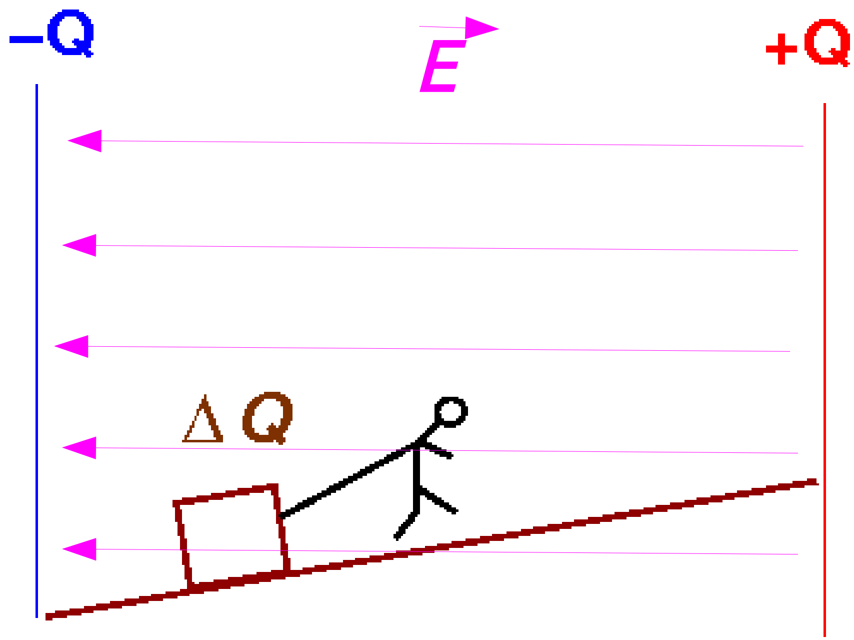
電場の持つエネルギー

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験

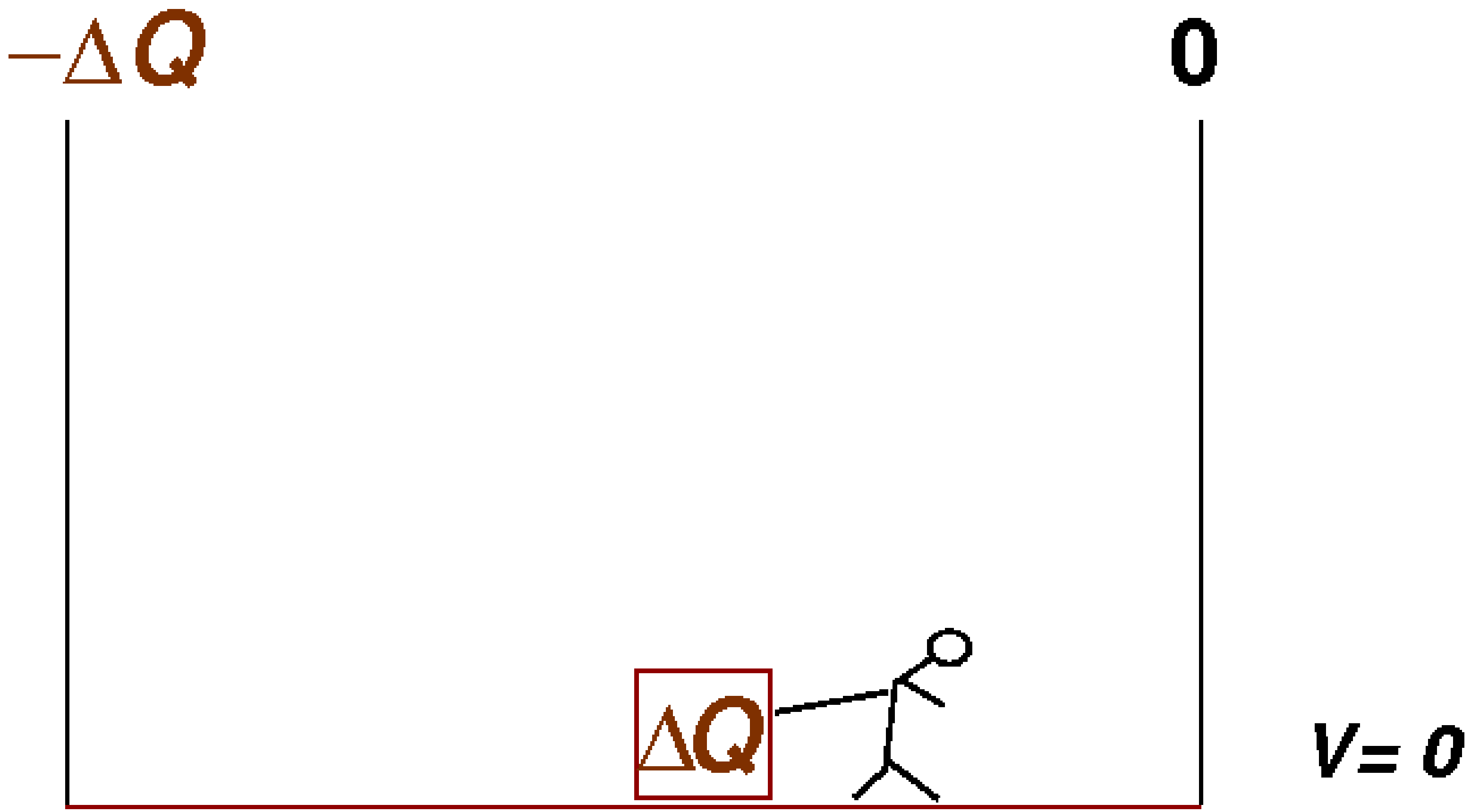


$V \cdot \Delta Q$

