一様な磁場中の荷電粒子の運動方程式は、

荷電粒子の速度を

$$\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

一様な磁場ベクトルを

$$\vec{B}=(B_x, B_y, B_z)$$

とおくと、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=q(\vec{v}\times\vec{B})$$

特に、運動エネルギーは、

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$$

だから、

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)=\vec{v}\cdot\left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

だが、運動方程式を代入すると、

$$\frac{dE}{dt}=\vec{v}\cdot\left(q(\vec{v}\times\vec{B})\right)=q[\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})]=\boxed{0} \qquad \left(\vec{v}\perp(\vec{v}\times\vec{B})\right)$$

つまり、磁場中では（加速度は受けるが）運動エネルギーは変化しない。

一様な磁場中の荷電粒子の運動

運動方程式　$m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$　を、

$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

$$\vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$$

とおいて解く。ここで磁場はz軸に平行と考えてみると、

$$\vec{B}\,||\,\hat{k} \longrightarrow \vec{B}=B_z\hat{k}=B\cdot\hat{k}$$

$$m\frac{d}{dt}\left(v_x\underline{\hat{i}}+v_y\underline{\hat{j}}+v_z\hat{k}\right)=q\left(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}\right)\times\left(B\cdot\hat{k}\right)$$

$$=q\left(v_xB\left(\hat{i}\times\hat{k}\right)+v_yB\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)\right)$$

$$=q\left(-v_xB\cdot\underline{\hat{j}}+v_yB\cdot\underline{\hat{i}}\right)$$

つまり、

$$m\frac{dv_x}{dt} = q \cdot v_y \cdot B \qquad \text{...(a)}$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -q \cdot v_x \cdot B \qquad \text{...(b)}$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = 0$$

b を a に代入して

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m}\frac{dv_y}{dt} \cdot B = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0$$

$$v_x = v_\perp \sin(\omega t)$$

ただし、 $\omega = \frac{qB}{m}$

$$v_y = v_\perp \cos(\omega t)$$

$$v_z = v_\parallel$$

$$v_x = v_\perp \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad x = \int v_x\, dt + x_0 = \int v_\perp \sin(\omega t)\, dt + x_0 = -r_0 \cos(\omega t) + x_0$$

$$v_y = v_\perp \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad y = \int v_y\, dt + y_0 = \int v_\perp \cos(\omega t)\, dt + y_0 = \quad r_0 \sin(\omega t) + y_0$$

