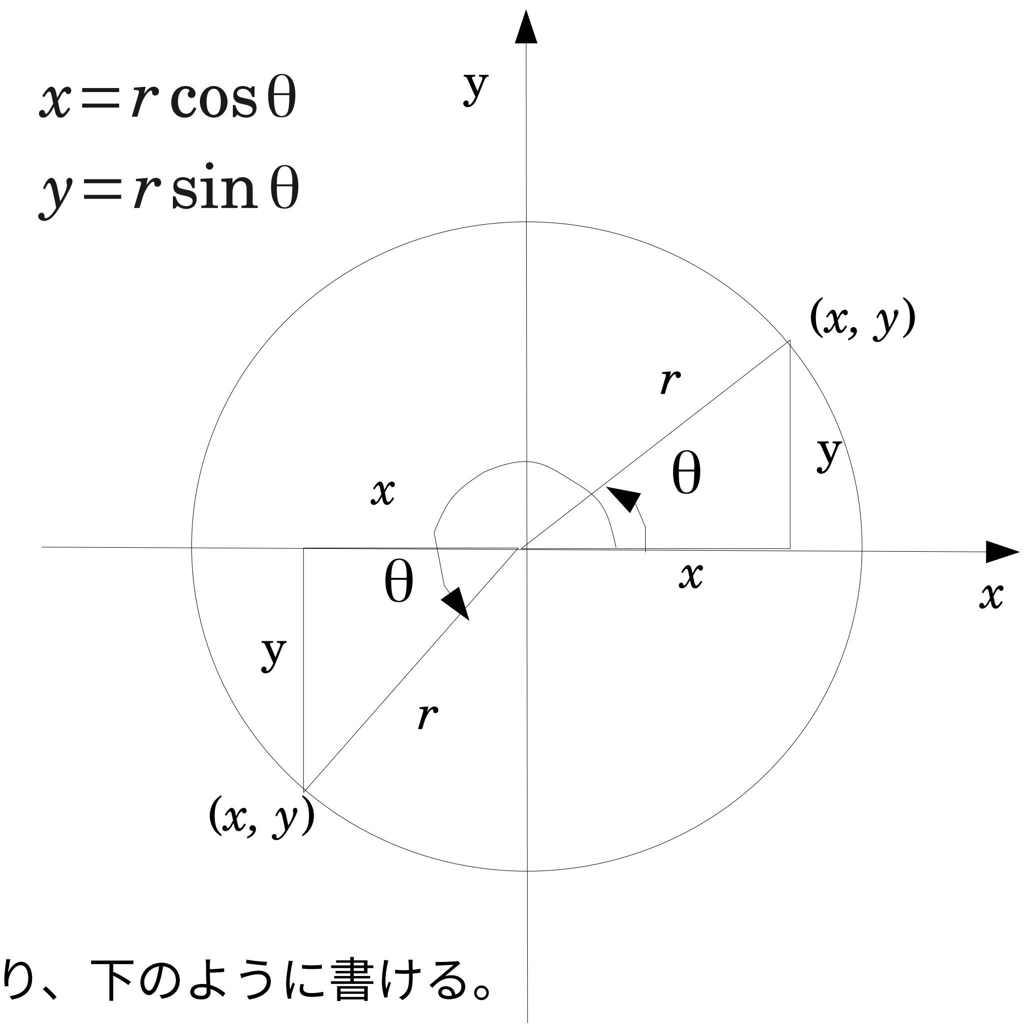


$$\sin\theta=\frac{c}{a} \quad \cos\theta=\frac{b}{a}$$

$$\tan\theta=\frac{c}{b}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

半径 r の円を考え、座標軸と関連させると便利

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

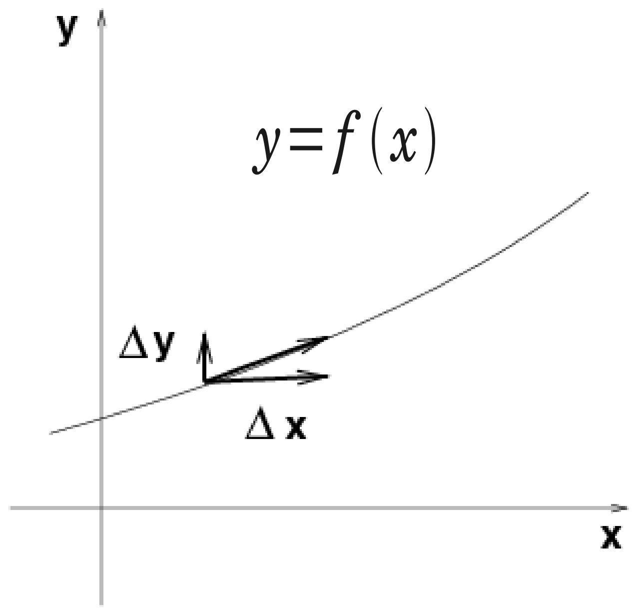


つまり、下のように書ける。

$$(x\,,\,y)=(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)$$

３，物理でつかう微分と積分

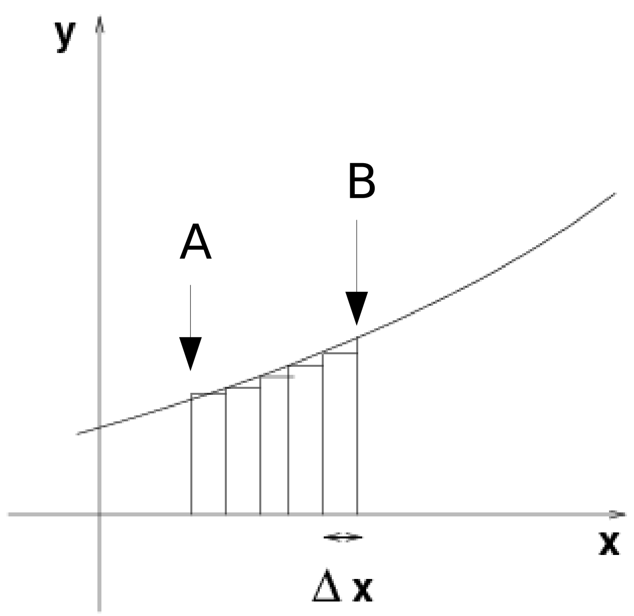
とりあえず、数学の極限操作を忘れて、



微分

