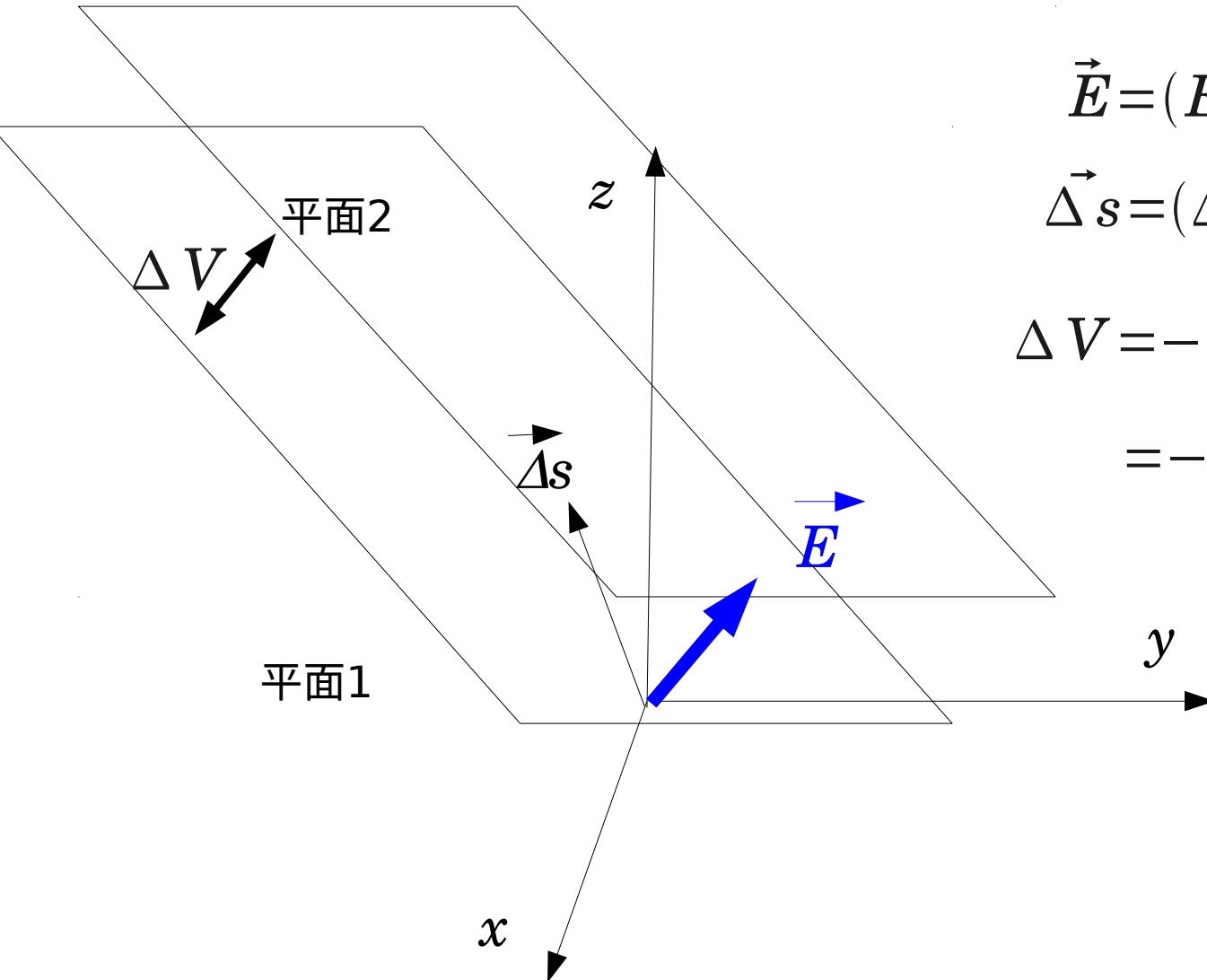


電位から電場を求める。

電位差の2つの計算の比較

A. 電場と距離ベクトルの内積 (座表を用いた、3次元イメージ)



$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$$

$$\vec{\Delta s} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \vec{\Delta s}$$

$$= -(E_x \cdot \Delta x + E_y \cdot \Delta y + E_z \cdot \Delta z)$$

B, 電位が位置の関数として与えられているとして、

x, y, z それぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ だけ変化するとき、 $V(x, y, z)$ の変化は、

$$\Delta V = V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - V(x, y, z)$$

$$= V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - V(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$$

