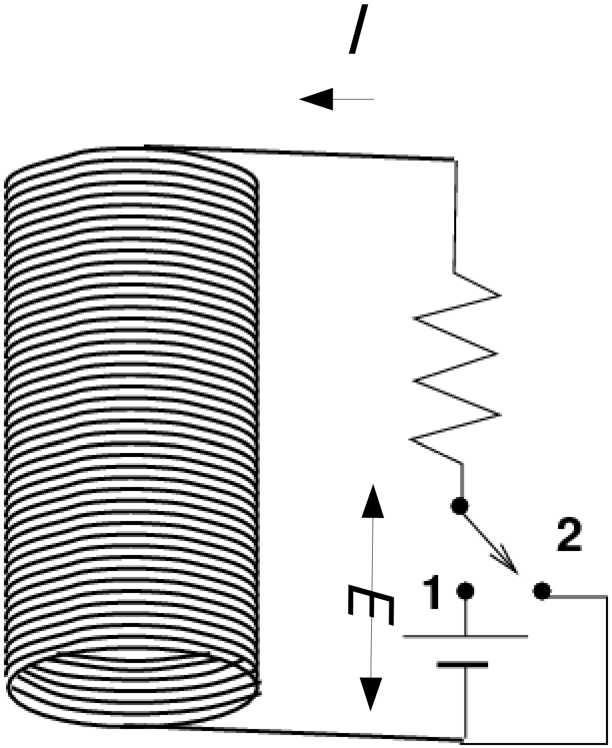
コイルの入った回路 (LR 回路)



左図の様にソレノイドに、電池の様な直流電源を用いて、電流を流していたとしよう。

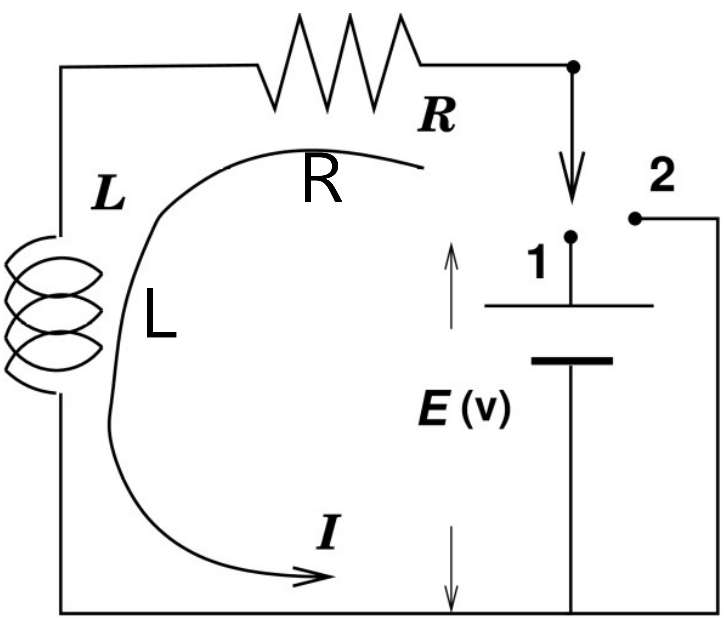
ある瞬間(t=0)に、スイッチが切り替わって、電池のところが、ただの導線に変った。

スイッチ1の状態での電圧のバランス。

$$E = R\,I + L\frac{dI}{dt}$$

この状態で、長時間放置されれば、電流の時間変化は無視できる。したがって、

$$E = R\,I$$



スイッチ2の状態での電圧のバランス。

$$0 = R\,I + L\frac{dI}{dt}$$

スイッチ2の状態で、微分方程式を直接解く

$$0 = RI + L\frac{dI}{dt} \longrightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$

$$\longrightarrow \frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}$$ (変数分離型の微分方程式)