の仕事が電場に逆らってなされる。

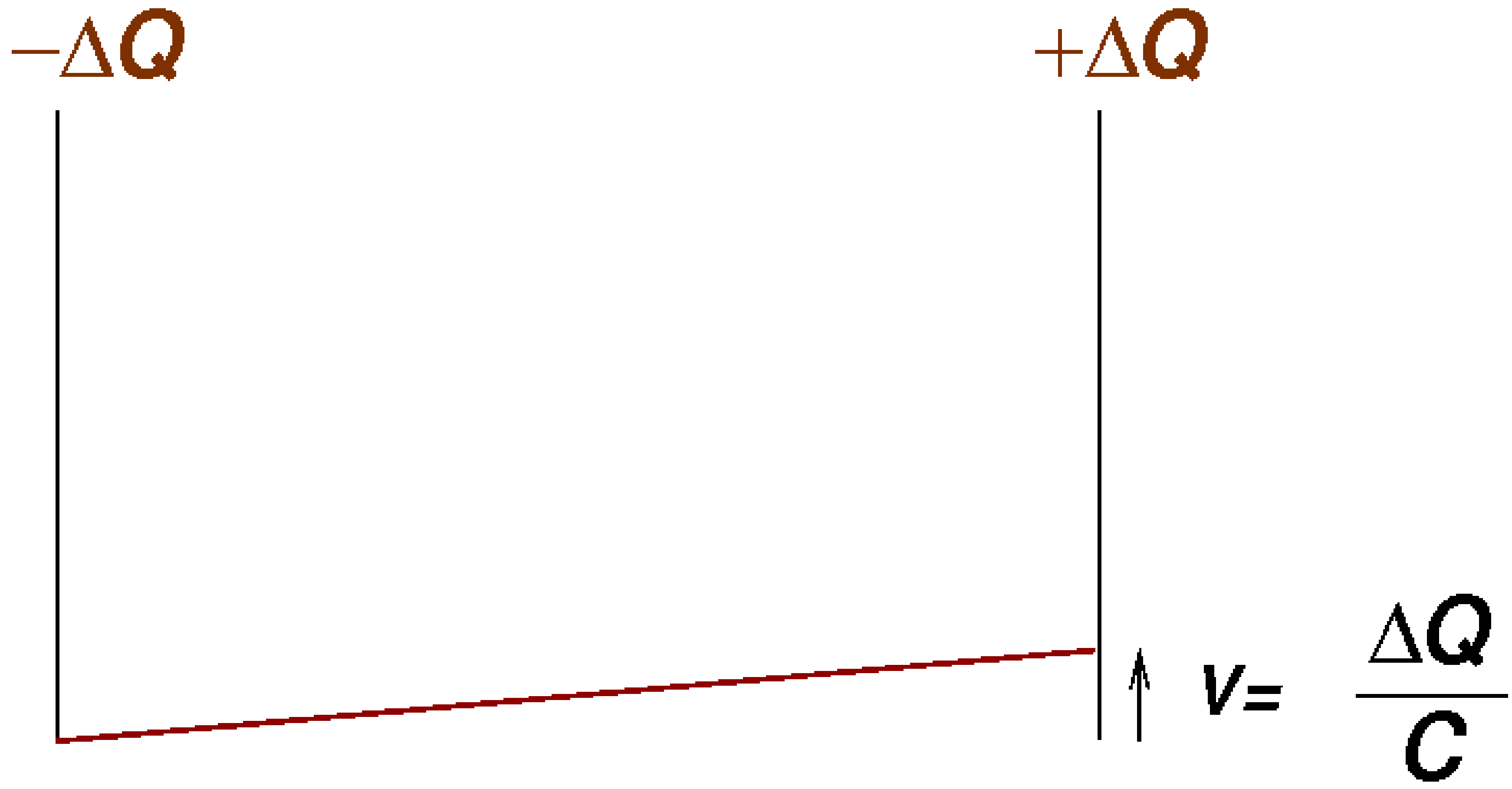
ただし、実際のコンデンサーでは、
極板間の電位差が ΔQ の移動とともに変化する。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