$$\frac{dy}{dx} \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

小さい量の比(割り算)。



積分

$$\int_A^B f(x)dx \simeq \boxed{\sum_i f(x_i)\Delta x_i}$$

分割して、和をとること。

簡単な例で、分割した和と積分を比較

関数 $y = a \cdot x$ と、 x軸、$x = X$ で囲まれた面積を求める。

分割で、

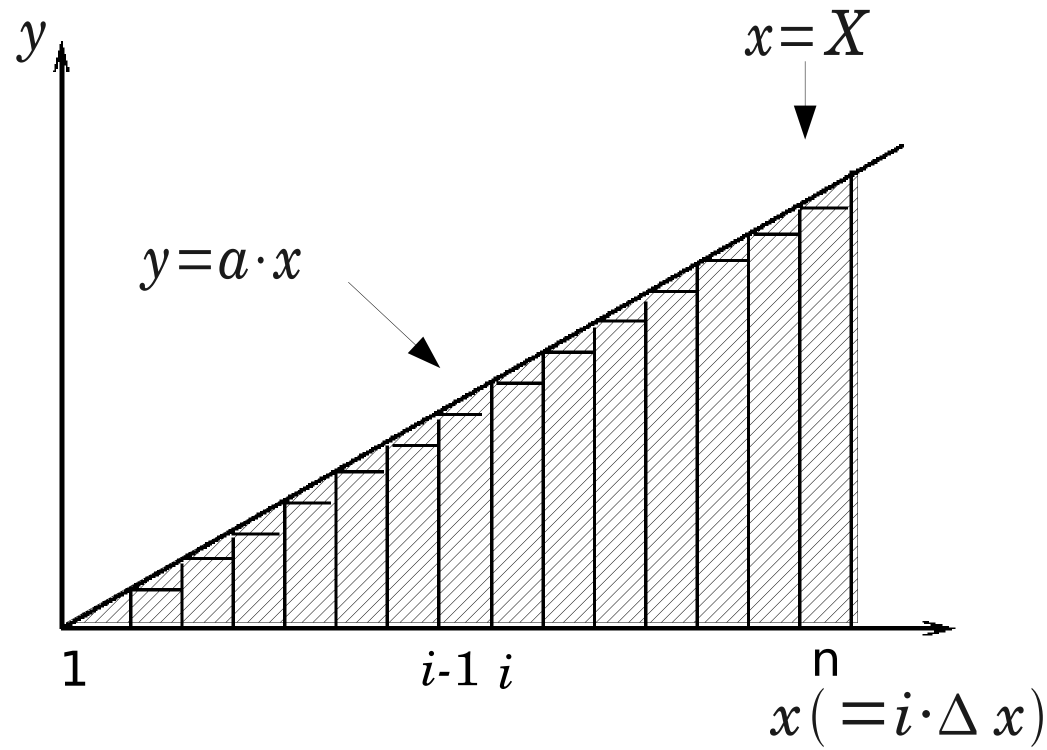
$$I_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1) \Delta x^2$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \Delta x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{X}{n} \right)$$

