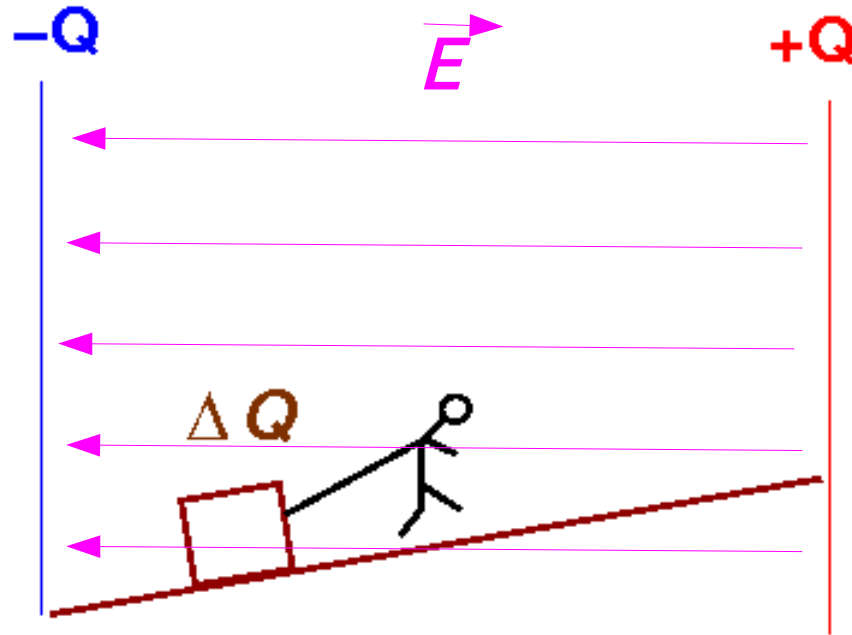


# 電場の持つエネルギー

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷  $\Delta Q$  を移動させる思考実験

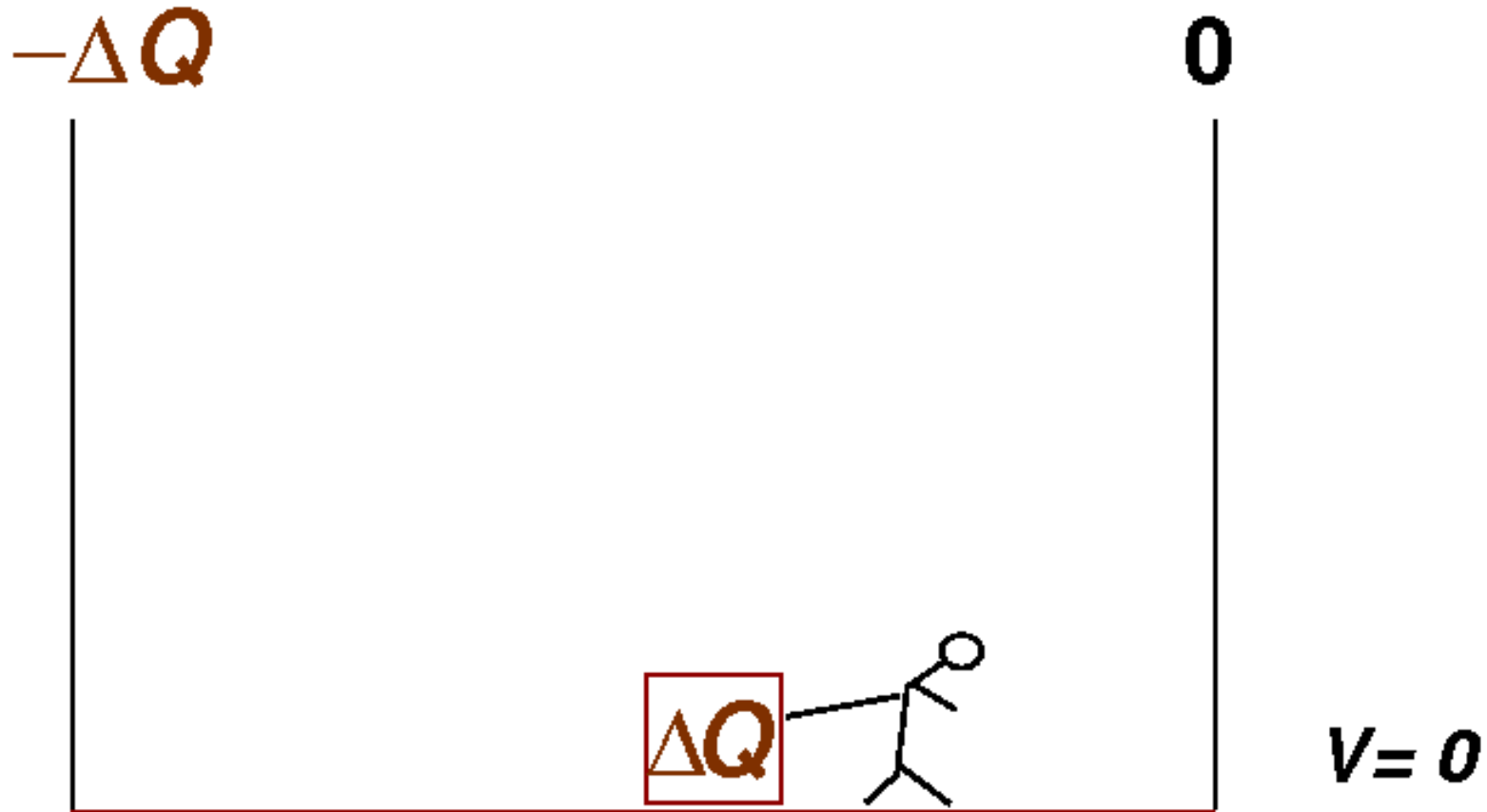


$$V \cdot \Delta Q$$