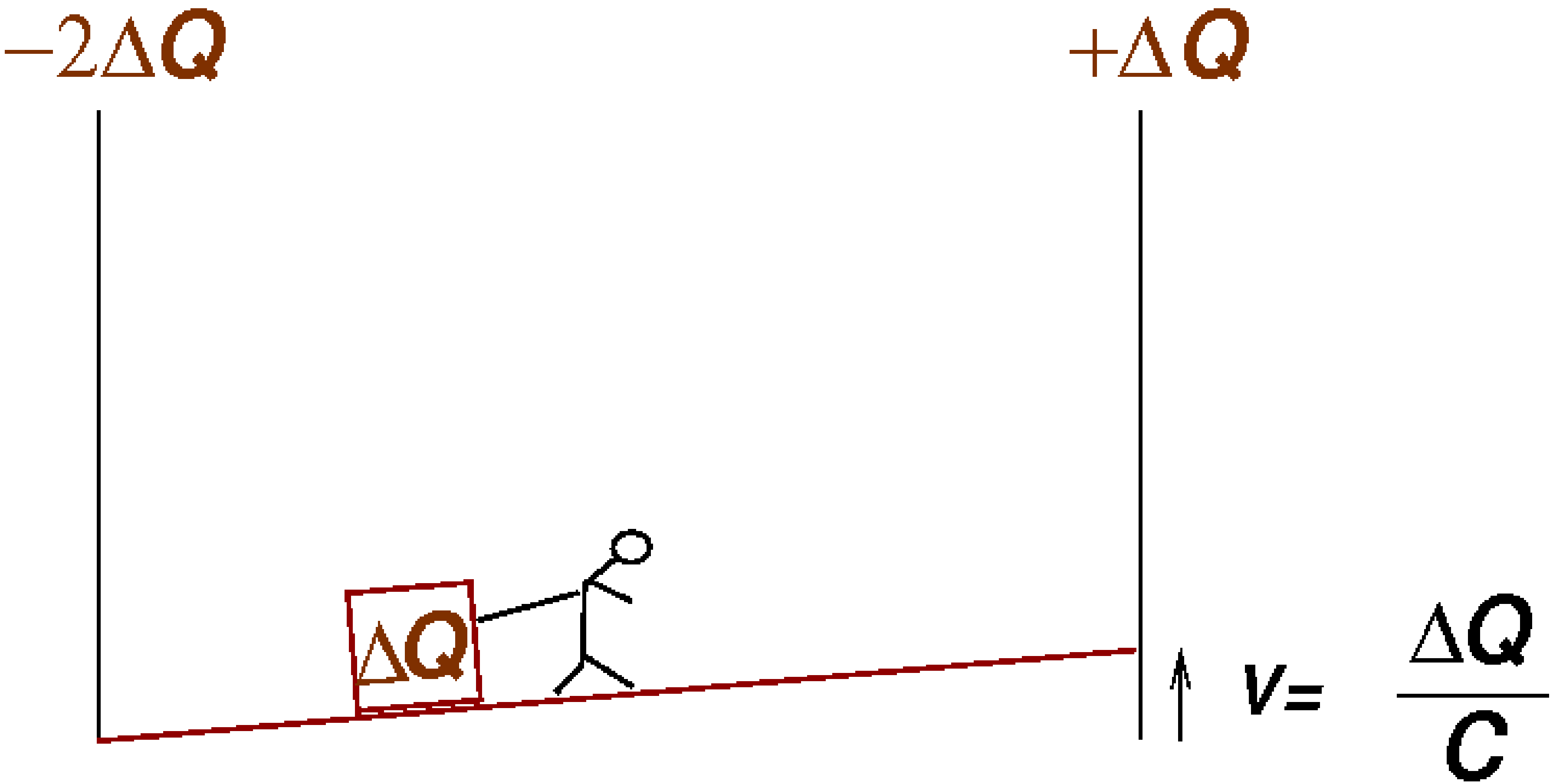
一方の極板の電荷が、 ΔQ だけ減少して、
もう一方の極板へ。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