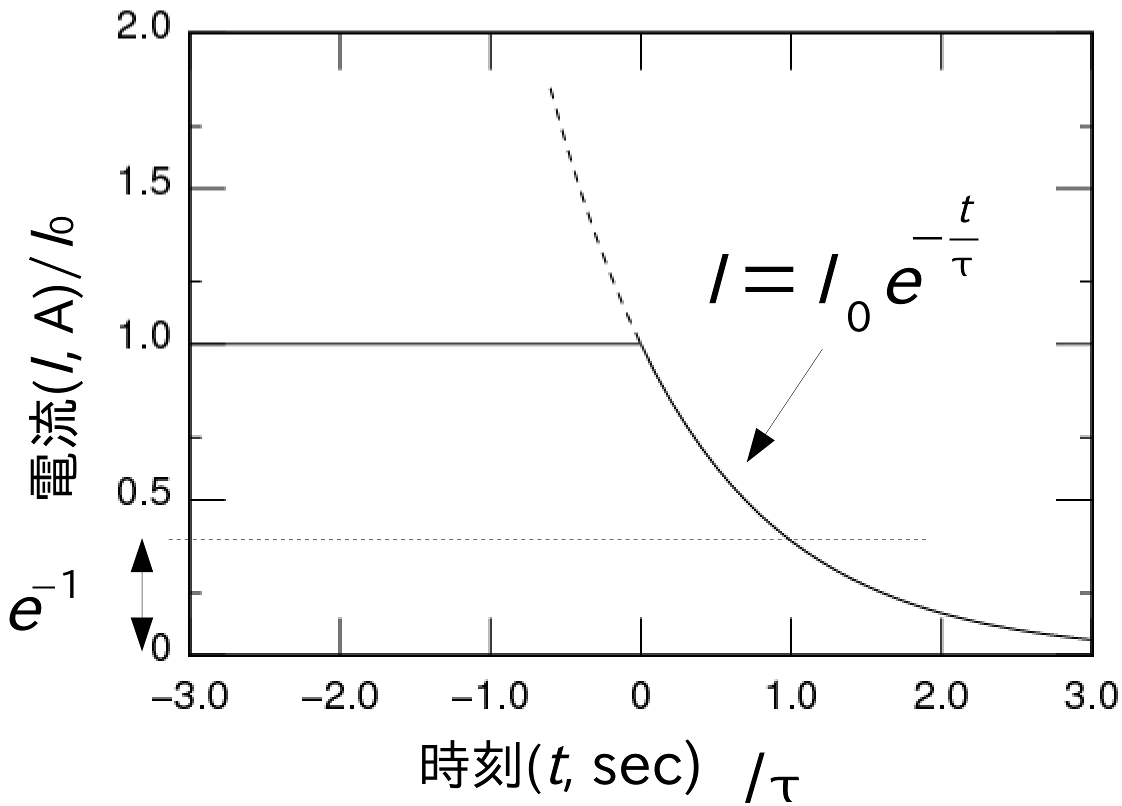
$$\int_0^t \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}dt = \int_0^t \left(-\frac{R}{L}\right)dt$$

$$\int_{I(0)}^{I(t)} \frac{dI}{I} = \int_0^t \left(-\frac{R}{L}\right)dt$$

$$\log\frac{I(t)}{I(0)} = -\left(\frac{R}{L}\right)t \longrightarrow I(t) = I(0)\,e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

電流を時間 t の関数で表す。

$$I(t) = I_0 e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$ ただし、 $I_0 = I(0)$



$$\tau \equiv \frac{L}{R}$$:時定数

時刻 t=0 で、スイッチ1から、スイッチ2に、切り替わった。

スイッチが2に切り替わってから、$\boxed{\text{抵抗に発生する全熱量}U}$

$$U=\int_0^\infty R\cdot I^2(t)\,dt$$

$$=R\cdot I_0^{\,2}\cdot\frac{\tau}{2}\cdot\left[e^{-2\frac{t}{\tau}}\right]_0^\infty$$

したがって、

$$\boxed{U=\frac{1}{2}L\,I_0^{\,2}}$$

は、状態1で、電流 I_0 が流れていた時、

コイルに蓄えられていたエネルギー

スイッチが2に切り替わってから、$\boxed{\text{抵抗に発生する全熱量}U}$

$$U=\int_0^{\infty} R\cdot I^2(t)\,dt$$

$$=R\cdot I_0^{\,2}\cdot\frac{\tau}{2}\cdot\left[e^{-2\frac{t}{\tau}}\right]_0^{\infty}$$