ただし、$\Delta x = \dfrac{X}{n}$ とおいた。

積分では、

$$I = \int_0^X x\,dx = \frac{1}{2} x^2$$



両者の差は、$\dfrac{X}{n}$ であり、nを大きくとると**いくらでも**その差を小さくできる。

（これが数学の極限の意味）

それでも、問題が微分・積分に帰着出来る時、
微分・積分の公式は便利だから、覚えておく方が良い。

$$\frac{d\,x^n}{dx}=n\,x^{n-1}$$

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C\quad(n\neq 1)$$

$$\frac{d\sin(ax)}{dx}=a\cos(ax)$$

$$\int\sin(ax)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax)+c$$

$$\frac{d\cos(ax)}{dx}=-a\sin(ax)$$

$$\int\cos(ax)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax)+c$$

$$\frac{d\,e^{ax}}{dx}=a\,e^{ax}$$

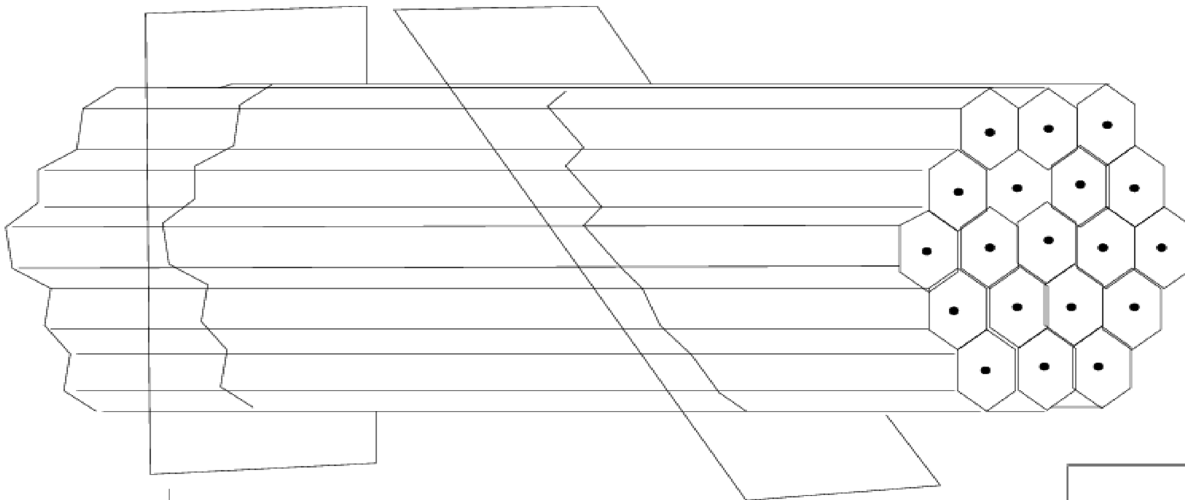
$$\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$$

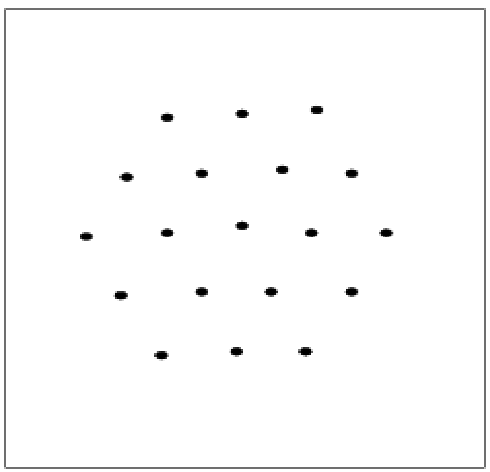
$$\frac{d\log_e(x)}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\log_e|x|+C$$

以上が基礎となる微分、積分の公式であり、このぐらい知っていれば十分

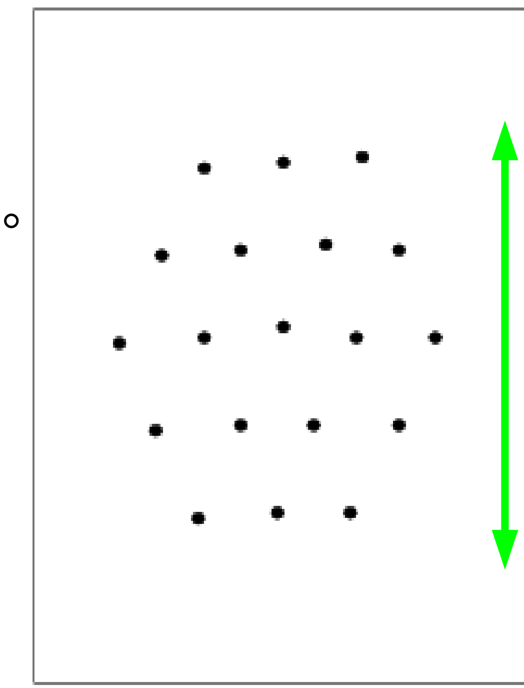
電気力線の密度＝電場の強さ　とは言うものの、線の密度の定義が必要





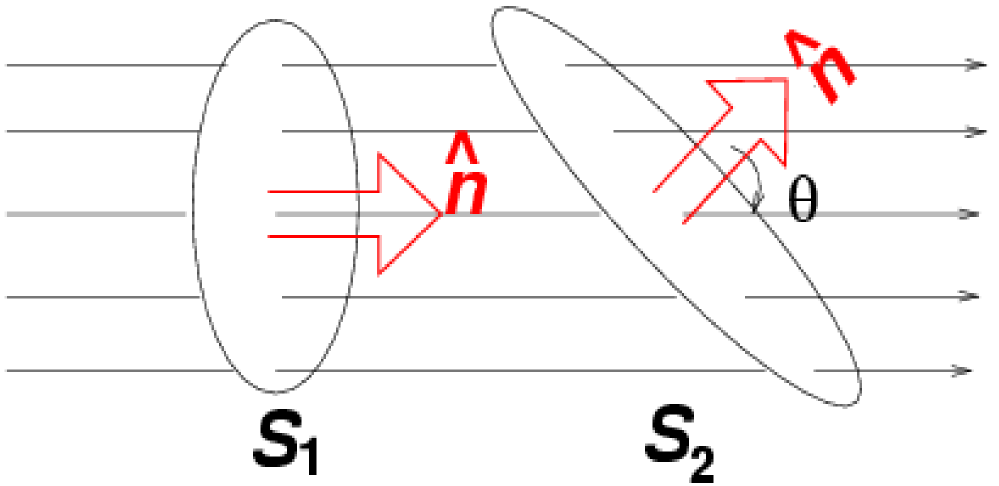
平面が垂直の時、電気力線の
通過点の密度が最も高く見える。
これを、線の密度の定義に使う

