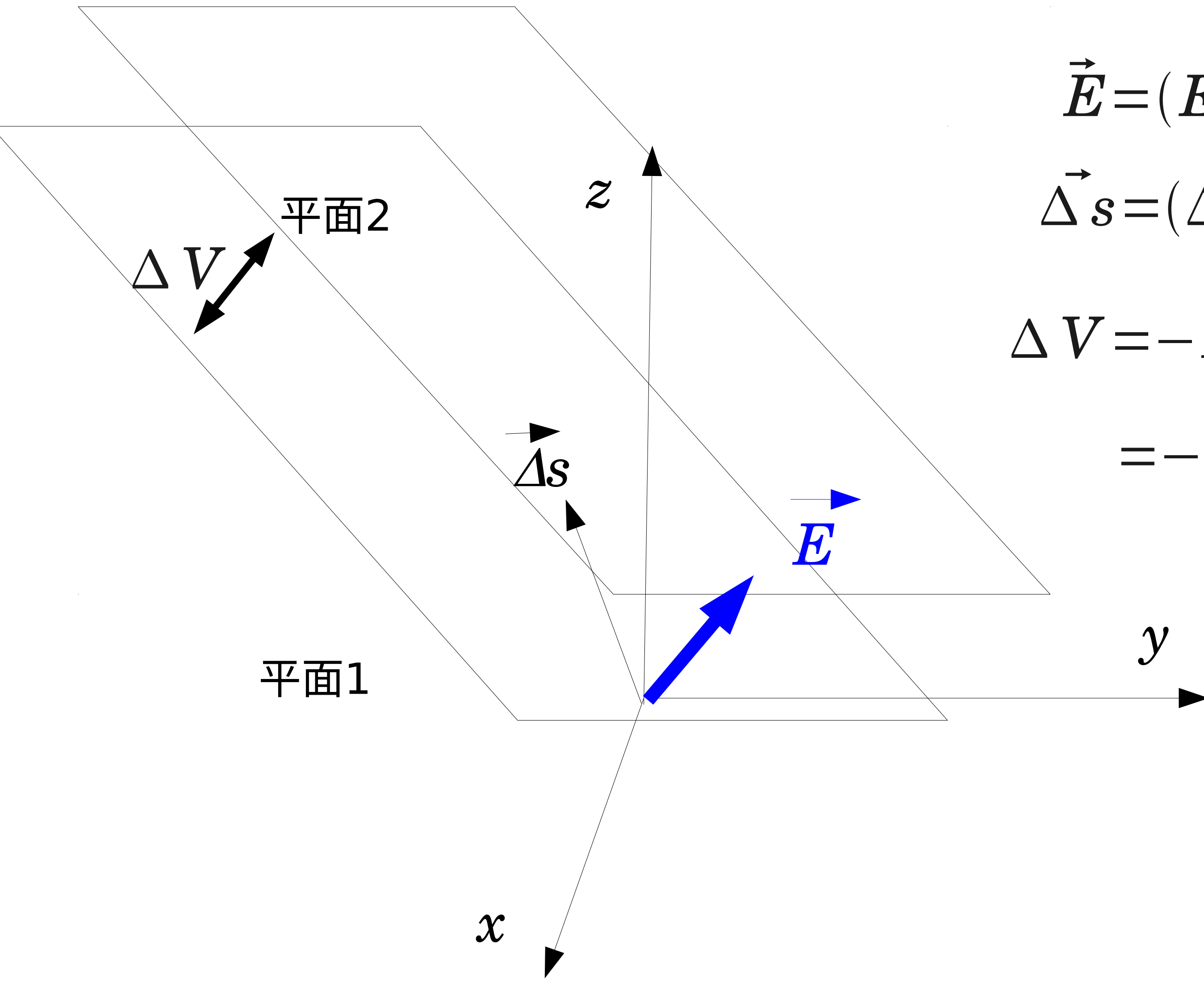
電位から電場を求める。

電位差の2つの計算の比較

A. **電場と距離ベクトルの内積** (座表を用いた、3次元的イメージ)



$$\vec{E}=(E_x, E_y, E_z)$$

$$\vec{\Delta s}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$\Delta V=-\vec{E}\cdot\vec{\Delta s}$$

$$=-(E_x\cdot\Delta x+E_y\cdot\Delta y+E_z\cdot\Delta z)$$

B, 電位が位置の関数として与えられているとして、

x, y, z それぞれΔx, Δy, Δz だけ変化するとき、$V(x,y,z)$ の変化は、

$$\Delta V = V(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - V(x \quad, y \quad, z \quad)$$

$$= V(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) \boxed{- V(x+\Delta x, y+\Delta y, z \quad)}$$

$$\boxed{+ V(x+\Delta x, y+\Delta y, z \quad)} \boxed{- V(x+\Delta x, y \quad, z \quad)}$$