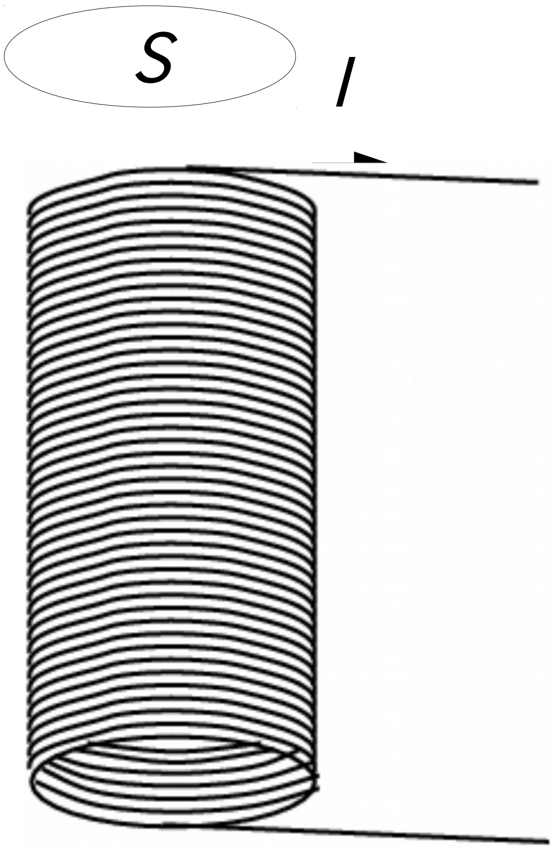
したがって、

$$\boxed{U=\frac{1}{2}L\,I_0^{\,2}}$$

は、状態1で、電流 I_0 が流れていた時、
コイルに蓄えられていたエネルギー

ソレノイドの、自己インダクタンスは

$$L = lS\mu_0 n_1^2$$



また、

$$B = \mu_0 n_1 I$$

したがって、電流 *I* が流れるコイルに蓄えられたエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} lS\mu_0 n_1^2 I^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 [lS]$$