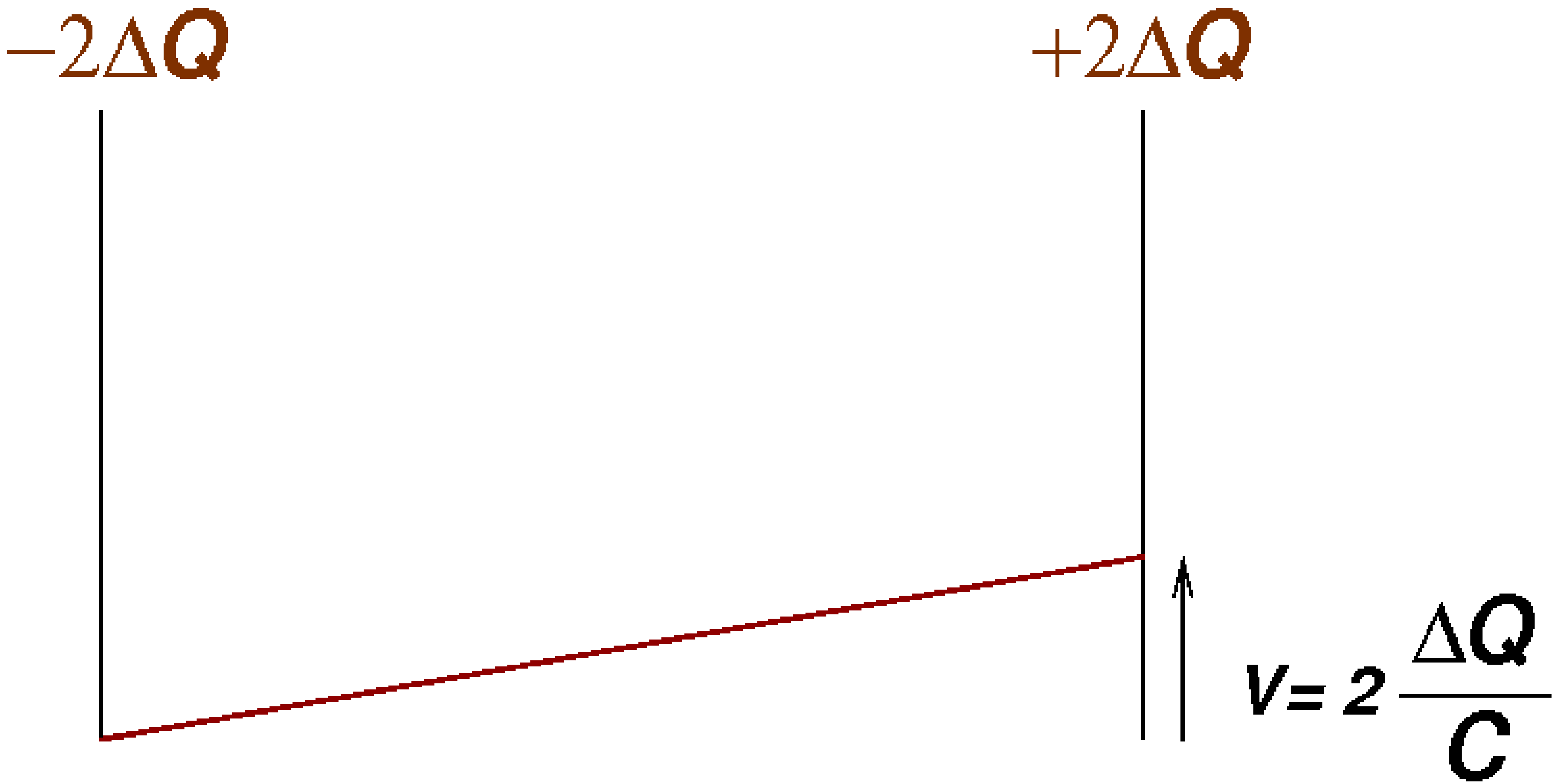
極板間の電位差が、 $\dfrac{\Delta Q}{C}$ だけ増加する。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



