マクスウエルの方程式の積分型

電場の面積分

$$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$$

（電場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

（電磁誘導の法則）

磁場の面積分

$$\int_{[閉曲面上]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$$

（磁場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I \quad \boxed{+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$$

（アンペール・マクスウエルの法則）

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。

マクスウエルの方程式　(通常はこの微分形を意味する)

電場のガウスの法則

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

または

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

電磁誘導の法則

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

磁場のガウスの法則

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

アンペール･マクスウエルの法則

$$\mathrm{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

電磁波

$\vec{I}=0 \quad \vec{E}=(0,0,E_z)$、$\vec{B}=(0,B_y,0)$ 、と置くと生き残るのは、

アンペールの法則から、

$$\frac{\partial B_y}{\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

両辺をtで偏微分

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t\partial x}}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

電磁誘導の法則から、

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

両辺をxで偏微分

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial x\partial t}}$$

$\boxed{}$ で囲まれた部分は、「微分の順番が交換できる」とすると等しい。

したがって、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

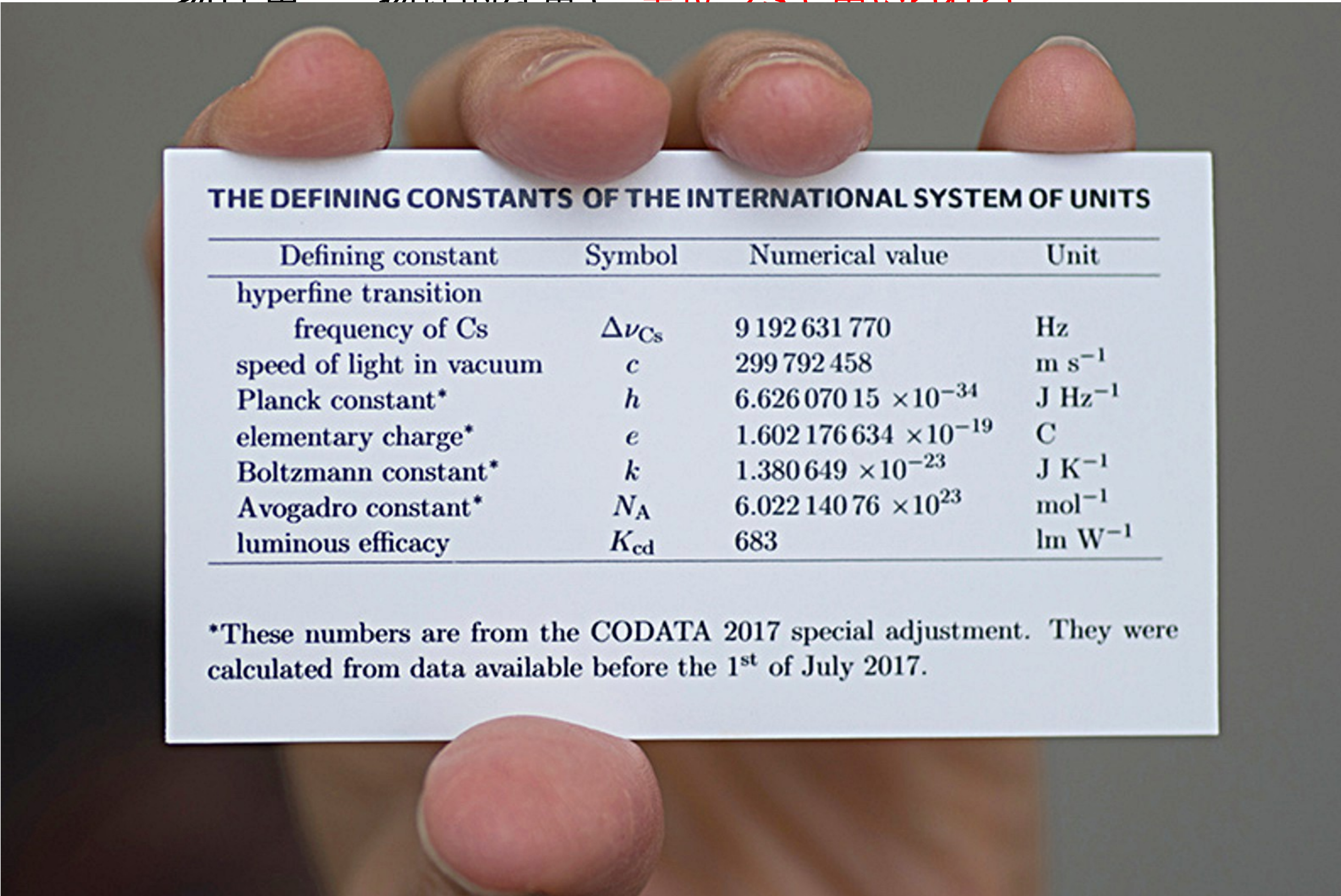
：波動方程式

が得られた。