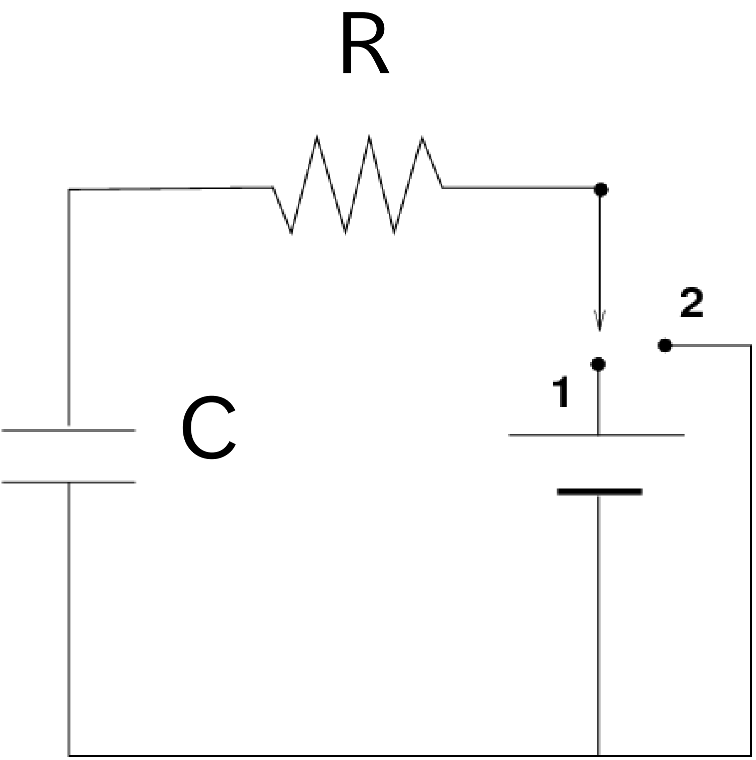
$[lS]$は、ソレノイド内部の体積だから、

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

は、ソレノイド内部の磁場のエネルギー密度と考えられる。

コンデンサーを含む回路。

$$I=\frac{dQ}{dt}$$ に注意



1、スイッチ1では、次の微分方程式が成り立つ。

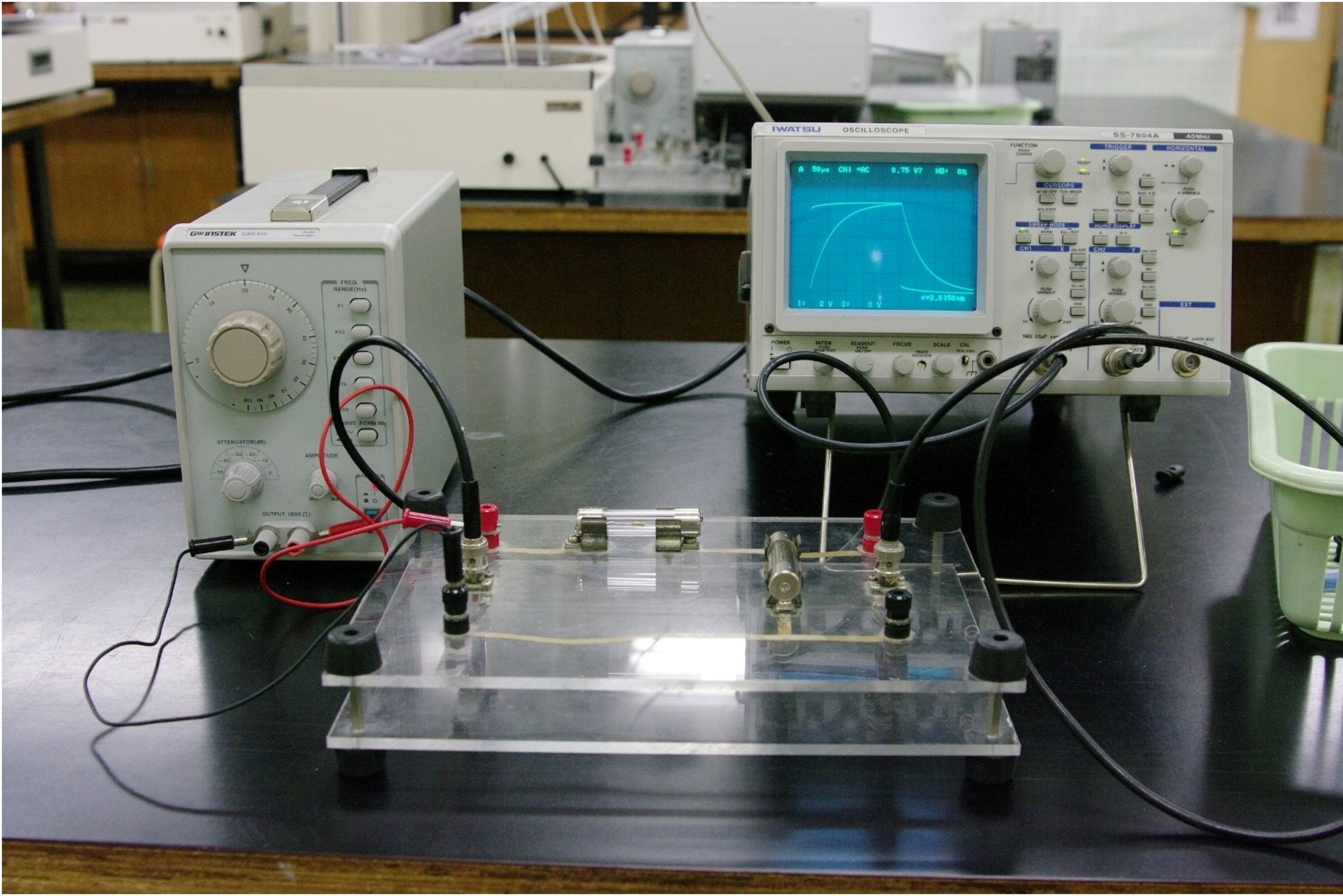
$$RI+\frac{Q}{C}=E$$ または、 $$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E$$