次の ΔQの移動は、増加した電位に逆らった移動。

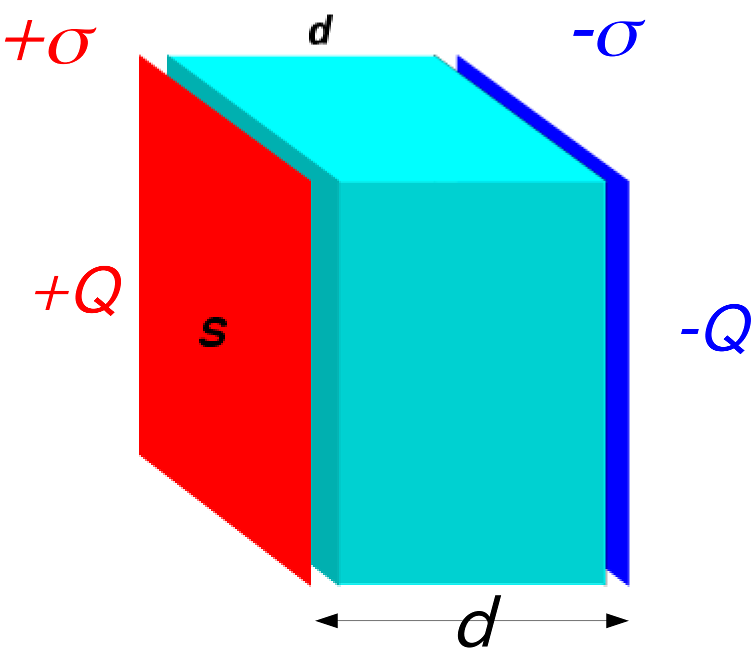
コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