$$v_z = v_\parallel$$

$$\Rightarrow \quad z = v_\parallel t + z_0$$

$$r_0 = \frac{v_\perp}{\omega} = \frac{m v_\perp}{qB} = \frac{p_\perp}{qB}$$

まとめると、

$$x = -r_0 \cos(\omega t) + x_0$$

$$y = \quad r_0 \sin(\omega t) + y_0$$

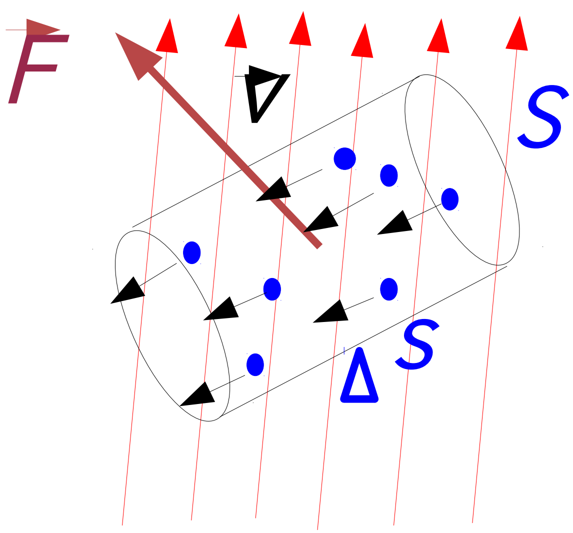
$$z = v_\parallel t + z_0$$

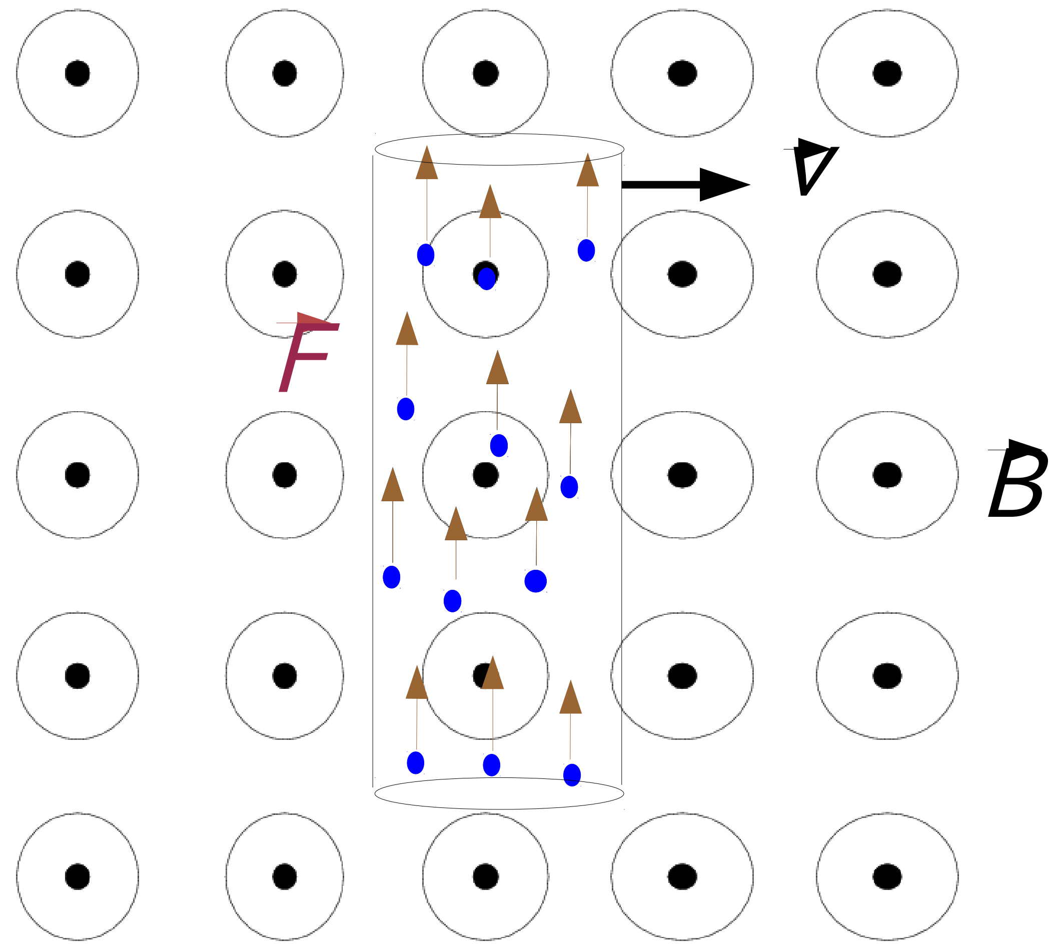
Z 方向の螺旋運動

電磁誘導

動いている物体の中の電子に、磁場があたえる力