の仕事が電場に逆らってなされる。

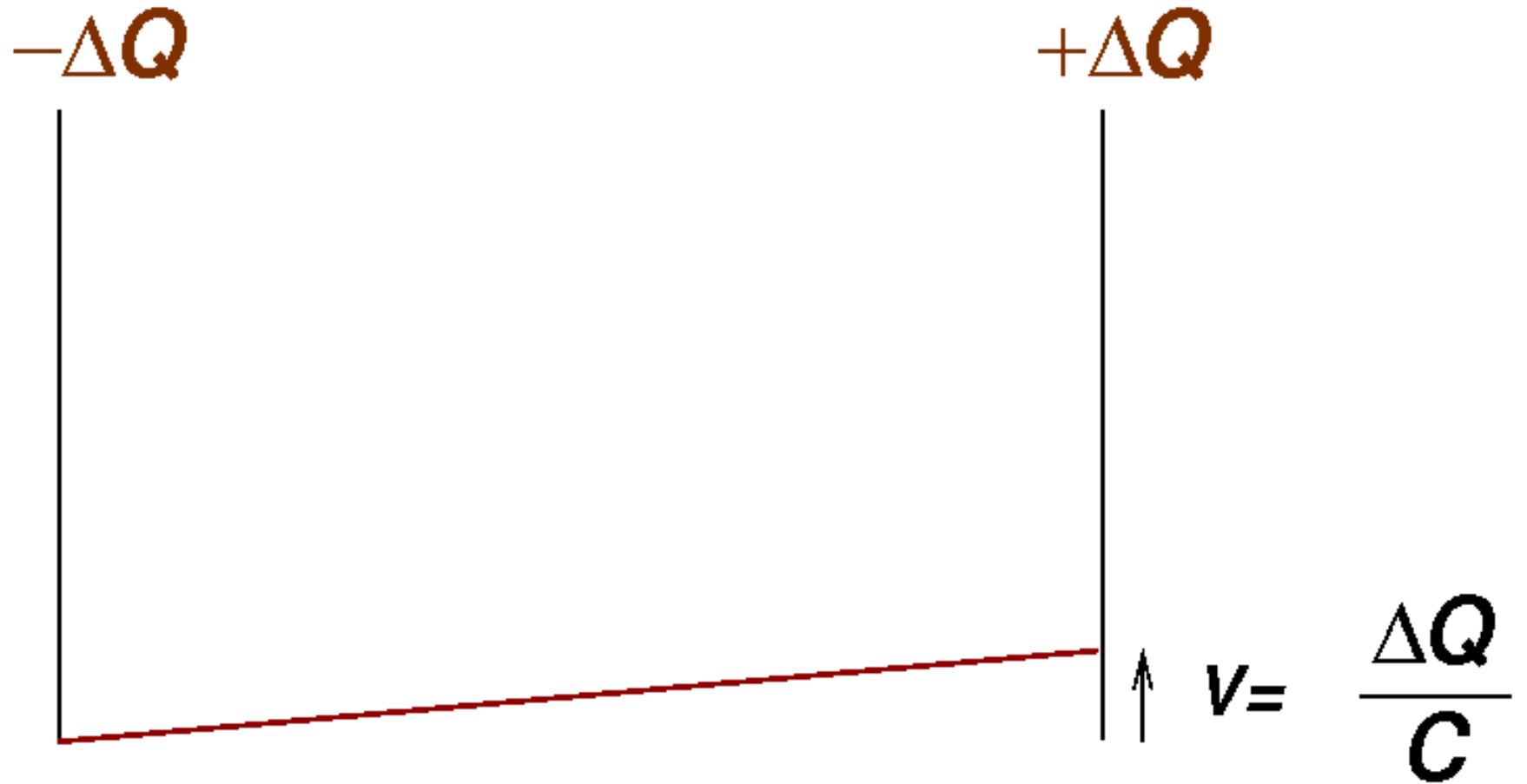
ただし、**実際のコンデンサー**では、  
極板間の電位差が  $\Delta Q$  の移動とともに変化する。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷  $\Delta Q$  を移動させる思考実験