$$+ V(x + \Delta x, y + \Delta y, z) - V(x + \Delta x, y, z)$$

$$+ V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

変化する変数が一つだけになるよう、分解して差をとる。

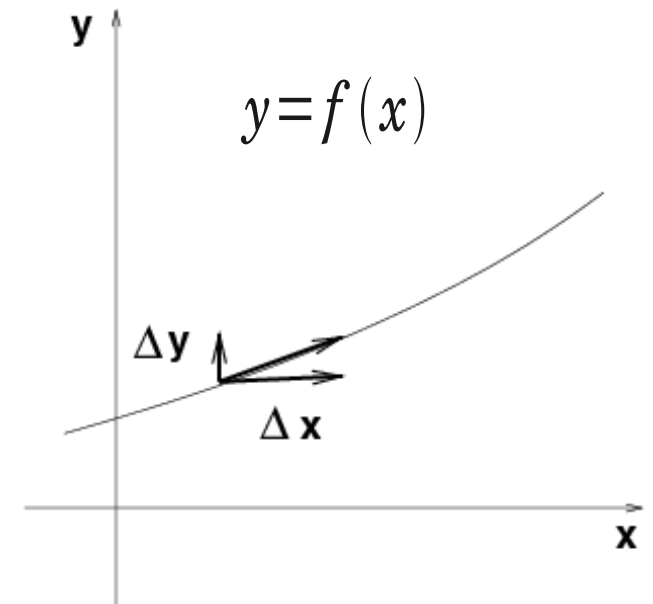
$$\simeq \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) \cdot \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}(x + \Delta x, y, z) \cdot \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}(x + \Delta x, y + \Delta y, z) \cdot \Delta z$$

$$\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z$$

微分：物理では、小さい量の比(割り算)。

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \simeq \frac{\Delta f}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \simeq \frac{df}{dx} \cdot \Delta x \quad (= f'(x) \cdot \Delta x)$$



偏微分は、他の変数を定数の様に扱う。

$$\frac{\partial V}{\partial x} \simeq \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

x による偏微分

$$\Delta V = V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z) \simeq \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \Delta x$$

A, B を比較

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{s}$$

$$= -(\mathbf{E}_x \cdot \Delta x + \mathbf{E}_y \cdot \Delta y + \mathbf{E}_z \cdot \Delta z)$$

$$\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z$$

A, 電磁場のイメージ

B, 偏微分の性質

すなわち、

$$\vec{E} = (\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z) = - \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \left(\simeq - \left(\frac{\Delta V}{\Delta x}, \frac{\Delta V}{\Delta y}, \frac{\Delta V}{\Delta z} \right) \right)$$

この表現、

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = - \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \left(\approx - \left(\frac{\Delta V}{\Delta x}, \frac{\Delta V}{\Delta y}, \frac{\Delta V}{\Delta z} \right) \right)$$

については、「ベクトル解析」で使われる記号があり、

$$\vec{E} = -\mathbf{grad} V \quad \text{または、}$$

$$\vec{E} = -\nabla V \quad \text{と書かれ、} V \text{ の勾配と呼ぶ。}$$

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

この記号は、
ナブラと呼ばれるベクトル・微分演算子である。

電場と物質の関係、コンデンサーの中に物質を入れた、思考実験

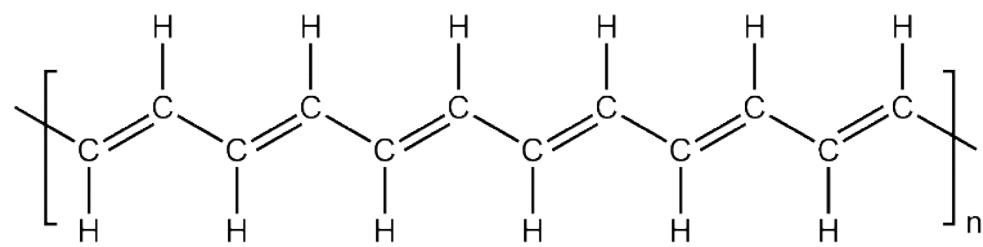
導体と不導体(誘電体)

周期表

1																	18
1 H	2											13	14	15	16	17	2 He
3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
11 Na	12 Mg	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Ba	*1	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra	*2	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Uub	113 Uut	114 Uuq	115 Uup	116 Uuh	117 Uus	118 Uuo
*1 ランタノイド:	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu		
*2 アクチノイド:	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr		

- 1 常温で固体
- 1 常温で液体
- 1 常温で気体
- 金属元素
- 半金属元素
- 非金属元素
- 人工元素
- アルカリ金属
- アルカリ土類金属
- ハロゲン
- 希ガス
- 遷移元素

注：ほとんどの有機化合物は不導体。



今日の問題

クーロン場の電位から、クーロン電場を求めよ。

ヒント：クーロン電場を三次元座標で表現した式

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

から、

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

を用いて、

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

を導く

クーロン場の電位から、電場を求める。

まず、 $V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = V(r)$ を確認。つまり、
電位はベクトル \vec{r} ではなく、スカラー r の関数。

r のみの関数を、 x で偏微分する時は、下の公式が使える。

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x} = \frac{dV(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dV(r)}{dr} \frac{x}{r}$$

ただし、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \quad \text{を用いた。}$$

定数と思って、普通に微分

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \left(\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \text{に注意}\right) \end{aligned}$$

確かに、一個の電荷の作る電場、 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$ と、一致する。