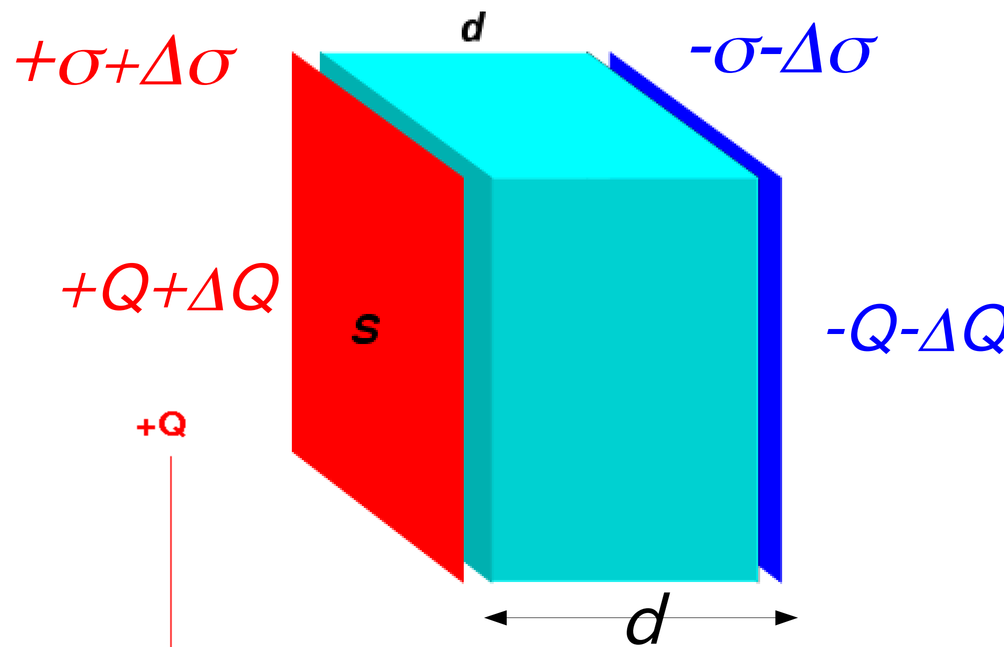
2回 ΔQが移動した後の電位差

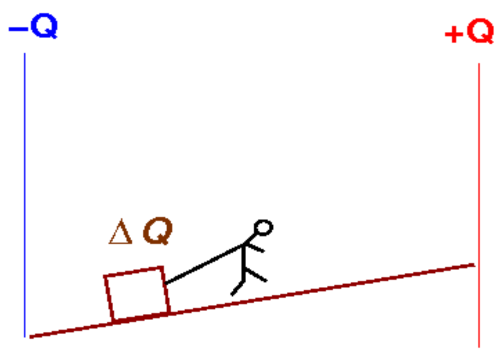
コンデンサーの中の微小電荷の移動前後の比較

ΔQの電荷の移動の前



ΔQの電荷の移動の後





•極板の電荷密度の変化

$$\sigma\left(=\frac{Q}{S}\right) \rightarrow \sigma+\frac{\Delta Q}{S}$$

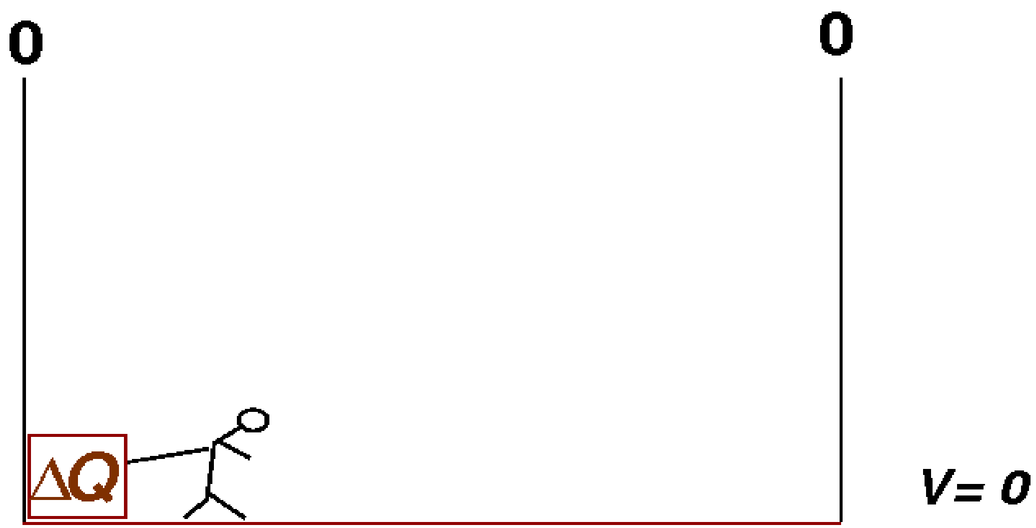
•極板間の電場の変化

$$E\left(=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) \rightarrow E+\frac{\Delta Q}{\varepsilon_0 S}$$

•極板間の電位差の変化

$$V(=E\cdot d) \rightarrow V+\frac{d}{\varepsilon_0 S}\Delta Q = \boxed{V+\frac{\Delta Q}{C}}$$

コンデンサーの中の微小電荷の移動(まとめ)



両極板の電荷 *0* の状態から
*n*回Δ*Q*の移動が繰り替えされた状態

•極板の電荷密度

$$\sigma\left(=\frac{Q}{S}\right)=n\frac{\Delta Q}{S}$$

•極板間の電場

$$E\left(=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)=n\frac{\Delta Q}{\varepsilon_0 S}$$

•極板間の電位差

$$V\left(=E\cdot d\right)=n\frac{d}{\varepsilon_0 S}\Delta Q=\boxed{n\frac{\Delta Q}{C}}$$

コンデンサーになされた仕事の合計

(電荷を蓄えるのに必要な仕事)