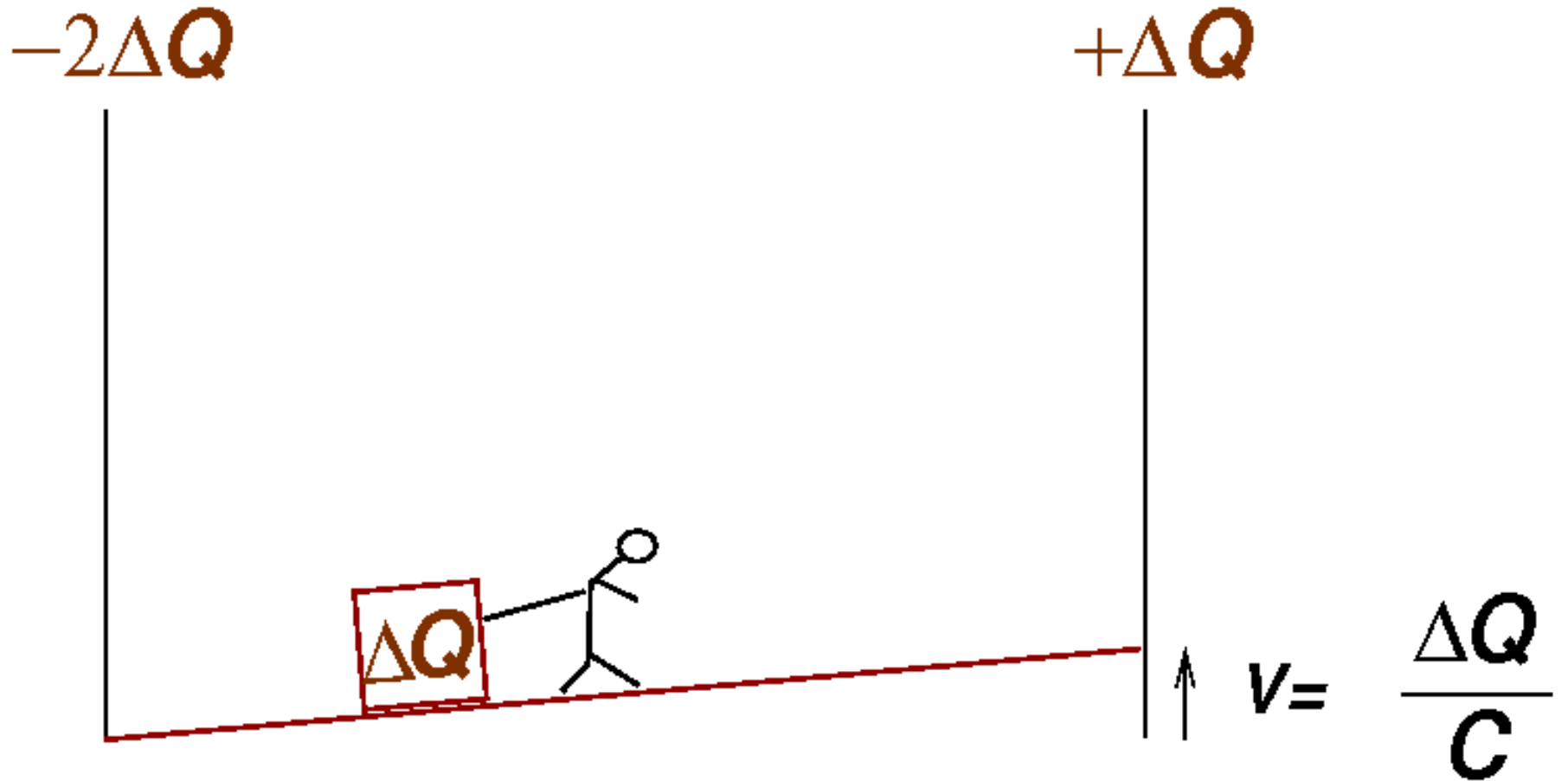
一方の極板の電荷が、 $\Delta Q$  だけ減少して、もう一方の極板へ。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷  $\Delta Q$  を移動させる思考実験