$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ H/m=N/A^2

$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ F/m

物理量　・物理的な量で　単位つきで用いられる



THE DEFINING CONSTANTS OF THE INTERNATIONAL SYSTEM OF UNITS

Defining constant	Symbol	Numerical value	Unit
hyperfine transition frequency of Cs	$\Delta\nu_{Cs}$	9 192 631 770	Hz
speed of light in vacuum	c	299 792 458	$m\ s^{-1}$
Planck constant*	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$J\ Hz^{-1}$
elementary charge*	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C
Boltzmann constant*	k	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$J\ K^{-1}$
Avogadro constant*	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
luminous efficacy	K_{cd}	683	$lm\ W^{-1}$

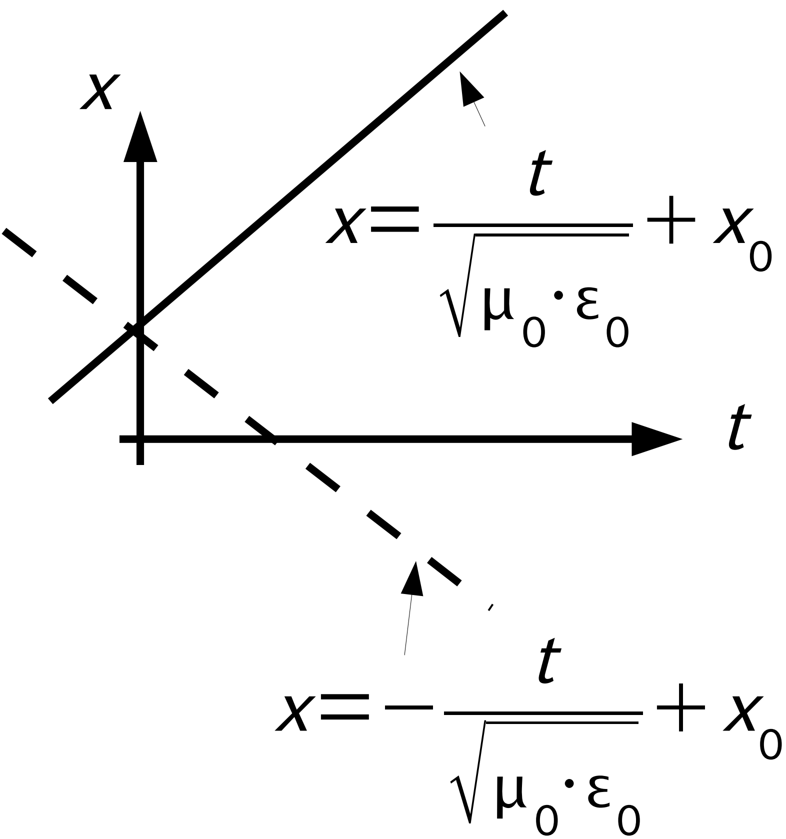
*These numbers are from the CODATA 2017 special adjustment. They were calculated from data available before the 1st of July 2017.

電磁波

この解は、

$$E_z = f\left(x \pm \frac{t}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}\right)$$

の形なら何でも良い。
この意味で一般解と呼ぶ。



一符号に注目する。左のグラフの実線上で、電場は一定の値をもつ。言い替えると、この一定の値は時間と共に、速度 $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ で進行している。このような波動を進行波と呼ぶ。

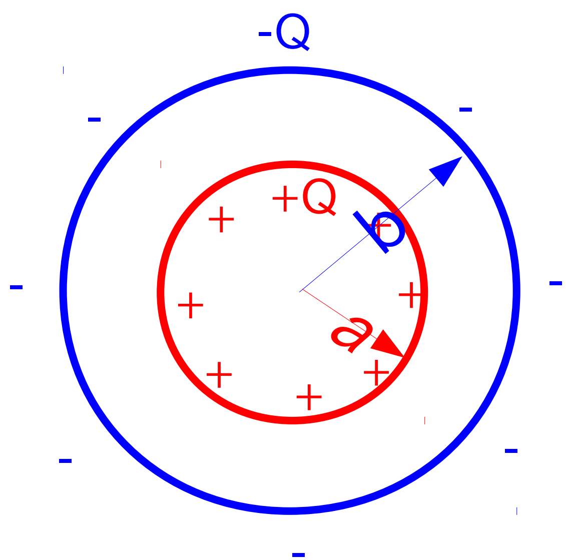
＋符号に注目すると、時間と共に一定の値をもつ電場は時間と共に後退している。このような波動を後退波と呼ぶ。

なお、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \equiv 299792458\ \mathrm{m/s} \approx 3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

は光の速度に等しい。

球形コンデンサー(理想的コンデンサー)