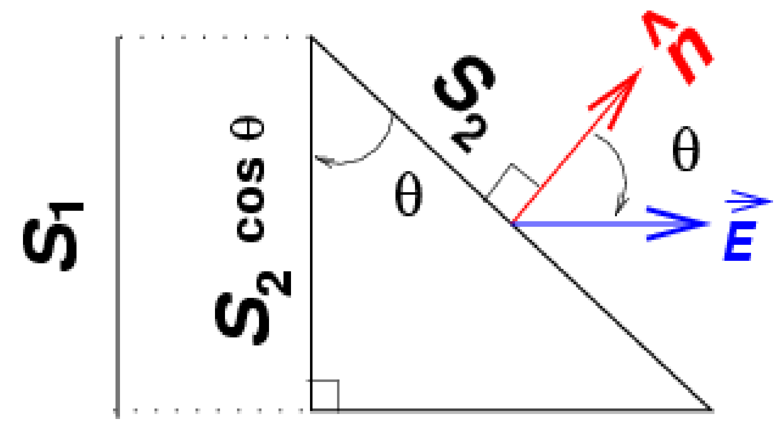
平面が斜めだと、通過点の
密度が低くなる



切り方の角度による補正が必要

切る角度による補正 => 面積に $\cos\theta$ を掛ける





$\hat{n}$ は、この平面の法線ベクトル
（垂直な、単位ベクトル）

$$\frac{N}{S_1} = \frac{N}{S_2 \cos\theta} = \frac{N}{S_2 \hat{n}\cdot\frac{\vec{E}}{E}} = \varepsilon_0 E$$

(電場の強さ)

内積で $\cos\theta$ を作った事に注意

これは、電気力線密度から、電場の強さを求める方法ではあるが、

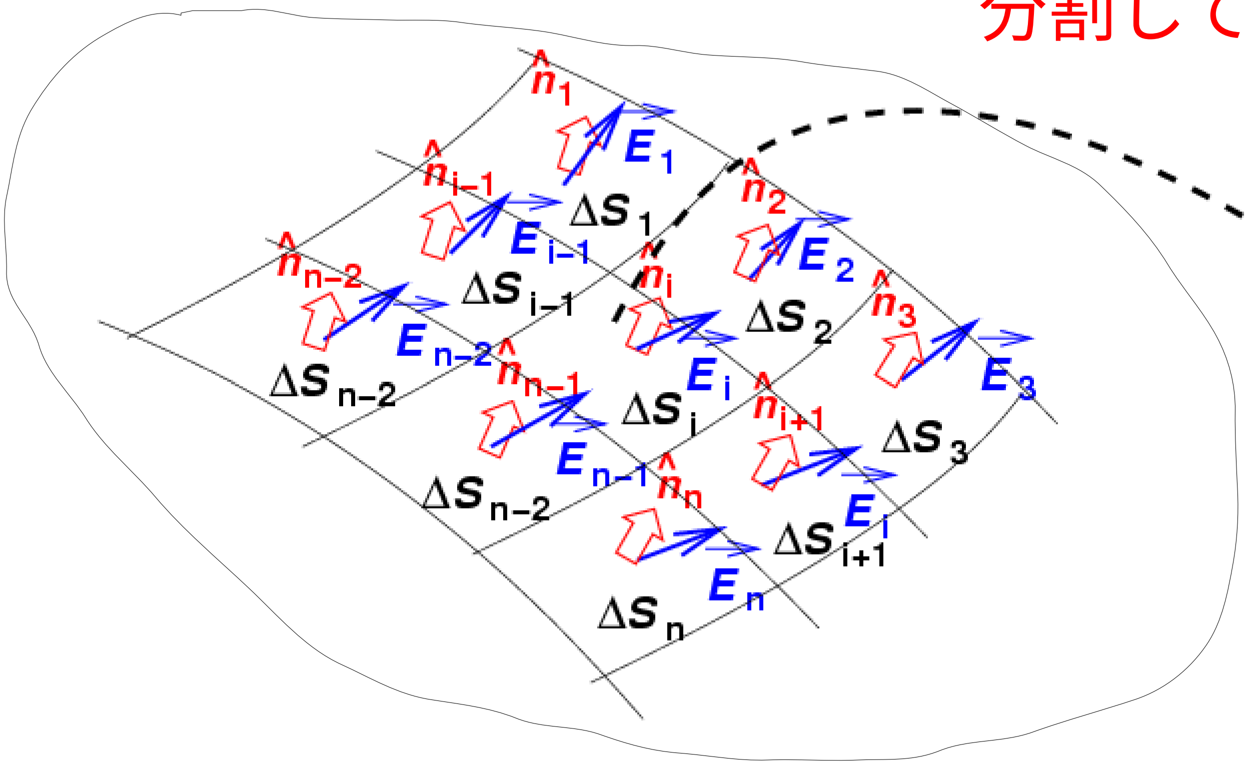
$$N = \varepsilon_0 (\vec{E}\cdot\hat{n}) S$$