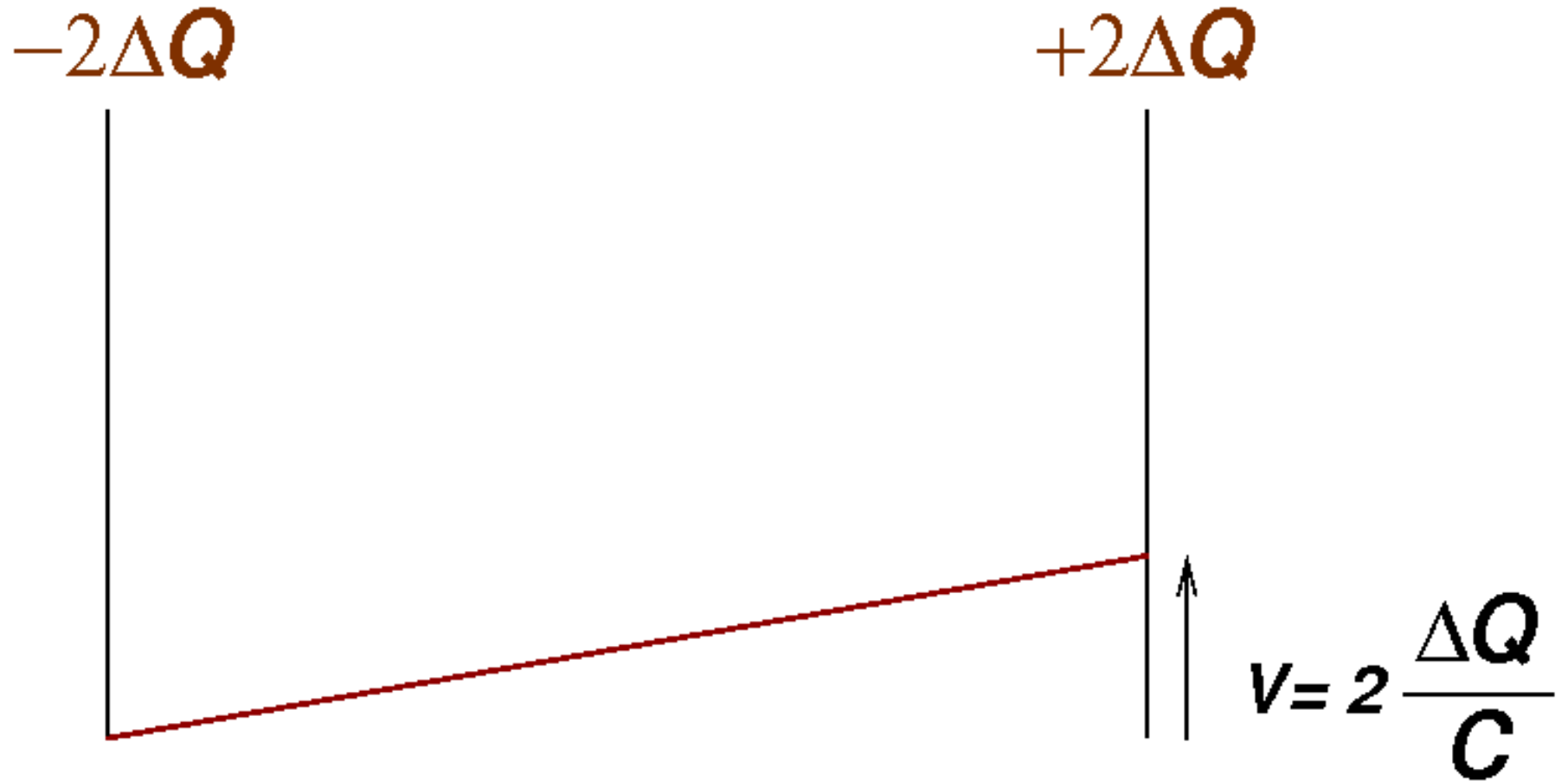
極板間の電位差が、 $\frac{\Delta Q}{C}$ だけ増加する。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷  $\Delta Q$  を移動させる思考実験



次の  $\Delta Q$  の移動は、増加した電位に逆らった移動。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷  $\Delta Q$  を移動させる思考実験