半径 aと bの球面を極板と考える。

電場はこの極板の間 $(a<r<b)$に、だけ存在する。

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

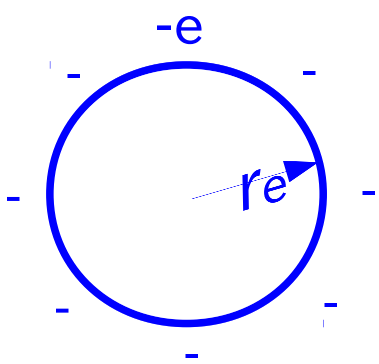
極板間の電位差　(クーロン場の時と同様)

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

電気容量

$$Q=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}V$$ より $$C=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

電子の古典半径



電子が半径 r_e の球と考えると、電子の電場のエネルギーの合計は、コンデンサーとしてのエネルギーに等しい。

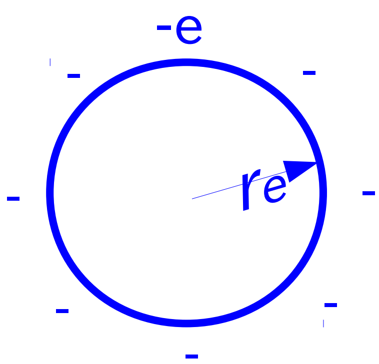
$$U = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_e}$$

これが電子の静止エネルギー(mc^2 、相対性理論より)に等しいと考えると、電子の半径として、

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}$$

が得られる。これを電子の古典半径と呼ぶ。

今日の問題:電子の古典半径 を簡単に計算する。



$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}$$ に、具体的な数値

$$e = -1.60217653\times 10^{-19}\,[A\,sec]$$

$$m = 9.1093826\times 10^{-31}\,[kg]$$

$$\varepsilon_0 = 8.85418782\times 10^{-12}\,[m^{-3}\,kg^{-1}\,sec^4\,A^2]$$

$$c = 2.99792458\times 10^{8}\,[m\cdot sec^{-1}]$$

を代入すると、

$$r_e = \frac{(1.6022\times 10^{-19})^2}{8\times 3.1416\times 8.8542\times 10^{-12}\times 9.1094\times 10^{-31}\times(2.9979\times 10^{8})^2}\left[\frac{[A\,sec]^2}{[m^{-3}\,kg^{-1}\,sec^4\,A^2][kg][m\cdot sec^{-1}]^2}\right]$$

だが、すべての数値を1桁に四捨五入して、1桁の精度で r_e を計算せよ。

平行な電流に働く力

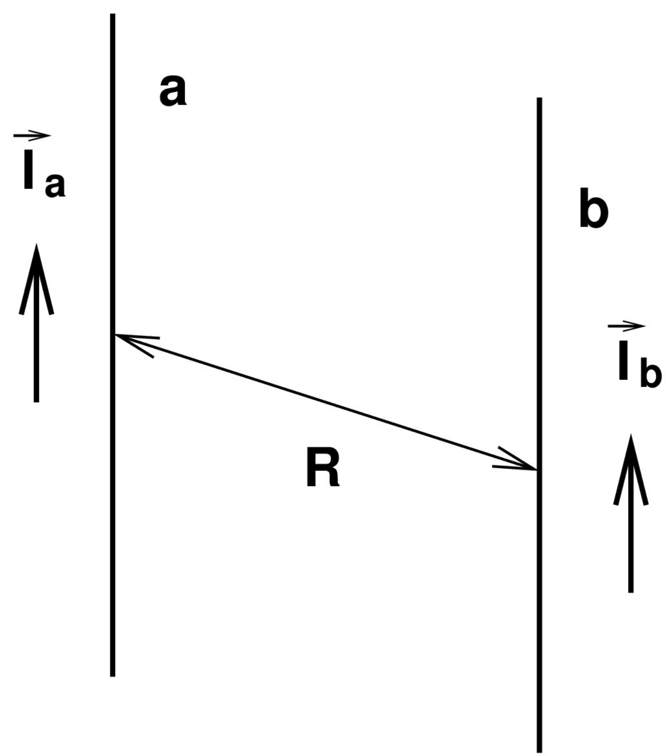
下図の様に、お互いに平行な、無限に長い直線の導線があり、それぞれ電流 *Ia*、*Ib*が、z方向に流れている。