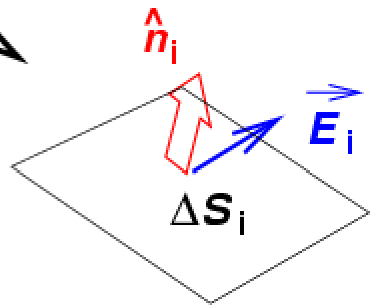
と、電場から、電気力線の数を求める方法でもある。

一般的な曲面を通る電気力線を数える方法

分割して、それぞれの微小面積の上で

$$N_i = \varepsilon_0 (\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i) \Delta S_i \ (本)$$





細かく分割して全体の和=>積分

全体の和を取る

$$N = N_1 + \dots + N_i + \dots = \sum_i N_i = \varepsilon_0 \sum_i (\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i) \Delta S_i$$

形式的な積分の形に

$$N = \varepsilon_0 \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS$$

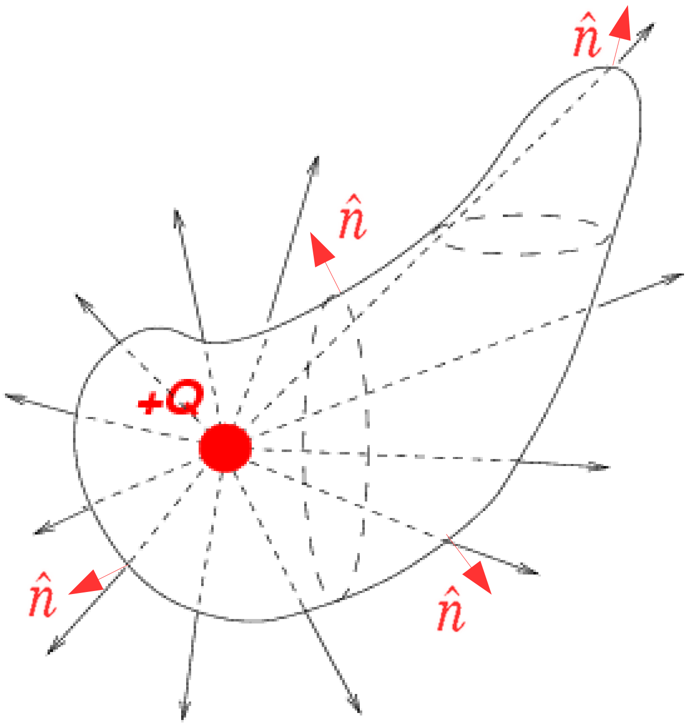
面でこの操作を行うので=>面積分

ガウスの法則

電荷が「閉曲面」の内側にある場合、そこから伸びる電気力線は、

どこかでこの閉曲面を通過する。だから、閉曲面を通る電気力線の

数を、１３ページの方法で計算すると $\varepsilon_0 \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS = Q \ \ (= N)$