$$\vec{F}=-e(\vec{v}\times\vec{B})$$

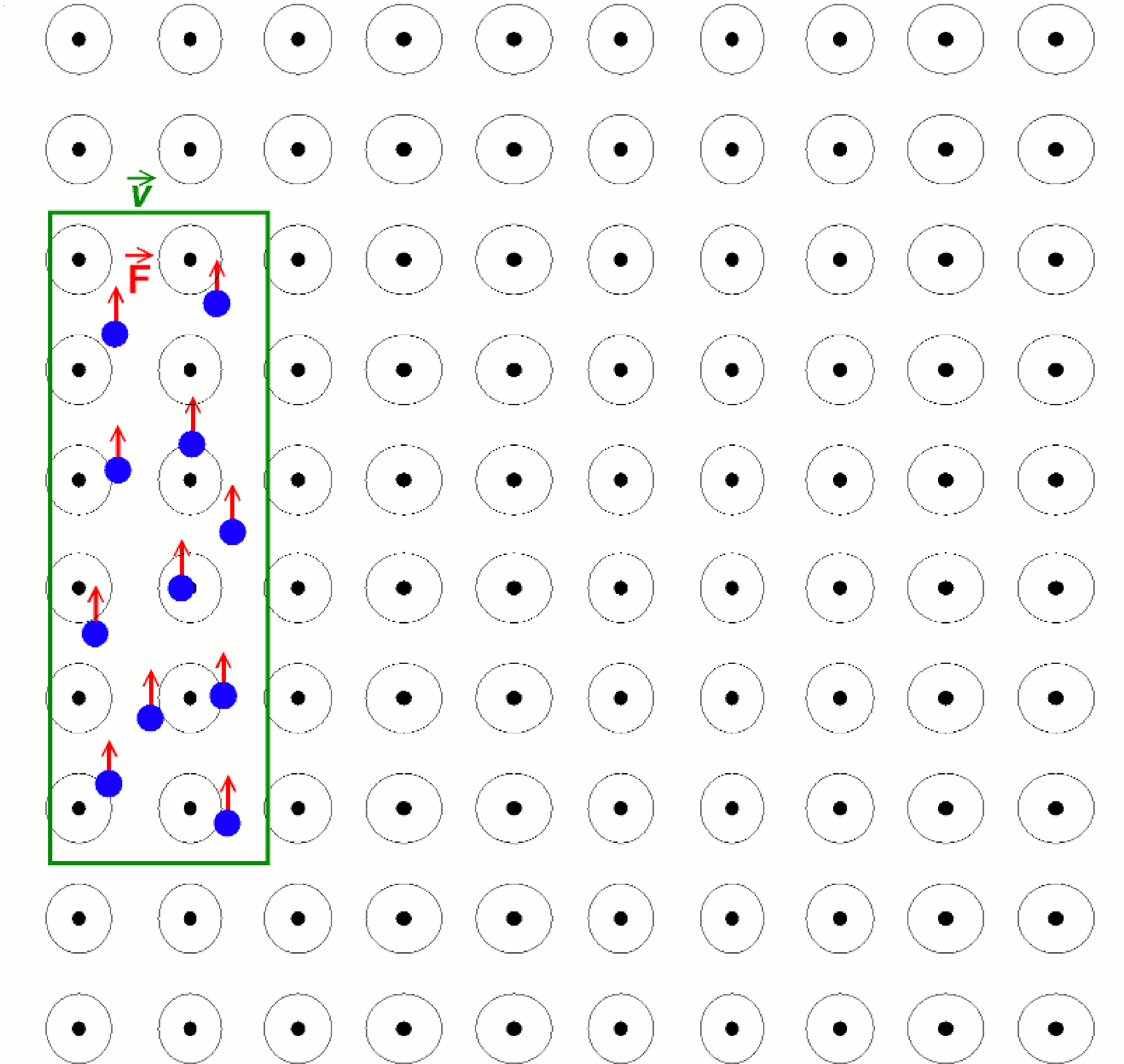




まだ、電子の移動は考えない。

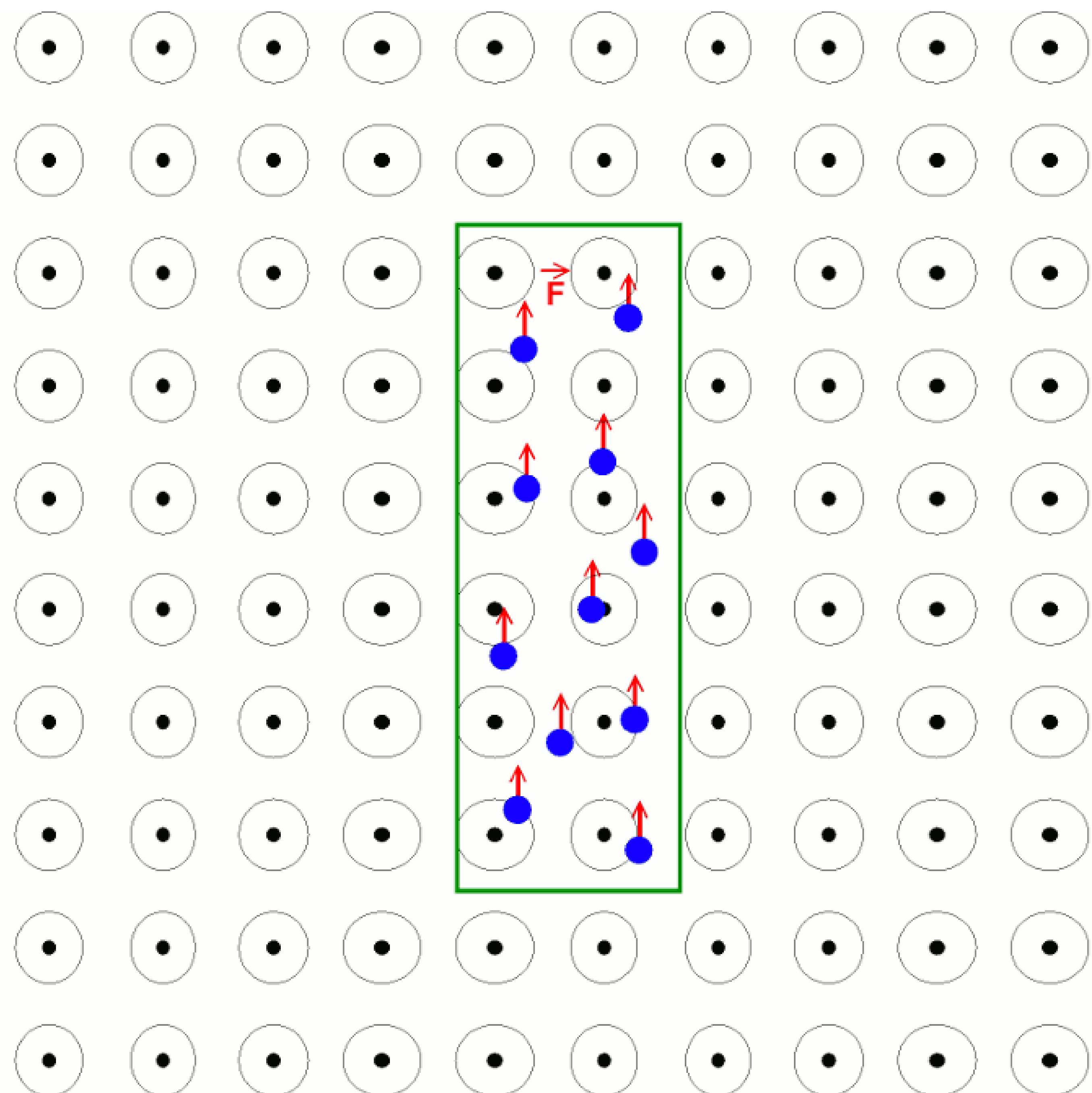
この力は電場による力：　$\vec{F}=-e\vec{E}'$　$\vec{E}'=(\vec{v}\times\vec{B})$と同じ。