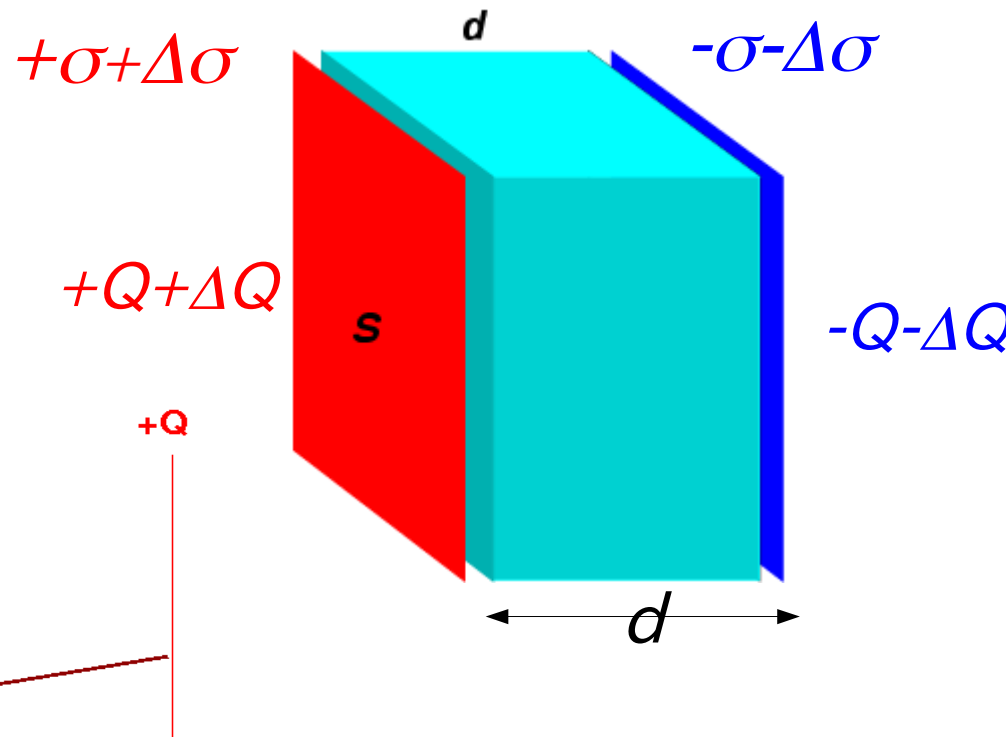
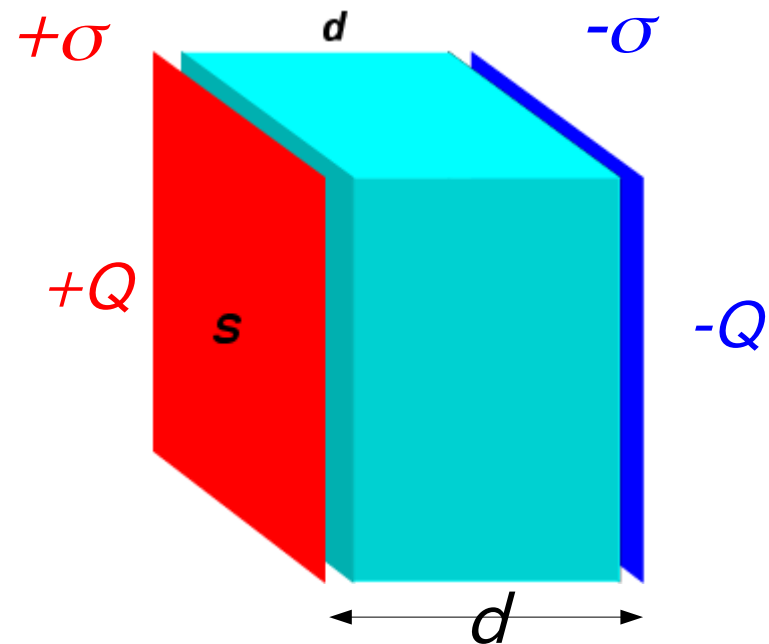


2回  $\Delta Q$  が移動した後の電位差

# コンデンサーの中の微小電荷の移動前後の比較

$\Delta Q$ の電荷の移動の前

$\Delta Q$ の電荷の移動の後



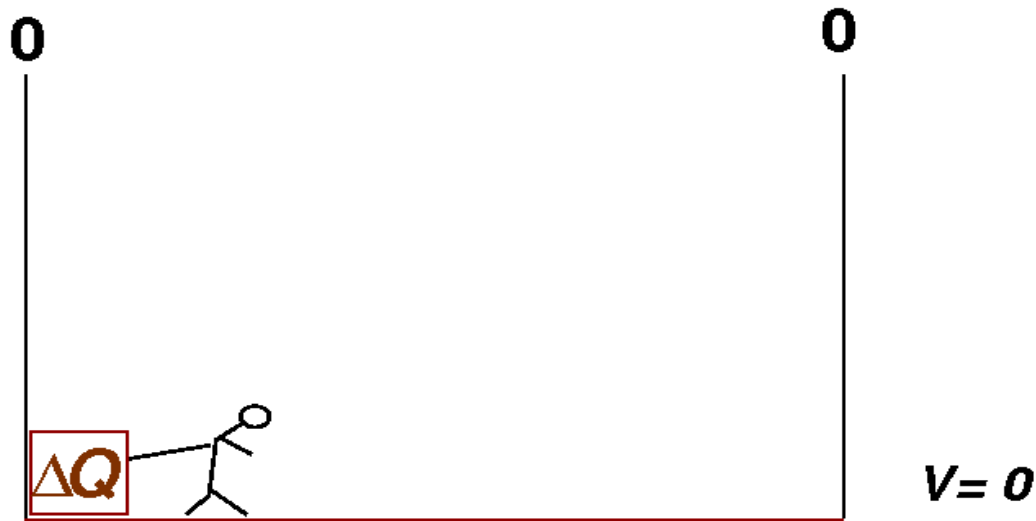
- 極板の電荷密度の変化
- 極板間の電場の変化
- 極板間の電位差の変化

$$\sigma \left( = \frac{Q}{S} \right) \rightarrow \sigma + \frac{\Delta Q}{S}$$

$$E \left( = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) \rightarrow E + \frac{\Delta Q}{\epsilon_0 S}$$

$$V \left( = E \cdot d \right) \rightarrow V + \frac{d}{\epsilon_0 S} \Delta Q = V + \frac{\Delta Q}{C}$$