と、電荷から伸びる電気力線の総数に等しい。

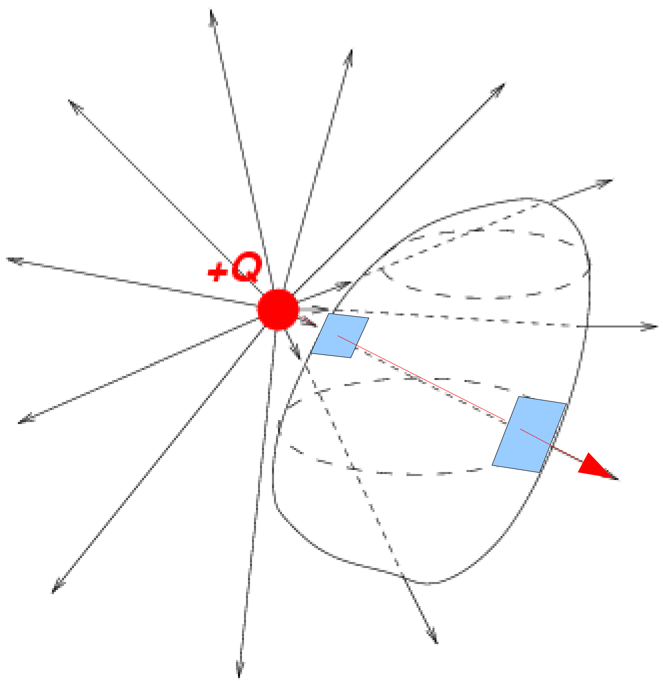
これをガウスの法則とよぶ。

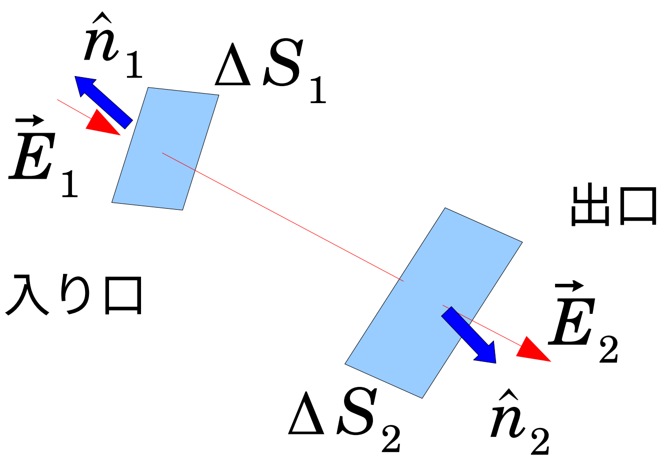
（ガウスはもっと数学的に証明している）

注1、閉曲面とは、縁の無い閉じた曲面の事。

注2、$\hat{n}$ は通常外向き、つまり、内から外の方向にとる。

電荷が閉曲面の外側の場合





一本の電気力線が、閉曲面に入る点での数え方に注目。
それぞれ大きさは1(本)だが、１３ページの計算では、

$$(\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_i)\Delta S_{1,} \quad と \quad (\vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2)\Delta S_2 \quad ...(1)$$

しかし、$\hat{n}$ の向きを考えると

$$\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 < 0, \quad \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2 > 0$$

$\Delta S_{1,}$ ΔS_2 は面積なので、負にはならない

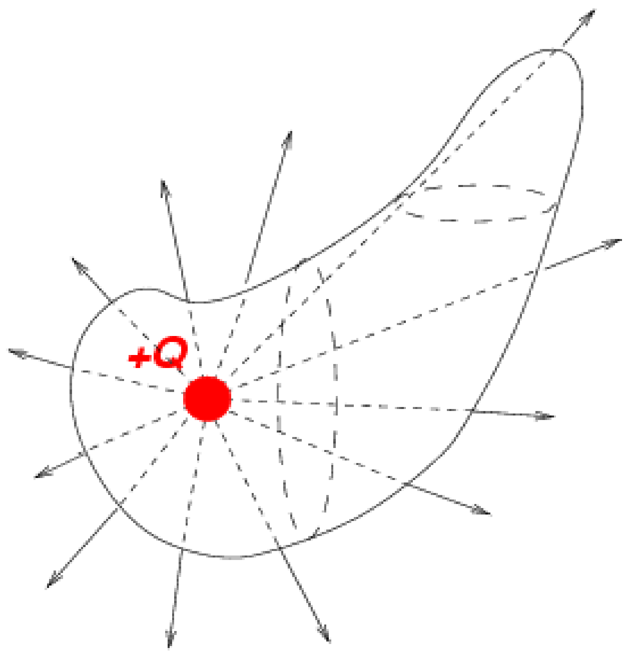
つまり、計算式（１）のそれぞれの**大きさは１**だが、
負と正であり、合計すると０。

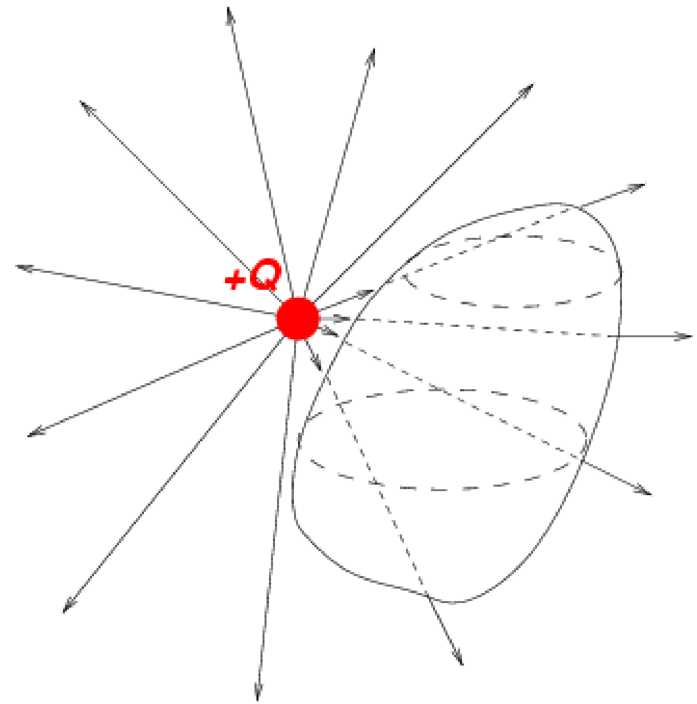
$$(\vec{E}_1 \cdot \hat{n}_i)\Delta S_1 + (\vec{E}_2 \cdot \hat{n}_2)\Delta S_2 = 0$$