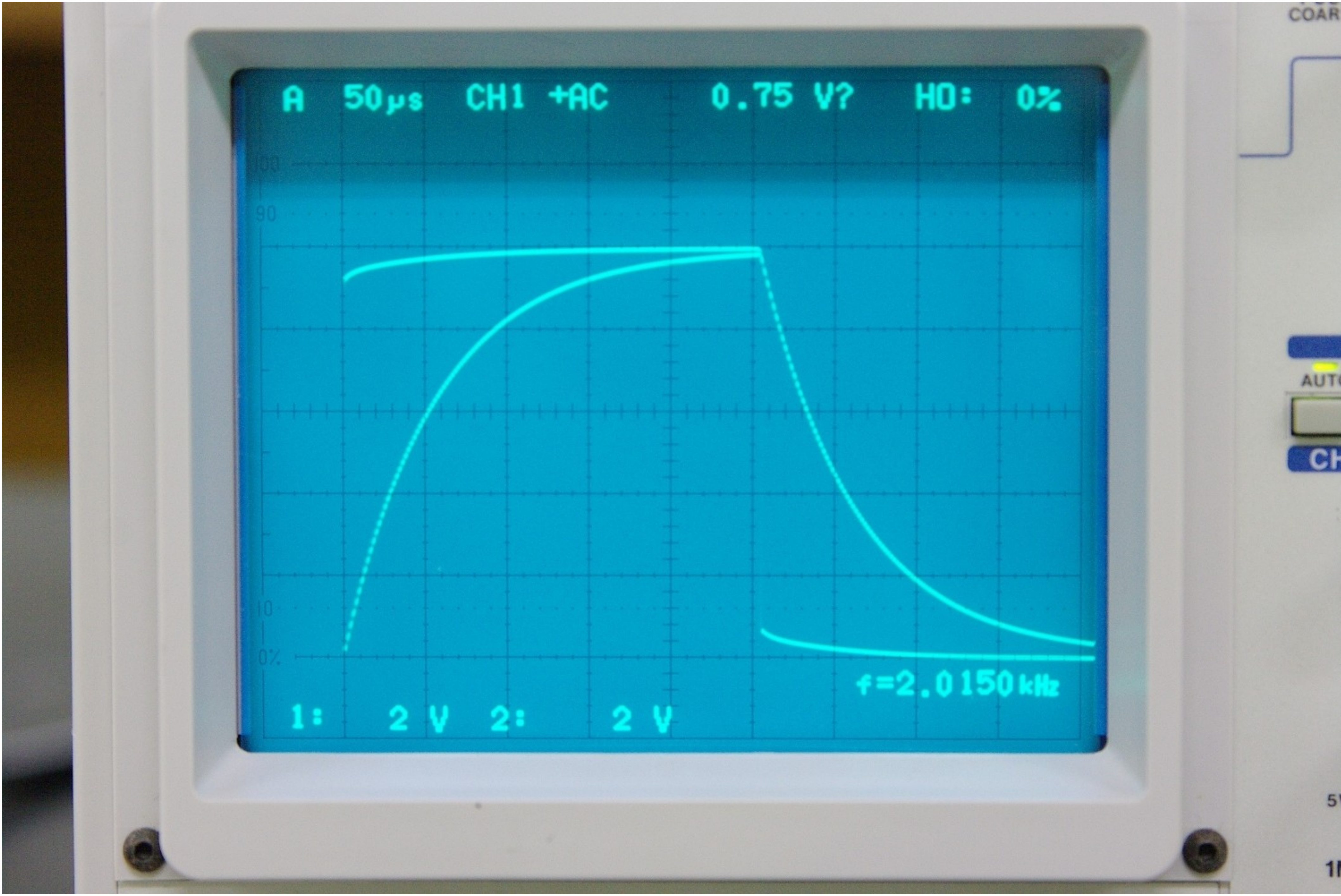
このまま、電荷の移動が無くなるまで放置する。
最終的にコンデンサーに蓄えられる電荷 Q_0
を求めよ。

2、スイッチ2では、次の微分方程式が成り立つ。

$$RI+\frac{Q}{C}=0$$ または、 $$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

時刻 $t=0$ で、スイッチを1から、2に切り替えたとして、コンデンサーに蓄えられた電荷 Q の時間変化を示せ。


GW INSTEK
IWATSU
OSCILLOSCOPE
SS-7804A
40MHz


A 50μs CH1 +AC 0.75 V? HO: 0%
100
90
10
0%
f=2.0150kHz
1: 2 V 2: 2 V

積分法則のまとめ

面積分	$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$	ガウスの法則
線積分	$\oint_{[面積の周囲]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$	電磁誘導の法則
面積分	$\int_{[閉曲面上]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$	磁場のガウスの法則
線積分	$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I$	アンペールの法則

そろっている

バラバラ?