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B}) = -e\vec{E}\,'$$

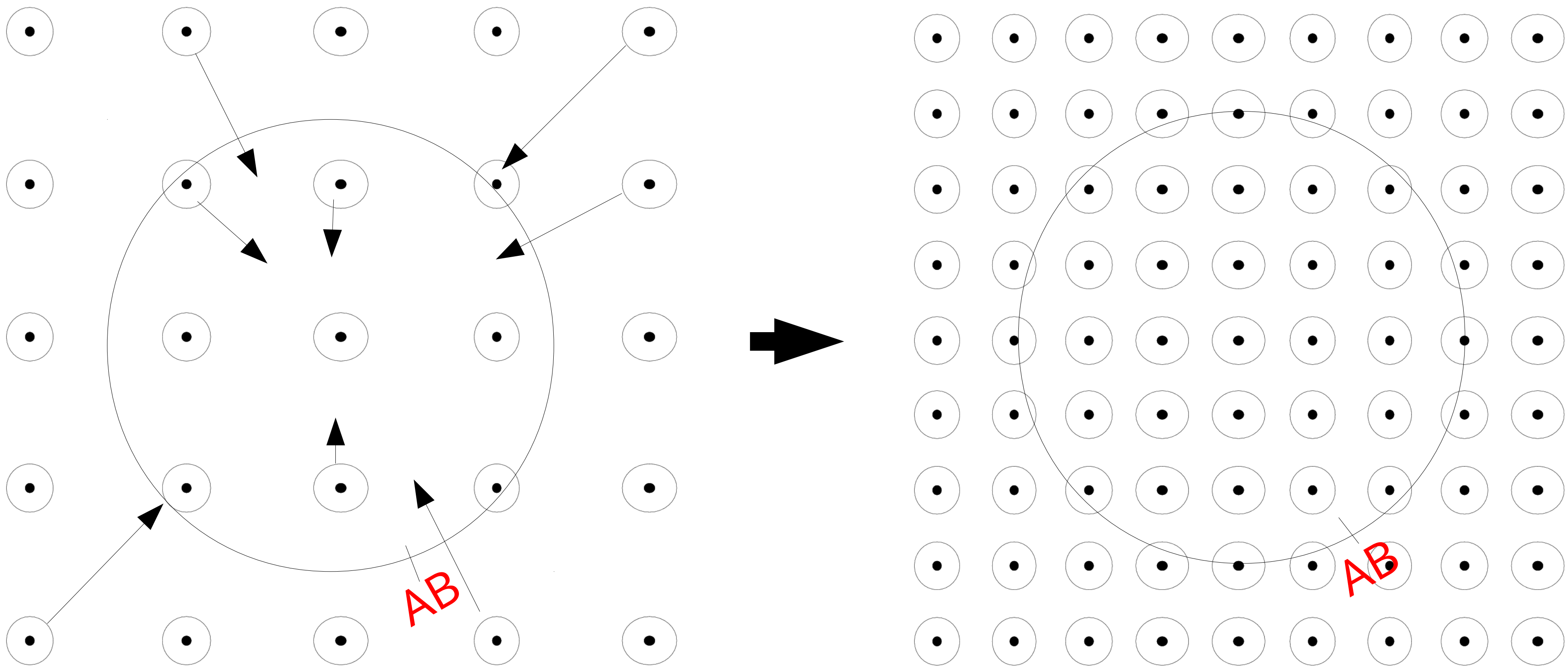


$\vec{B}$が、速度 $-\vec{v}$ で進む場合

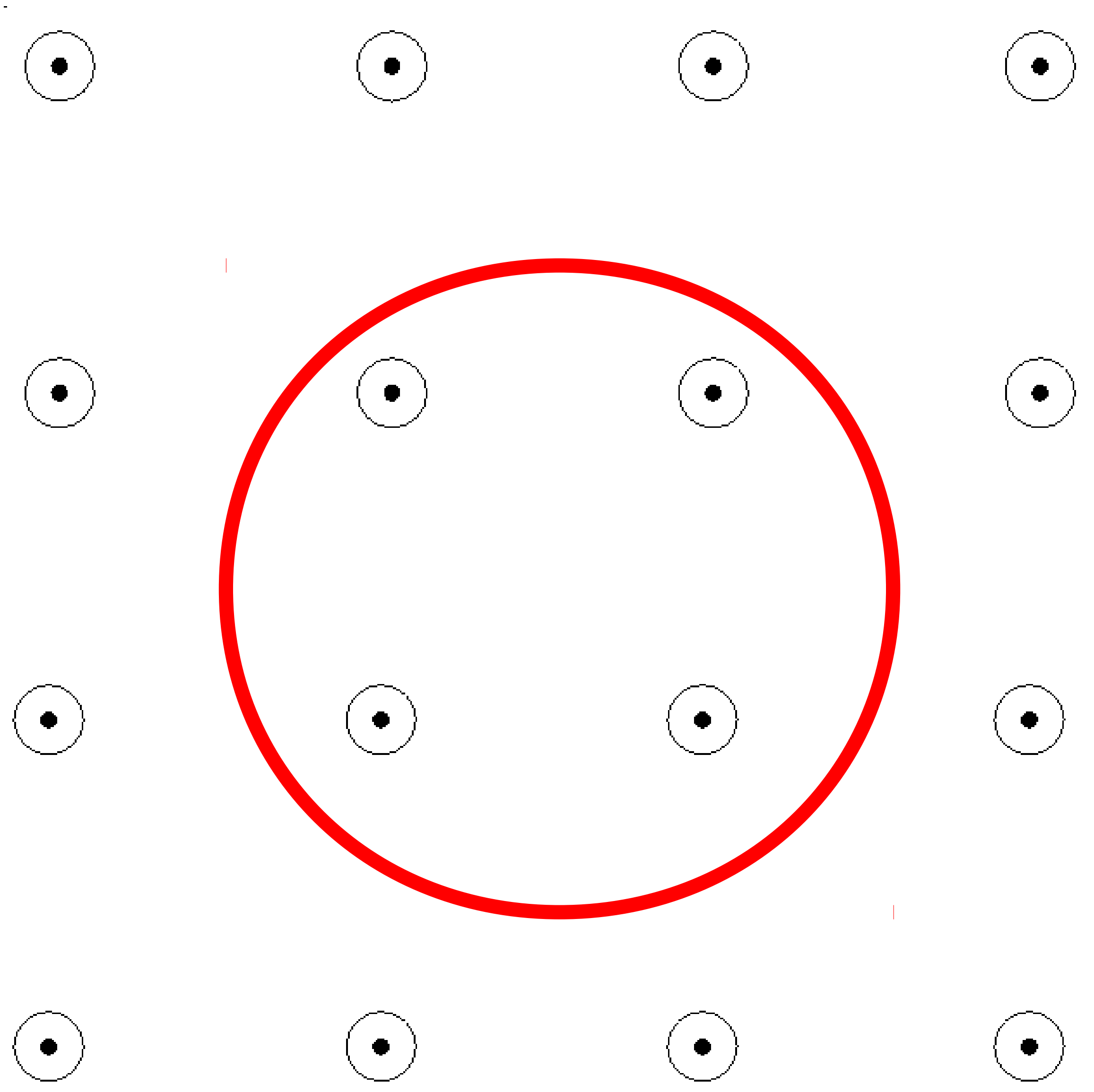
$$\vec{F} = -e\vec{E}' = -e[-(\vec{v} \times \vec{B})]$$