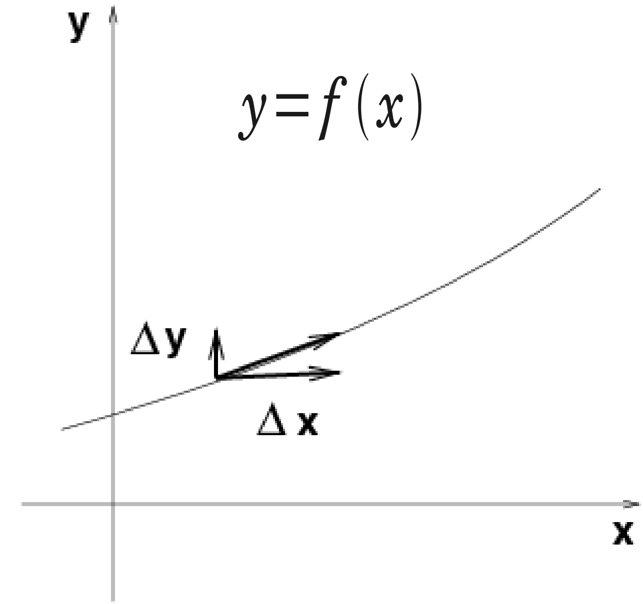
$$\boxed{+ V(x+\Delta x, y \quad, z \quad)} - V(x \quad, y \quad, z \quad)$$

変化する変数が一つだけになるよう、分解して差をとる。

$$\simeq \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z)\cdot\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}(x+\Delta x, y, z)\cdot\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\cdot\Delta z$$

$$\boxed{\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z}$$

微分：物理では、小さい量の比(割り算)。



$$f'(x)=\frac{df}{dx}\simeq\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)\simeq\frac{df}{dx}\cdot\Delta x\ \left(=f'(x)\cdot\Delta x\right)$$

偏微分は、他の変数を定数の様に扱う。

$$\frac{\partial V}{\partial x}\simeq\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}=\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

x による偏微分

$$\Delta V=V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)\simeq\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\Delta x$$

A, B を比較

$$\Delta V = -\vec{E}\cdot\vec{\Delta s}$$

A, 電磁場のイメージ

$$= -\left(E_x \cdot \Delta x + E_y \cdot \Delta y + E_z \cdot \Delta z\right)$$

$$\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z$$

B, 偏微分の性質

すなわち、

$$\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad \left(\simeq -\left(\frac{\Delta V}{\Delta x}, \frac{\Delta V}{\Delta y}, \frac{\Delta V}{\Delta z}\right)\right)$$

この表現、

$$\vec{E}=\left(E_x,E_y,E_z\right)=-\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right)\quad\left(\simeq-\left(\frac{\Delta V}{\Delta x},\frac{\Delta V}{\Delta y},\frac{\Delta V}{\Delta z}\right)\right)$$

については、「ベクトル解析」で使われる記号があり、

$\vec{E}=$ **-grad** V または、

$\vec{E}=-\nabla V$ と書かれ、V の勾配と呼ぶ。

$$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

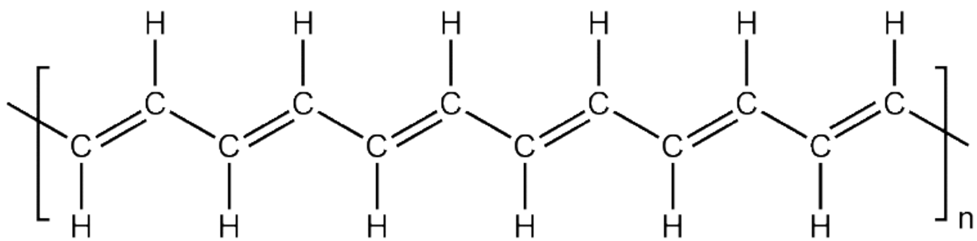
この記号は、
ナブラと呼ばれるベクトル・微分演算子である。

電場と物質の関係、コンデンサーの中に物質を入れた、思考実験

導体と不導体(誘電体)

Wikipediaより

注：ほとんどの有機化合物は不導体。



今日の問題

クーロン場の電位から、クーロン電場を求めよ。

ヒント:　クーロン電場を三次元座標で表現した式

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

から、

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

を用いて、

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

を導く

クーロン場の電位から、電場を求める。

まず、$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = V(r)$ を確認。つまり、

電位はベクトル$\vec{r}$ではなく、スカラーrの関数。

rのみの関数を、xで偏微分する時は、下の公式が使える。

$$\frac{\partial V(r)}{\partial x} = \frac{dV(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dV(r)}{dr}\frac{x}{r}$$

定数と思って、普通に微分

ただし、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

を用いた。

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x, y, z)}{r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

($\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ に注意)

確かに、一個の電荷の作る電場、$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$ と、一致する。