電場と磁場の対称性を良くする試み

Q_m ：単磁極(モノポール)と

I_m ：磁流[単磁極の流れ]を仮定すると

面積分 $$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$$ ガウスの法則

線積分 $$\oint_{[面積の周囲]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \boxed{-\sum_{[面積を通る]} I_m} \boxed{-\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS}$$

電磁誘導の法則

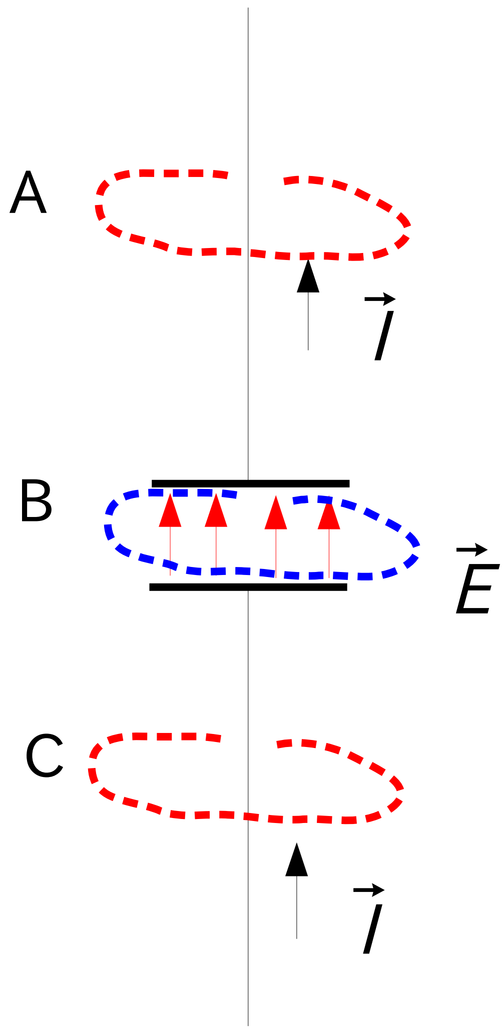
面積分 $$\int_{[閉曲面上]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = \boxed{\sum_{[閉曲面内部]} Q_m}$$ 磁場のガウスの法則

ここは、まだ、対照的でない。

線積分 $$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I \quad \boxed{}$$

アンペールの法則

変位電流(マクスウエルの考察)



電流の途中にコンデンサーを置くとき、
A、Cでのアンペールの法則は

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad \ldots(1)$$

と与えられる。

左辺の線積分の位置をAからCまで動かす時、
実際の電流が流れないBで、左辺の値が突然0に
なるのは不自然。電場が電流に代わって同じ
働きをしているに違いない。

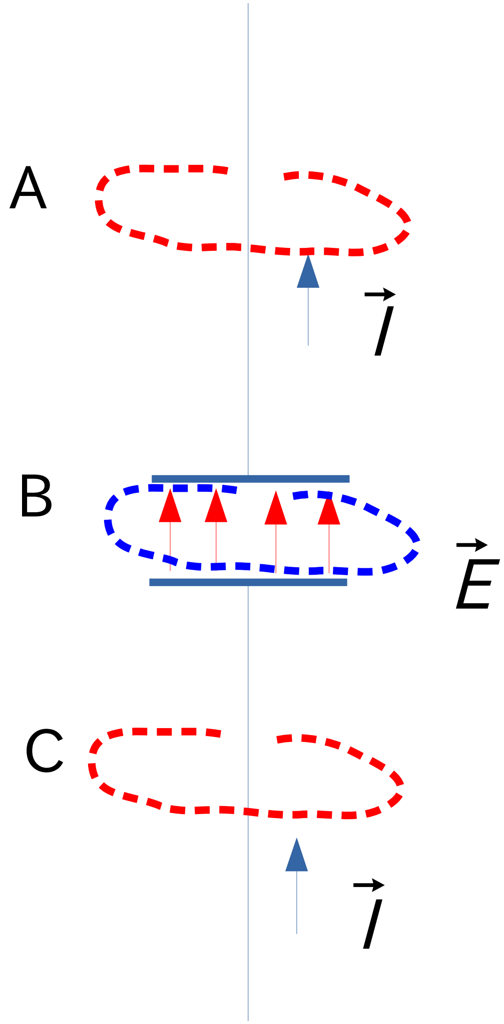
コンデンサーでは $I = \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\varepsilon_0 E\, S\right)$