円形の導線の中の磁場が、次第に強くなる場合、

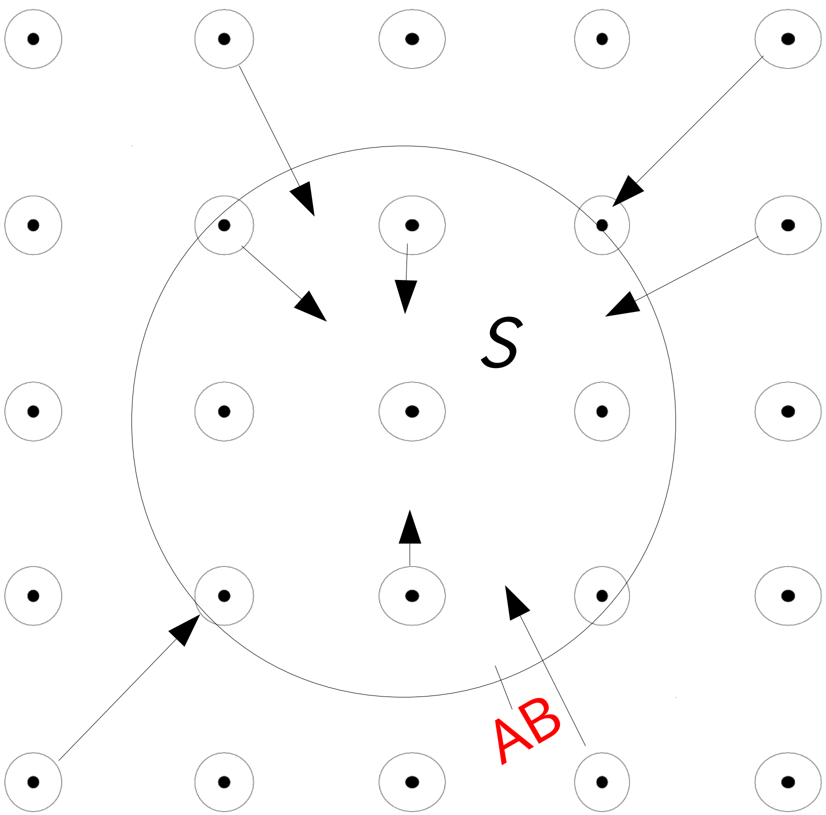


右の図の4倍の磁力線密度



磁場が強くなる時は、磁力線の移動が伴う。

電磁誘導(3)



一周積分

$$\oint [(\vec{v}_{[\,磁場の移動する速度\,]}) \times \vec{B}] \cdot d\vec{s}$$

は、積分路内に単位時間に入って来る磁力線の数であるが、同様な量は、下の式でも計算できる。

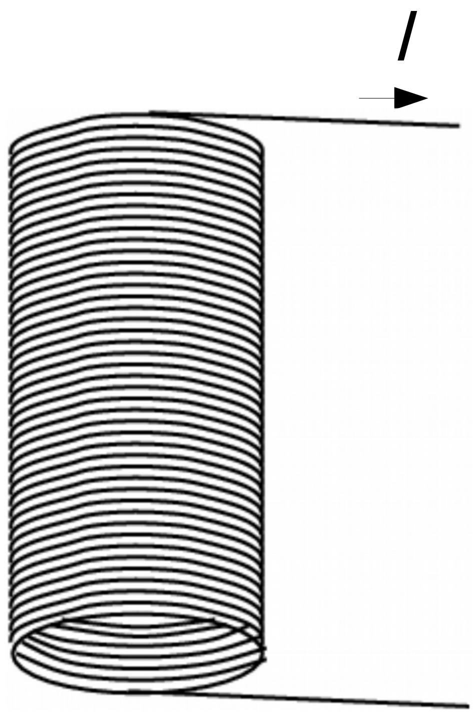
$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

注意、 $\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$ は面積Sを通る磁力線の数を数える操作。(ガウスの法則参照) 結局、AB間の電位差は、

$$V_{[AB]} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

と書ける。(誘導起電力)