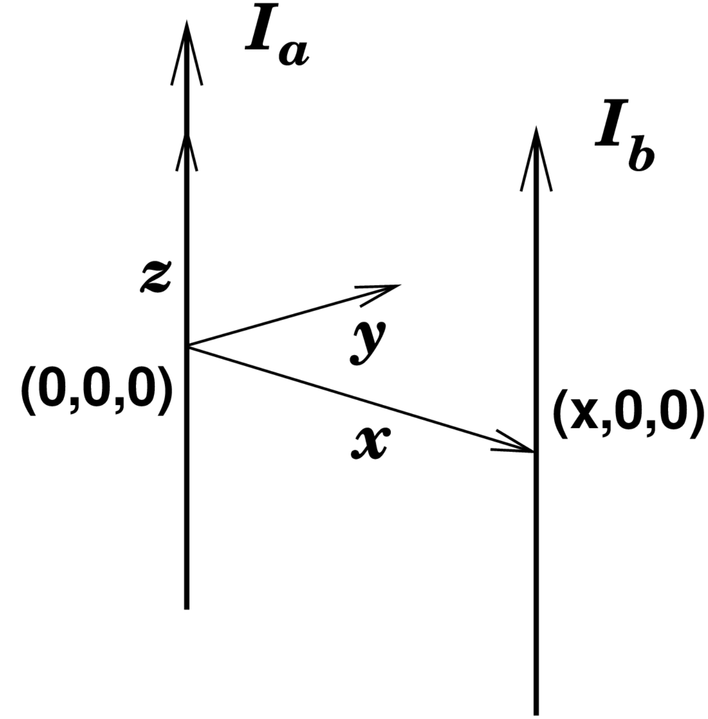
1. 電流*Ia*が、点*Ib*につくる磁場（磁束密度）を求めよ。

2. この磁場から、電流*Ib*の受ける力を求めよ。

3. この力は*Ia, Ib*にとって、引力か、斥力か。

座標を使ってで考えるなら





電流がつくる磁場 (電流と磁場は相性がよい)

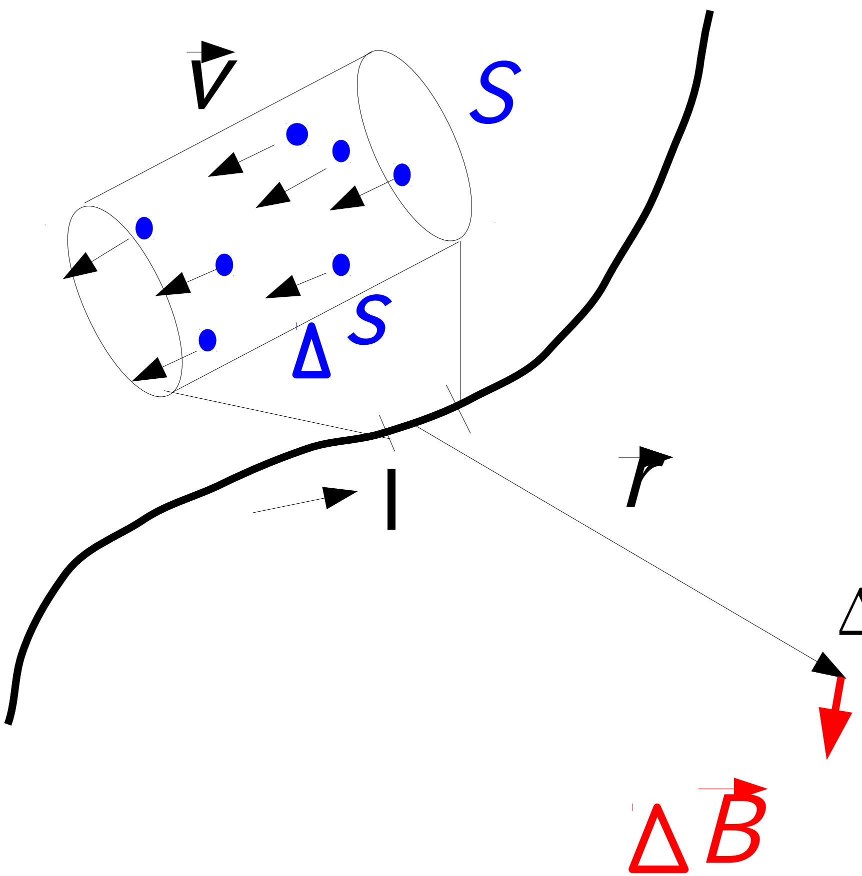
短い区間を流れる電流のつくる磁場は、その中の
電荷(電子)のつくる磁場の合計で与えられる。

$$\vec{I} = -e\rho_e S \langle\vec{v}\rangle$$

電流の定義

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot(-e)\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

電子一個のつくる磁場



この区間の中の自由電子の数は

$$N_e=\rho_e\cdot S\cdot\Delta s$$

したがって、

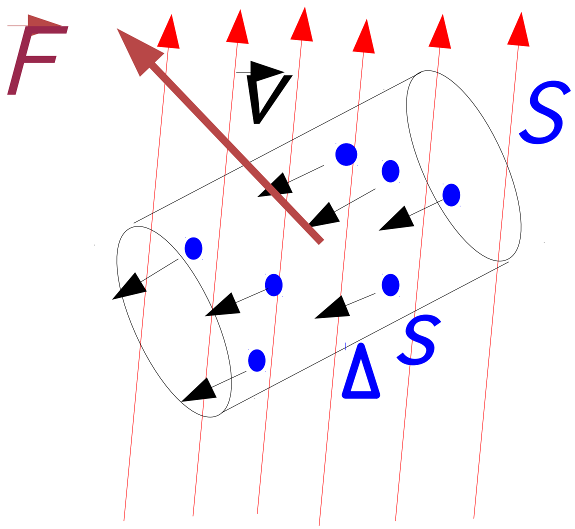
$$\Delta\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{[\vec{I}\cdot\Delta s]\times\hat{r}}{r^2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\vec{I}\times\hat{r}}{r^2}\Delta s$$