が成り立つので、電流に代わり、

$$\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(E\, S\right)$$

が電流の働きをする。

変位電流(マクスウエルの考察)II



コンデンサーの周囲のアンペールの法則は

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \left[\varepsilon_0 \frac{d}{dt}(E\,S) \right] \qquad \ldots(2)$$

となる。

したがって、A、B、Cすべての点で成り立つのは、
(1)と合わせて、

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}(E\,S) \qquad \ldots(3)$$

である。

対称性を持つ積分方程式たち

電場の面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \boxed{\sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q/\varepsilon_0}$$

（電場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \boxed{-\sum_{[\text{面積の中を通る}]} I_m} - \boxed{\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS}$$

（電磁誘導の法則）

磁場の面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = \boxed{\sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q_m}$$

（磁場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \boxed{\sum_{[\text{面積の中を通る}]} I} + \varepsilon_0\mu_0 \boxed{\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$$

（アンペール・マクスウエルの法則）

電場の面積分に関係

電荷に関係する

電流に関係する

磁場の面積分に関係

単磁極と、磁流はまだ見つかっていない。

マクスウエルの方程式の積分型

電場の
面積分

$$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$$

（電場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

（電磁誘導の法則）

磁場の
面積分

$$\int_{[閉曲面上]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$$

（磁場のガウスの法則）

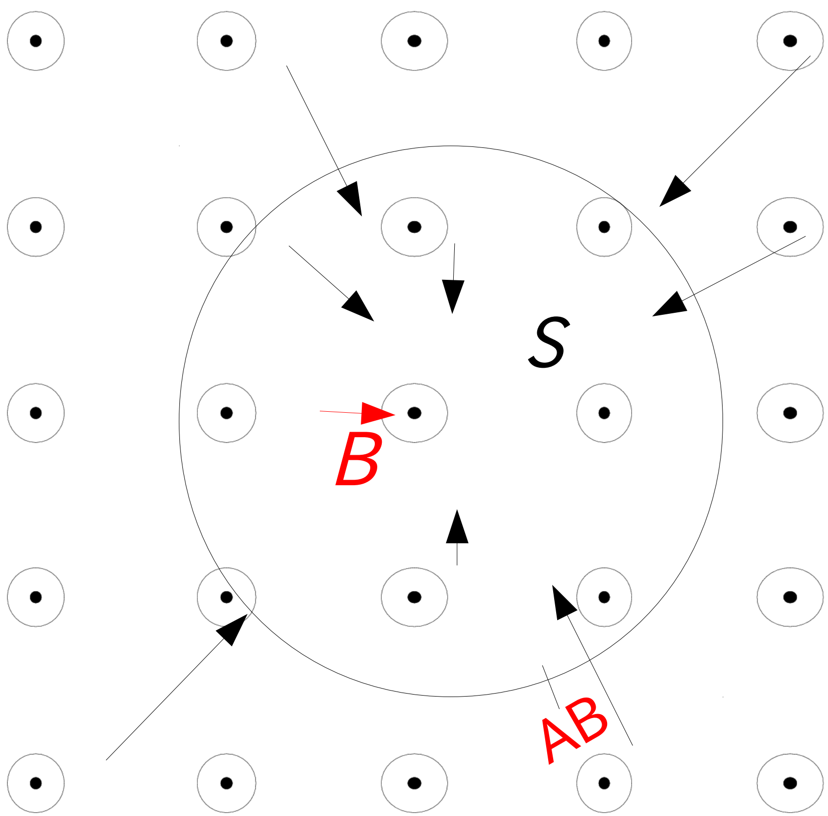
線積分

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I \quad \boxed{+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$$

（アンペール・マクスウエルの法則）

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。

今日の問題



一様な磁場があり、その中に磁場に垂直に円形で面積Sの導線があり、一箇所切れ目があり、僅かに離れている両端をA,Bとする。

1, 磁場の強さが時間の関数として、

$$B = b \cdot t + B_0$$

のように変化するとき、A,Bに発生する起電力を求めよ。

2, 磁場の強さが時間の関数として、

$$B = B_0 \sin(\omega t)$$

のように変化するときでは、起電力はどうなるか。