# コンデンサーの中の微小電荷の移動(まとめ)



両極板の電荷  $0$  の状態から  
 $n$ 回  $\Delta Q$  の移動が繰り返された状態

• 極板の電荷密度

$$\sigma (= \frac{Q}{S}) = n \frac{\Delta Q}{S}$$

• 極板間の電場

$$E (= \frac{\sigma}{\epsilon_0}) = n \frac{\Delta Q}{\epsilon_0 S}$$

• 極板間の電位差

$$V (= E \cdot d) = n \frac{d}{\epsilon_0 S} \Delta Q = n \frac{\Delta Q}{C}$$

# コンデンサーになされた仕事の合計

(電荷を蓄えるのに必要な仕事)

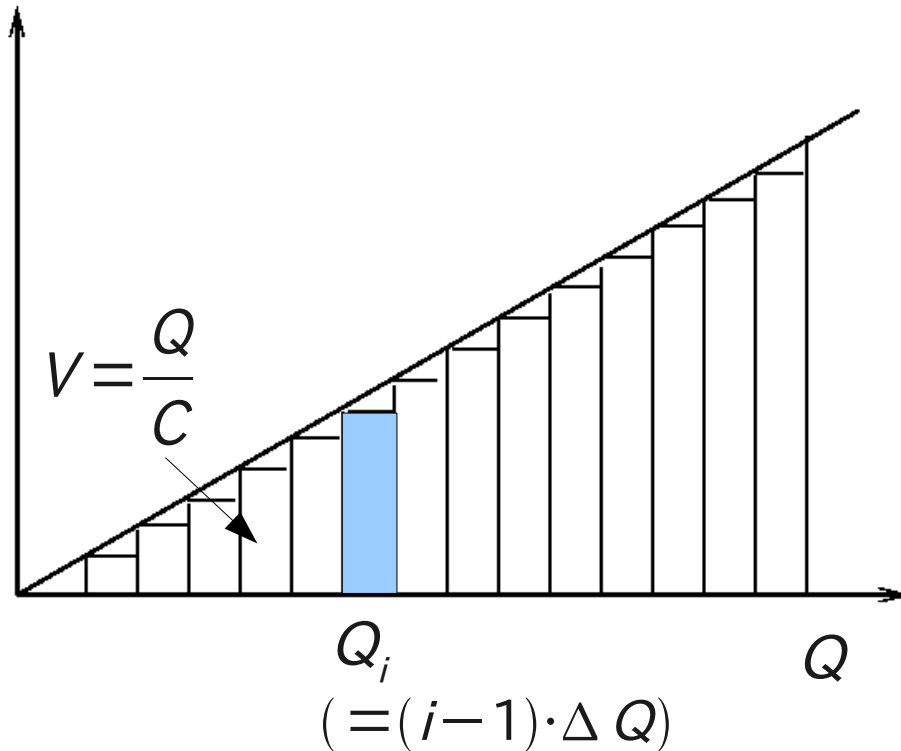
$i$ 回めに  $\Delta Q$  を、運ぶための仕事は  $V_i \cdot \Delta Q$

両極板の電荷が0の状態から、最終的に電荷  $\pm Q$  になったとして、

仕事の合計の計算は、

$$U = \sum_{i=1}^n V_i \Delta Q = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{C} \Delta Q \approx \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ$$

したがって、この合計は  
の極限で、



$$\Delta Q \rightarrow 0$$

となる。

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$



## コンデンサーになされた仕事の合計 (2)

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{および} \quad C \equiv \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{より、}$$

$$U = \frac{d}{2\epsilon_0 S} (S\sigma)^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \boxed{S \cdot d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \boxed{S \cdot d}$$

ここで、

$$S \cdot d = [\text{極板間の体積}]$$

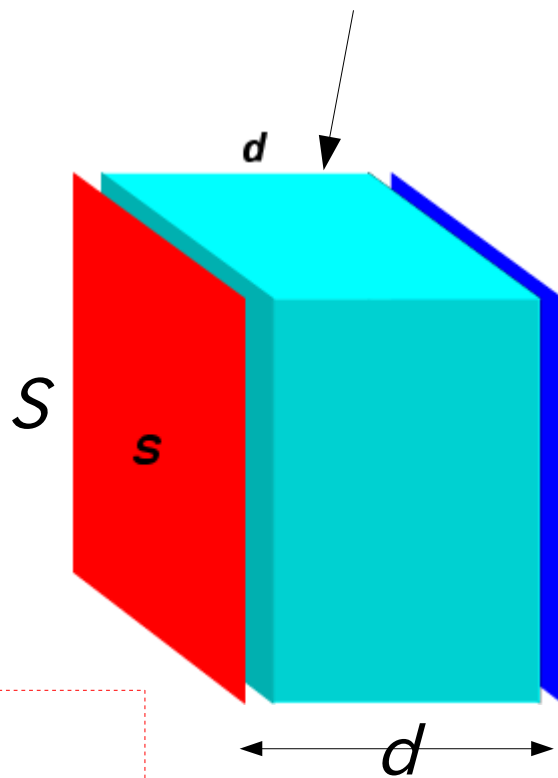
に注意。

つまり、コンデンサーになされた仕事は、  
電場の存在する空間に分布するエネルギー

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (\text{電場の持つエネルギー密度})$$

となって、蓄えられる。

ここにあるのは電場のみ!