相互誘導



ソレノイドに巻きついた導線に発生する電位差は、ソレノイドの磁場： $B = \mu_0 n_1 I$ より、

$$V_{[AB]} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

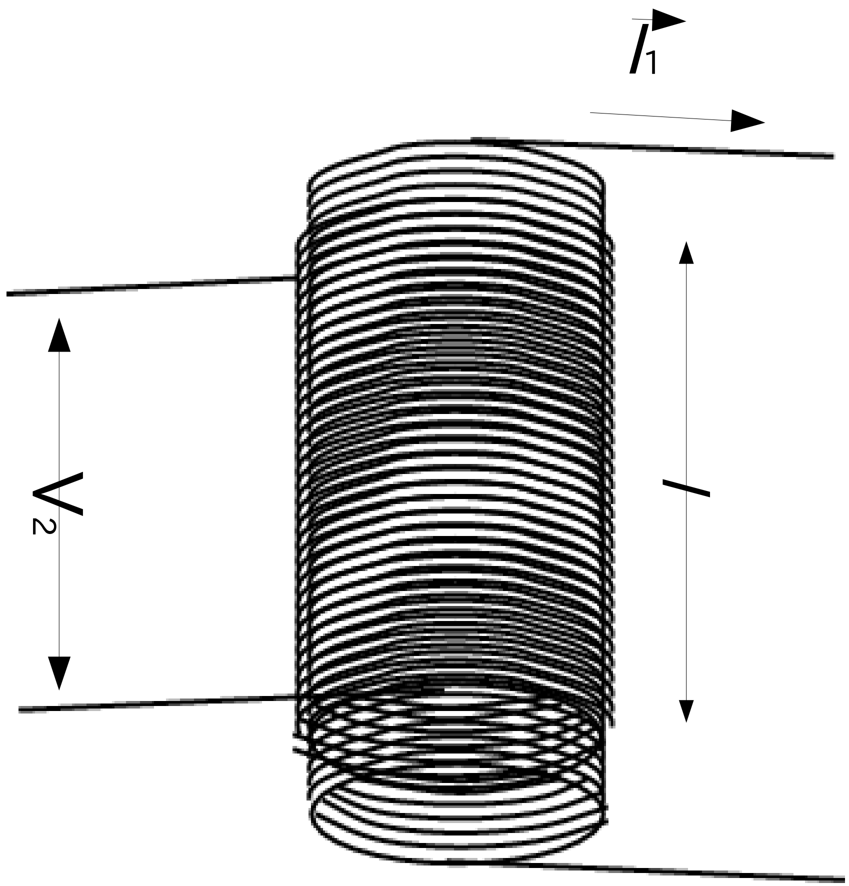
$$= -\frac{d[B\cdot S]}{dt} = -S\mu_0 n_1 \frac{dI}{dt}$$

この電位差は、電流を流す起電力でもある。
巻き数が N 回ならば、N 倍の起電力。

$$V = -N\cdot S\mu_0 n_1 \frac{dI}{dt}$$

直接接続されていない、コイル同士の
磁気による結び付きを相互誘導と呼ぶ。

トランス



二つのソレノイドがかさなりあっている。
かさなりの長さを l、それぞれの巻き線密度をn_1, n_2、ソレノイド1 を流れる電流を I_1 とする。

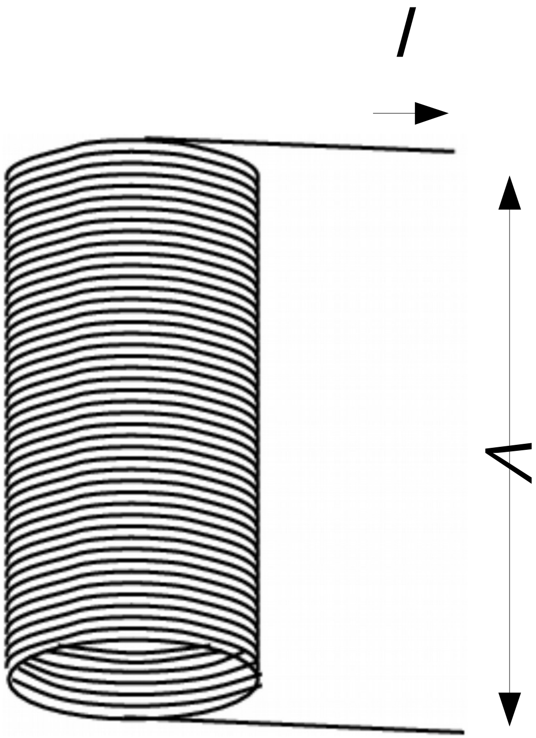
ソレノイドの両端で、磁場が広がる効果を無視すると、ソレノイド2 に誘導される起電力V_2 は、重なっているソレノイド2の巻数　$N = l \cdot n_2$ より、

$$V_2 = -l \cdot n_2 \cdot S \mu_0 n_1 \frac{dI_1}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