ビオ・サバールの法則

変化しない(定常)電流のつくる磁場を、静磁場と呼ぶ事がある。

磁場が電流に与える力

短い区間を流れる電流が磁場から受ける力は、
その中の電荷(電子)が磁場から受ける力の合計。



$$\vec{I} = -e\rho_e S < \vec{v} >$$ 電流の定義

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$ 電子一個受ける力

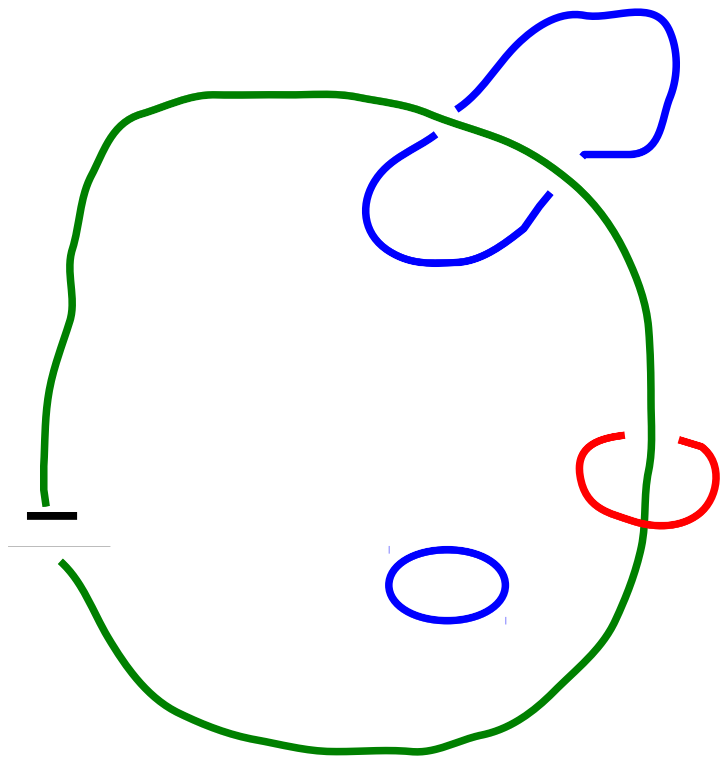
この区間の中の自由電子の数は

$$N_e = \rho_e \cdot S \cdot \Delta s$$

したがって、

$$\Delta \vec{F} = [\vec{I} \cdot \Delta s] \times B = \vec{I} \times \vec{B} \Delta s$$