## 球形コンデンサー

下図の様な球形コンデンサーに置いては、電場の大きさが0でないのは  $a < r < b$  の範囲のみである。(球の表面に一様に電荷が分布する場合と同様、**点電荷の作る電場、電位と、電場**を参考にする。)

ガウスの法則へ応用して、

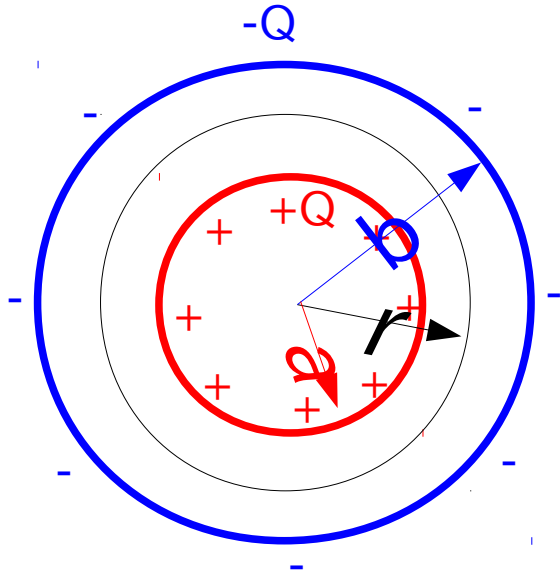
$$\epsilon_0 4\pi r^2 \cdot E = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ Q & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

電場の大きさは、

$$E = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

ベクトルで書いて、

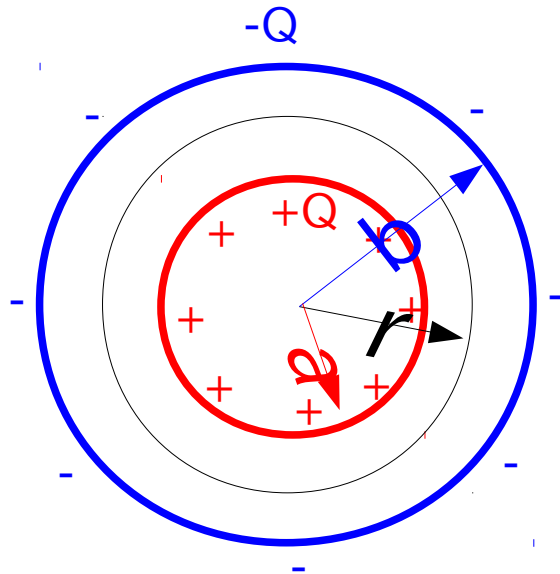
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$



## 球形コンデンサー 2

球形コンデンサーの電場は、 $r$ の関数として

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$



点電荷の作る電位を参考にすると、無限遠点を基準とした、球形コンデンサーの電位は、 $r$ の関数として

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} & (b < r) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & (a < r < b) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} & (r < a) \end{cases} \quad \text{となる。}$$

### 球形コンデンサー 3

半径  $a$  と  $b$  の球面を極板と考える。

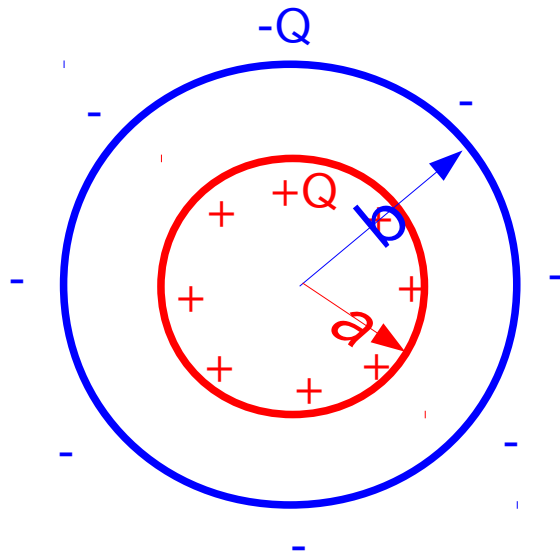
電場はこの極板の間 ( $a < r < b$ ) に、だけ存在する。

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

極板間の電位差 (クーロン場の時と同様)

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

電気容量



$$Q = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} V \quad \text{より}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