結局積分で全電気力線の和をとっても、

$$\int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS = 0$$

結局ガウスの法則をまとめると





電荷が閉曲面の内側の場合、

$$\varepsilon_0 \int_S \left(\vec{E}\cdot\hat{n}\right) dS = Q$$

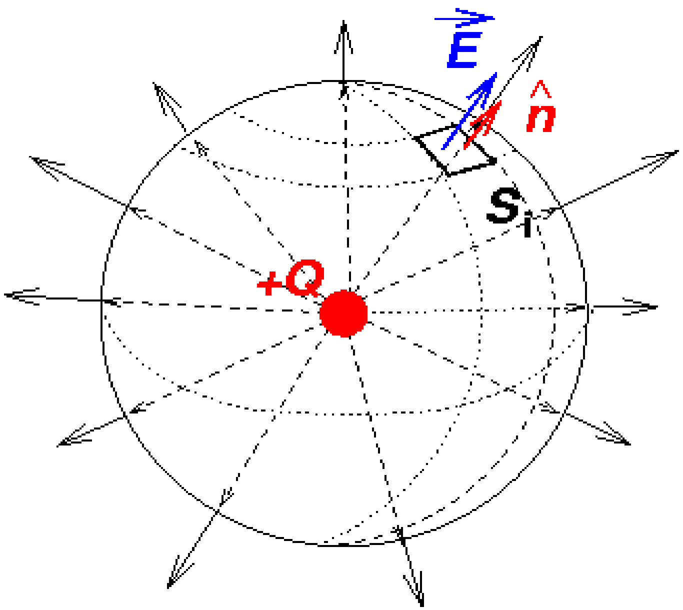
電荷が閉曲面の外側の場合

$$\varepsilon_0 \int_S \left(\vec{E}\cdot\hat{n}\right) dS = 0$$

ガウスの法則の一番重要な応用、

(クーロン場と呼ばれる)

一個の電荷の作る電場



ガウスの法則によると、電荷を中心とする球面上で

$$\varepsilon_0 \int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dS = Q$$

球対称性より

$\vec{r}$ を中心から引いたベクトルとする時

$\vec{E}$、$\vec{r}$、$\hat{n}$ は全部同じ方向のベクトル、

$\vec{E}$ の大きさは球面上で一定、なので

$$\varepsilon_0 \int_s (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dS = \varepsilon_0 \int_s E\,dS = \boxed{\varepsilon_0 \cdot E \cdot 4\pi r^2 = Q}$$

($S = 4\pi r^2$: 球の表面積)

大きさだけ書くと

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

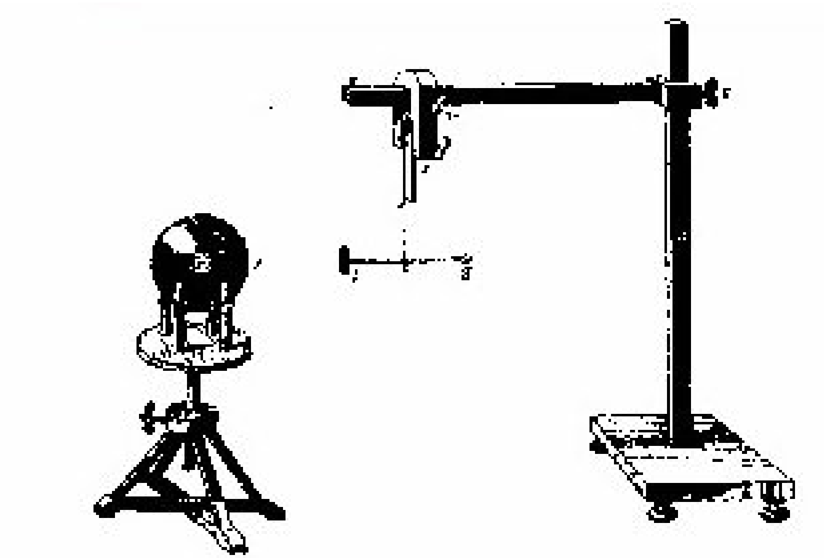
方向も付けてベクトルへ

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

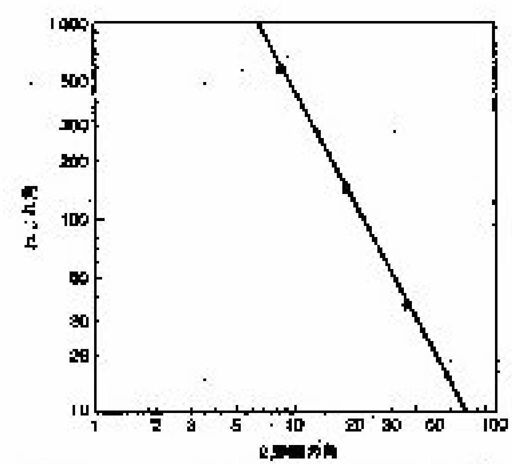
($\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{r}$ 、$\vec{r}$ 方向の単位ベクトル)