実は、もっと一般的な法則アンペールの法則が成り立つ



閉じた定常電流に対し、任意の一周積分は、

その中を電流が通っていれば、

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

通っていない場合は

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

注意：磁場に対するガウスの法則は常に

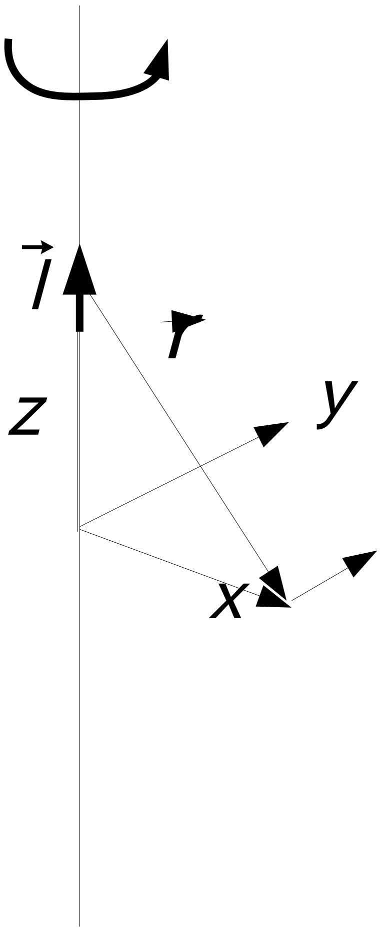
$$\int \vec{B}\cdot \hat{n}\, dS = 0$$

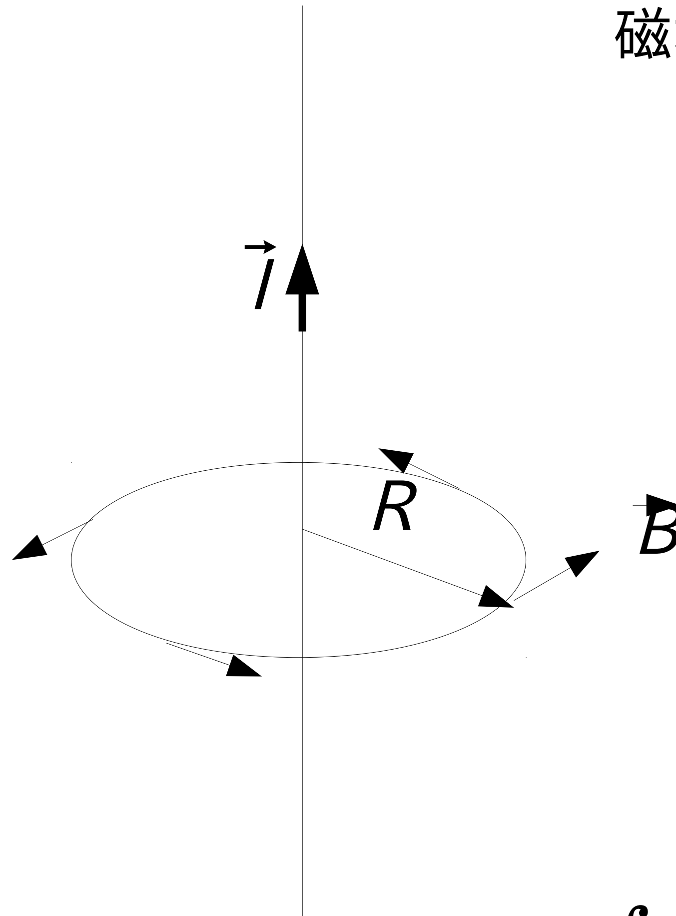
磁力線は、閉曲線であること、
面積分は面を通る磁力線の数を数える操作なので、自明

続き

したがって $$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

回転対称性





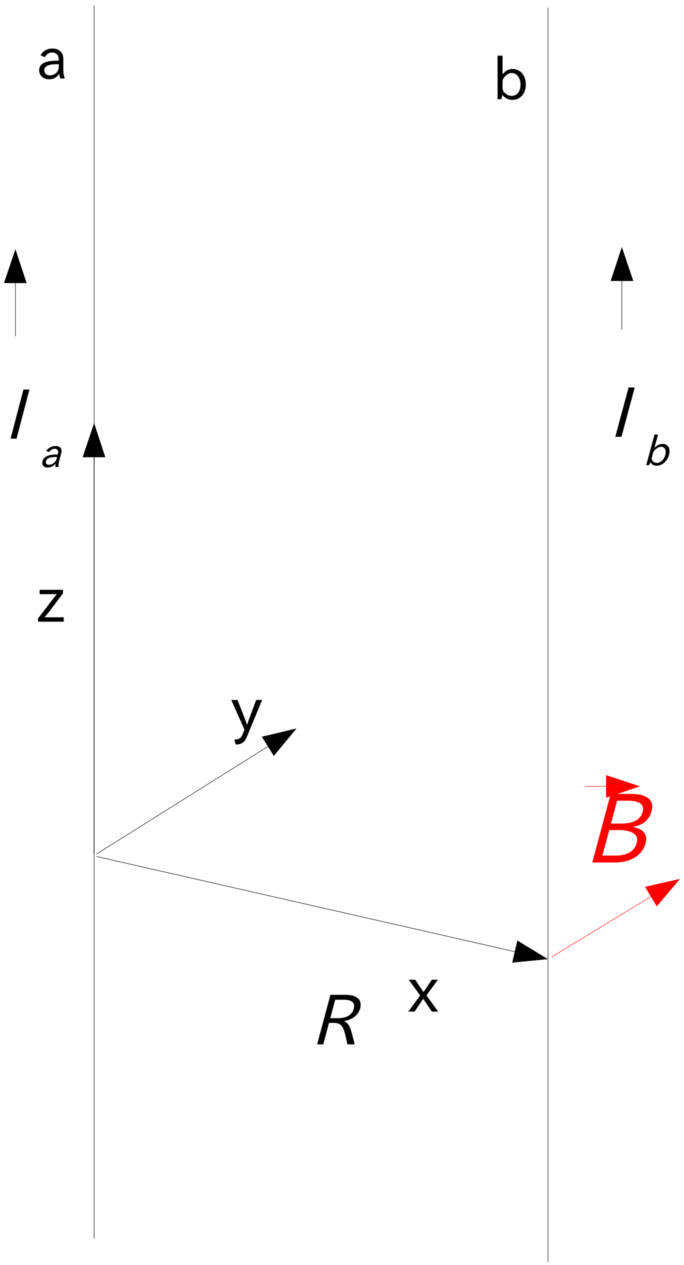
回転対称性を考えると、
半径 R の円周上どこでも
磁場の強さは、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