と書ける。

電流の変化と起電力の比例定数 M を相互インダクタンスと呼ぶ。

自己誘導



一つのソレノイドの磁場の強さの変化は、
そのソレノイド自身にも起電力を引き起こす。
この現象を自己誘導と呼ぶ。
その起電力は、相互誘導の強さを与える式、

$$V_2 = -l n_2 \cdot S \mu_0 n_1 \frac{dI_1}{dt}$$

に $n_2 = n_1$ を代入、不要な添字を整理して、

$$V = -l S \mu_0 n_1^2 \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

と与えられる。

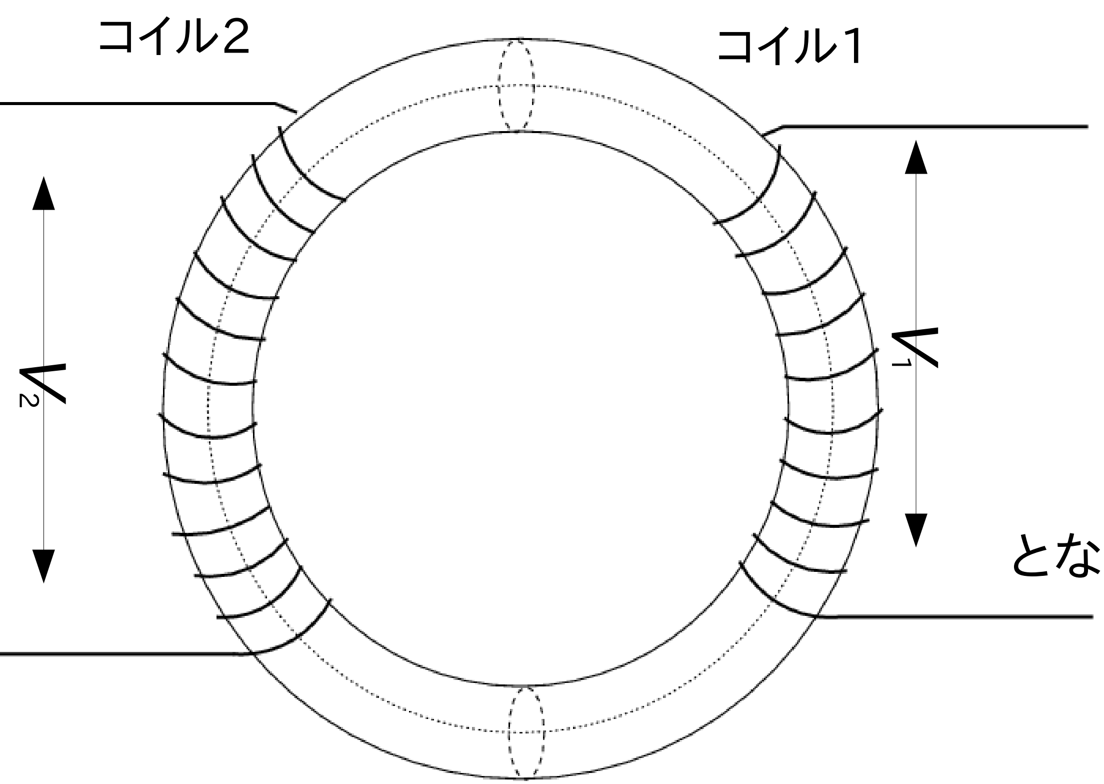
この電流の変化率と起電力の比例定数 L を
自己インダクタンスと呼ぶ。

トランス2

左下の様な、ドーナッツ型の磁性体の芯をもつトランスは、磁束(磁場)の漏れ出しが少なく、効率が良い事が知られている。(トロイダル型トランスとよぶ)

この様な場合コイルのかさなりの長さは、全周の長さl、

巻き線密度は、$n_1 = N/l$と考えてよい。



$$V_1 = -S\mu \frac{N_1^2}{l}\frac{dI_1}{dt}$$ 自己誘導

$$V_2 = -S\mu \frac{N_1 \cdot N_2}{l}\frac{dI_1}{dt}$$ 相互誘導

となるので、

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$ が得られた。

今日の問題、一様で、静止している磁場中の荷電粒子

変化しない磁場中で荷電粒子が
運動しても、エネルギー変化が起きない
ことを示せ。

磁場中の電子の運動