電荷に働く力

有名なクーロンの実験



▲図2　クーロンが電気引力の実験に用いた装置



▲図3　クーロンが報告している測定値を対数-対数グラフにプロットした図

$$F = k \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2}$$

２つの電荷には、

1. 同種の電荷には、斥力が
2. 異種の電荷には、引力が働く。
3. その大きさは、それぞれの電荷の積と、距離の二乗に反比例する。

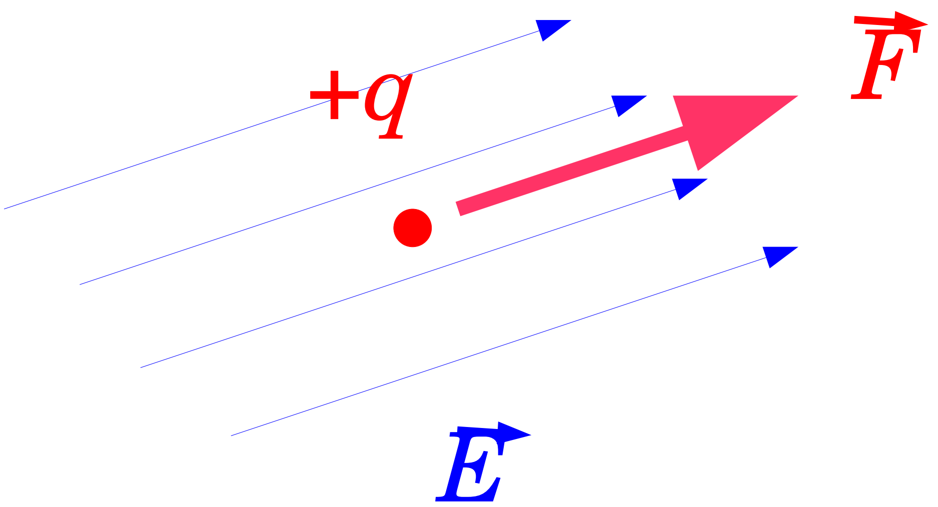
精度の低い実験だったが（本当に２？）万有引力との類似から、クーロンは左の3. を結論。

キャベンディッシュによる、ガウスの法則の証明が、最初の精密実験とされる。
これはクーロンより１０年早い。

クーロンの実験を電場を使って理解する。

電荷が電場から受ける力 ：　$\vec{F} = q\,\vec{E}$

•電荷は電場をつくると同時に、電場から力を受けることに注意。



こんな感じ。

一般に「場」とは、何者かに作用する「空間の性質」

１７ページのクーロン場と、19ページの定量化された電場から受ける力を組み合わせる

１、一つの電荷Qの作る電場（クーロン場、１７ページ）

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\ \left(=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

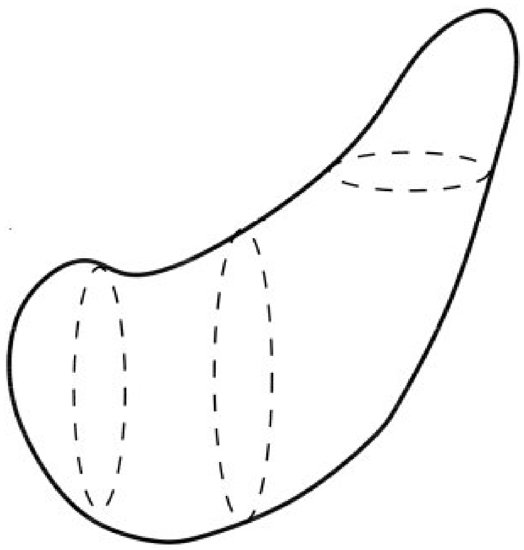
２、その電場で、もう一つの電荷qの受ける力（２０ページ）

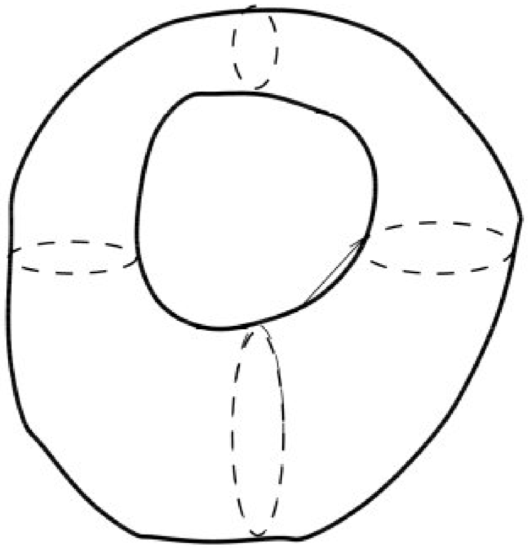
$$\boxed{\vec{F}=q\cdot\vec{E}}=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}\ \left(=\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$$

ベクトルで表されているので、力の方向も同時に表現される。

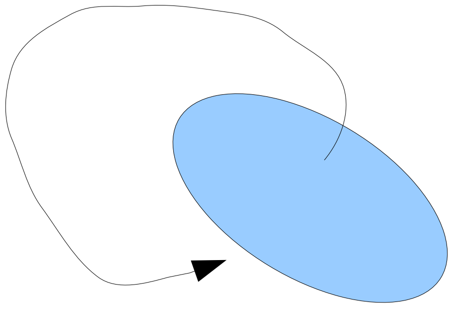
==> 電場ベクトルを求めると、力は簡単に理解できる

もう少し閉曲面（数学では）





1. この面には、縁(へり)が無い。
2. この面は、内側と外側を区別する。
3. 物体(3次元の)の表面は閉曲面である。



反対語は、開曲面

1. 縁のある曲面。
2. 曲面を通らず、曲面の両側を結ぶことができる。
3. 閉曲面の一部分を取り出すと、開曲面。

今日の問題

1、ベクトルの内積について、下の文章の空白を埋め、全体を意味の通る文章を作成して提出せよ。（答えだけでなく、文章全体を自分で書き直すこと）

それぞれ大きさが0（ゼロ）でない二つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ について、

- 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ が最大になる角度は、$\theta = \boxed{}$ であり、この時 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行であると言う。
- また、最小になる角度は、$\theta = \boxed{}$ であり、この時 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は反平行であると言う。
- 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ が、0 になるのは、$\theta = \boxed{}$ 、すなわち $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が、垂直の時である。

2、下の三角関数を計算せよ（問題の式と合わせ等式の形に書く）

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta =$$

$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} =$$

（ただし、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で）