円周一周の積分は、

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \oint B\, ds = \mu_0 I$$

平行な直線電流に働く力



まず、直線電流a が直線電流b の位置につくる磁場の強さB を求める。a bの距離はRだから、図のように座標を導入して

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I_a}{2\pi R}\hat{j}$$

次に、直線電流b が、磁場から受ける力を求める。

$$\Delta\vec{F}=[(I_b\hat{k})\times\vec{B}]\Delta s=[\frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi R}(\hat{k}\times\hat{j})]\Delta s$$

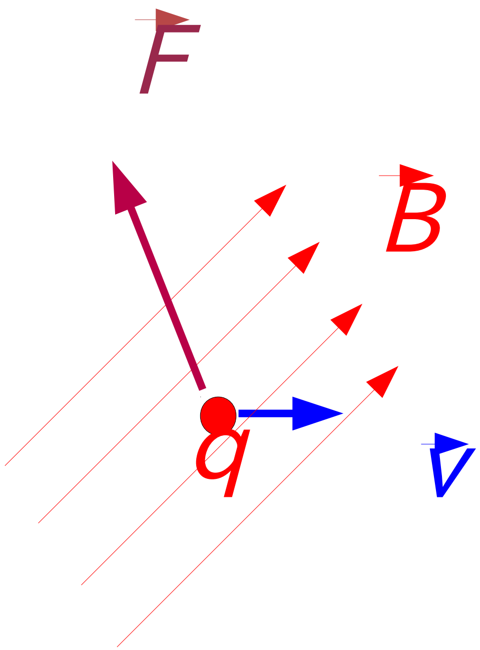
また、 $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$ より、

単位長さあたりの力は

$$\vec{F}=-\frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi R}\hat{i}$$

つまり、2つの電流は引き合う

磁場が電荷にあたえる力
やはり外積で表現される



$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

電場も加えて、電磁場が電荷に与える力は

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$$

ともっとも一般的に書かれる。
これを、ローレンツ力と呼ぶ。

磁場中の荷電粒子

磁場中で、電子が運動する時の回転半径と、
電子の運動量、運動エネルギーの関係を求めよ。

ヒント、$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$

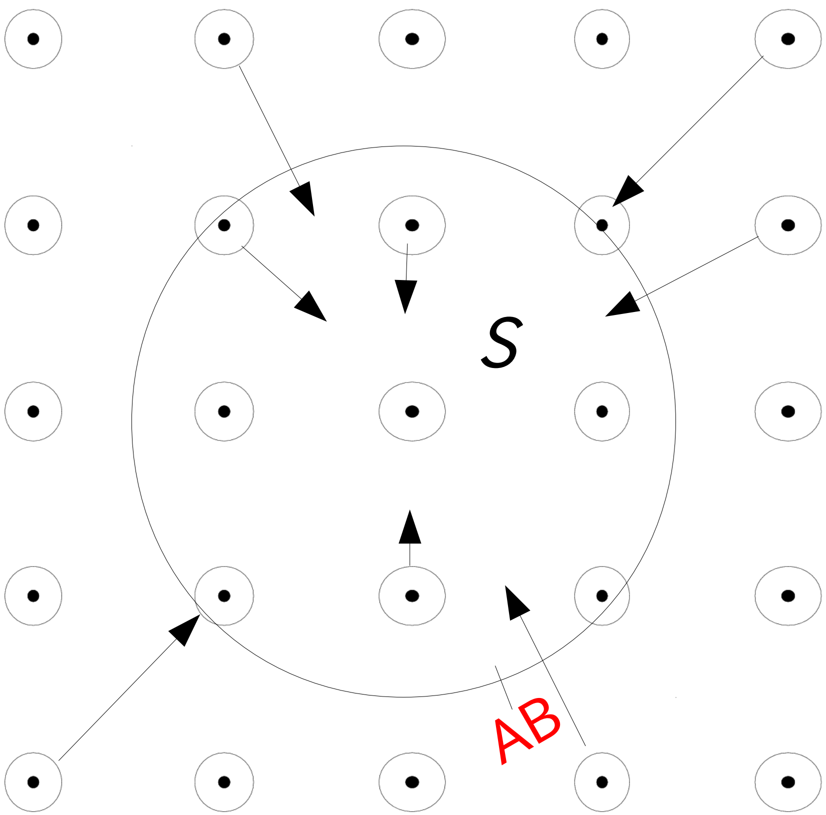
を用いて、微分方程式を解いて、
求めることもできるが、
(物理実験の教科書参照)
簡単には、回転運動の遠心力と、
磁場からの力の釣り合いを考え
ても求まる。なお、遠心力は

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

で与えられる。
まず、速度と半径の関係を
求めよう。

磁場中の電子の運動

電磁誘導(3)