# 球形コンデンサー 4, 蓄えられるエネルギー

電気容量

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

より、蓄えられるエネルギーは、

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

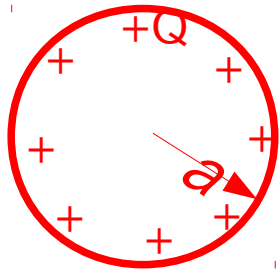
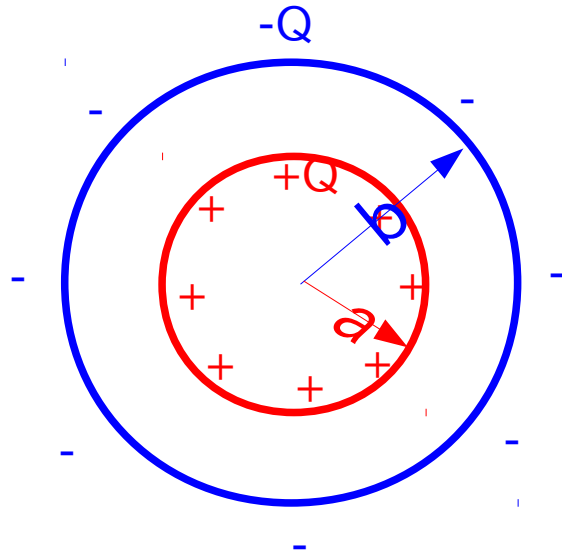
$b \rightarrow \infty$  の時、

$$U = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{1}{a}$$

電気容量も

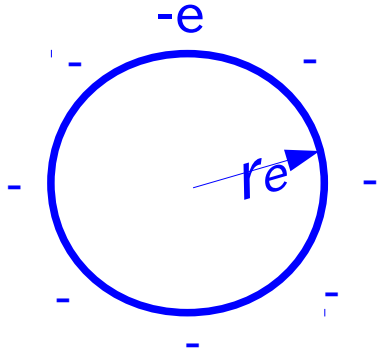
$$C = 4\pi \epsilon_0 a$$

となる。



# 電子の古典半径

電子が半径  $r_e$  の球と考えると、電子の電場のエネルギーの合計は、コンデンサーとしてのエネルギーに等しい。



$$U = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_e}$$

これが電子の静止エネルギー ( $mc^2$ 、相対性理論より) に等しいと考えると、電子の半径として、

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{mc^2}$$

が得られる。これを**電子の古典半径**と呼ぶ。

物理量 : 物理的な量で、単位つきで用いられる。

古典力学で最も基本的と考えられる物理量は、

長さ(m)、時間(s)、質量(kg)

電磁気学ではこれに電荷量加わる。しかし、測定のし易さから、電流(A)が基本物理量として用いられる。(MKSA単位系)

物理量	良く使われる単位	基本単位だけで表すと
力	N(ニュートン)	$\text{kg m s}^{-2}$
電荷	C(クーロン)	A s
電位	V(ボルト)	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$
電場の強さ	$\text{V/m} = \text{N/c}$	$\text{kg m s}^{-3} \text{A}^{-1}$
コンデンサーの容量	F(ファラッド)	$\text{kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^4 \text{A}^2$

注意  $\epsilon_0$  もただの数でなく  $8.85418782 \times 10^{-12} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3} \text{ s}^4 \text{ A}^2$   
と単位つきで書かれる物理量。(良く使われる単位としては F/m)

物理量 ・物理的か量で 単位つきで用いられる

### THE DEFINING CONSTANTS OF THE INTERNATIONAL SYSTEM OF UNITS

Defining constant	Symbol	Numerical value	Unit
hyperfine transition frequency of Cs	$\Delta\nu_{\text{Cs}}$	9 192 631 770	Hz
speed of light in vacuum	$c$	299 792 458	$\text{m s}^{-1}$
Planck constant*	$h$	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	$\text{J Hz}^{-1}$
elementary charge*	$e$	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C
Boltzmann constant*	$k$	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	$\text{J K}^{-1}$
Avogadro constant*	$N_{\text{A}}$	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$
luminous efficacy	$K_{\text{cd}}$	683	$\text{lm W}^{-1}$

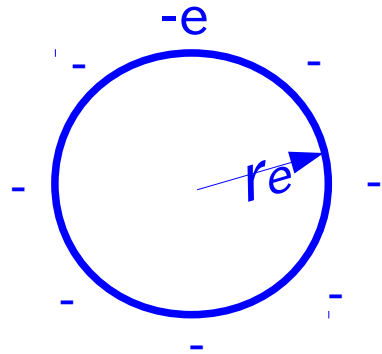
\*These numbers are from the CODATA 2017 special adjustment. They were calculated from data available before the 1<sup>st</sup> of July 2017.



## 電子の古典半径 (2)

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{mc^2}$$

に、具体的な数値



$$e = -1.60217653 \times 10^{-19} [A \cdot sec]$$

$$m = 9.1093826 \times 10^{-31} [kg]$$

$$\epsilon_0 = 8.85418782 \times 10^{-12} [m^{-3} kg^{-1} sec^4 A^2]$$

を代入すると、 $c = 2.99792458 \times 10^8 [m \cdot sec^{-1}]$

$$r_e = \frac{(1.6022 \times 10^{-19})^2}{8 \times 3.1416 \times 8.8542 \times 10^{-12} \times 9.1094 \times 10^{-31} \times (2.9979 \times 10^8)^2}$$

結局、

を得る。

$$\left[ \frac{[A \cdot sec]^2}{[m^{-3} kg^{-1} sec^4 A^2] [kg] [m \cdot sec^{-1}]^2} \right]$$

$$r_e = 1.4090 \times 10^{-15} [m]$$