一周積分

$$\oint [(\vec{v}_{[磁場の移動する速度]}) \times \vec{B}] \cdot d\vec{s}$$

は、積分路内に単位時間に入って来る磁力線の数であるが、同様な量は、下の式でも計算できる。

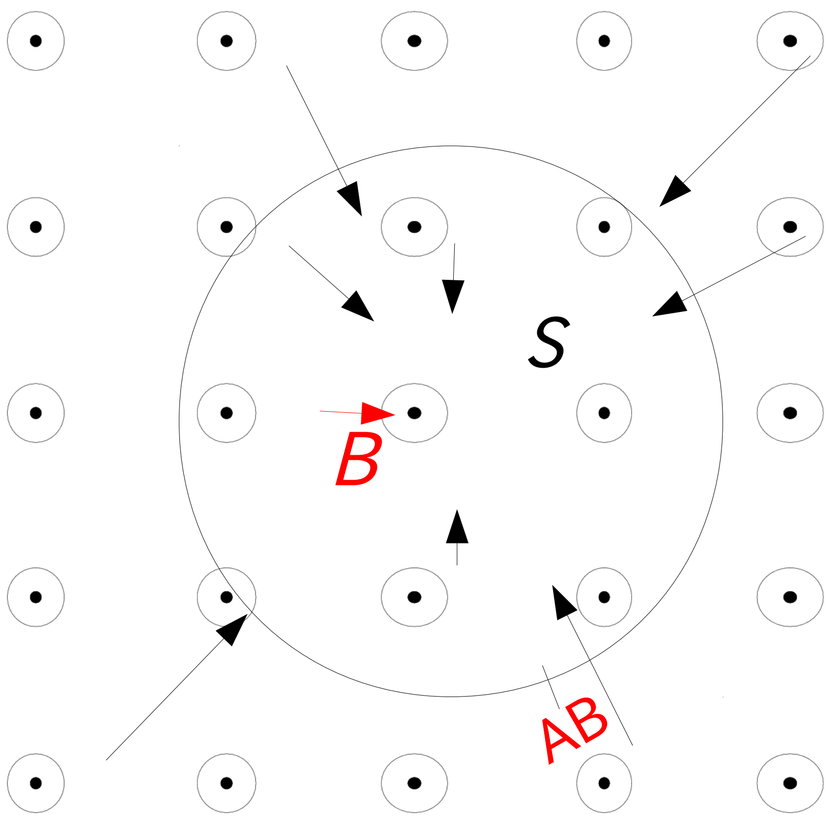
$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

注意、 $\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$ は面積 S を通る磁力線の数を数える操作。(ガウスの法則参照) 結局、AB間の電位差は、

$$V_{[AB]} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

と書ける。(誘導起電力)

今日の問題



一様な磁場があり、その中に磁場に垂直に円形で面積Sの導線があり、一箇所切れ目があり、僅かに離れている両端をA,Bとする。

1, 磁場の強さが時間の関数として、

$$B = b \cdot t + B_0$$

のように変化するとき、A,Bに発生する起電力を求めよ。

2, 磁場の強さが時間の関数として、

$$B = B_0 \sin(\omega t)$$

のように変化するときでは、起電力はどうなるか。

今日の問題

1.マクスウエルの方程式の積分型、微分型を対応させて示せ。

2. マクスウエルの方程式が、電磁波の方程式を含むことをしめせ、

電磁場のポテンシャル <== 電位の概念の拡張

ここで使う公式

3次元スカラー関数 f に対して、 $\nabla \times (\nabla \cdot f) = 0$

3次元ベクトル関数 $\vec{A}$に対して、 $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

ポアンカレの補題 （上の公式の逆）

3次元ベクトル関数 $\vec{B}$ が、 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ を満たせば、 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ となる
3次元ベクトル関数 $\vec{A}$ が存在する。

3次元ベクトル関数 $\vec{A}$ が、 $\nabla \times \vec{A} = 0$ を満たせば、 $\vec{A} = \nabla \cdot f$ となる
3次元スカラー関数 f が存在する。

マクスウェルの方程式

すぐ分かること

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ ==> $$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$ の時、$\vec{E} = -\nabla \phi$ となる

スカラー関数 Φ がある。(- 符号は電位と定義を一致させるため)

$$\nabla \vec{B} = 0$$ ==> $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ となるベクトル関数 $\vec{A}$ がある。

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{i} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

磁場を $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ と表す事のできる**ベクトル場、$\vec{A}$ が有ったとして、**

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

（誘導起電力の式）に代入して

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{\nabla}\times\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

微分の順番の交換

これから、磁場の誘導起電力による電場が

$$\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

と書かれる事がわかる。これに電位から与えられる項 $\vec{E}=-\nabla\phi$ を加えて、

一般に、

$$\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

と書けることになる。

これに、

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

を合わせて、

電磁場のポテンシャル表示と呼ぶ。