i回めに ΔQを、運ぶための仕事は $V_i \cdot \Delta Q$

両極板の電荷が0の状態から、最終的に電荷±Q になったとして、

仕事の合計の計算は、

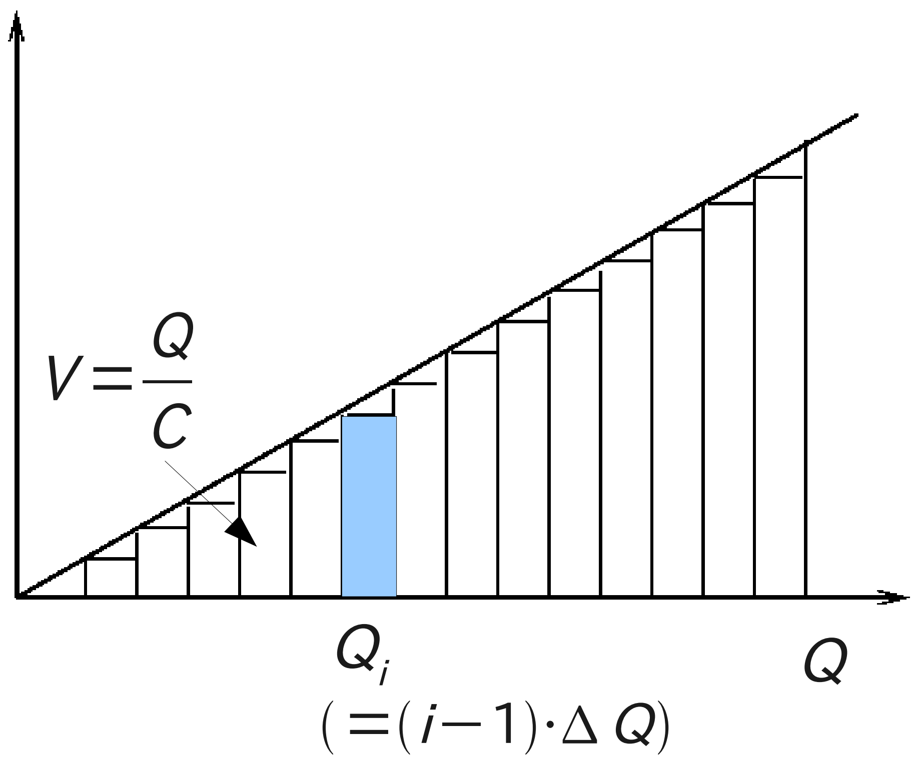
$$U = \sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{C} \Delta Q \simeq \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ$$

したがって、この合計は
の極限で、

$\Delta Q \to 0$

となる。

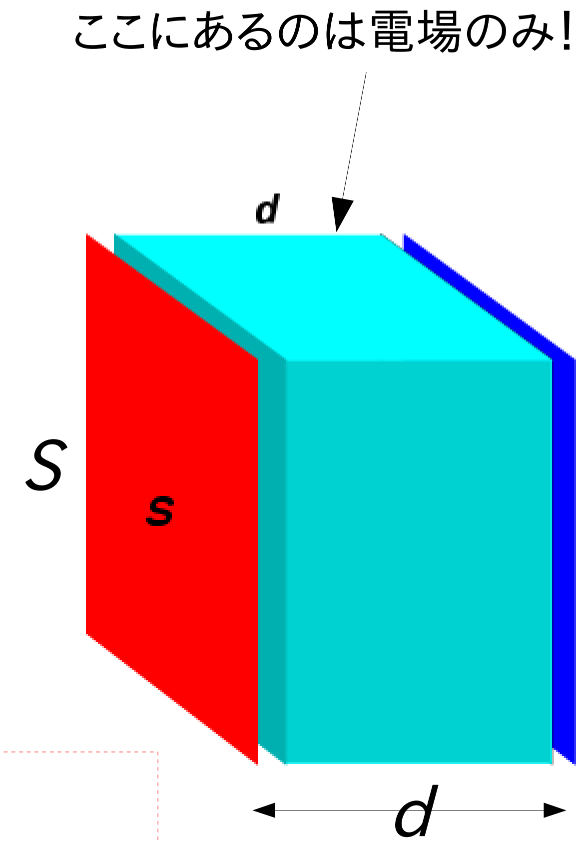
$$\boxed{U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}}$$



コンデンサーになされた仕事の合計 (2)

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$ および $$C\equiv\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$ より、

$$U=\frac{d}{2\varepsilon_0 S}(S\sigma)^2=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\boxed{S\cdot d}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\boxed{S\cdot d}$$



ここで、

$$S\cdot d=[\,\textit{極板間の体積}\,]$$

に注意。

つまり、コンデンサーになされた仕事は、
電場の存在する空間に分布するエネルギー

$$\boxed{u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$ (電場の持つエネルギー密度)

となって、蓄えられる。

球形コンデンサー

下図の様な球形コンデンサーに置いては、電場の大きさがが0で無いのは
$a < r < b$ の範囲のみである。（球の表面に一様に電荷が分布する場合と同様、
点電荷の作る電場、電位と、電場を参考にする。）

ガウスの法則へ応用して、

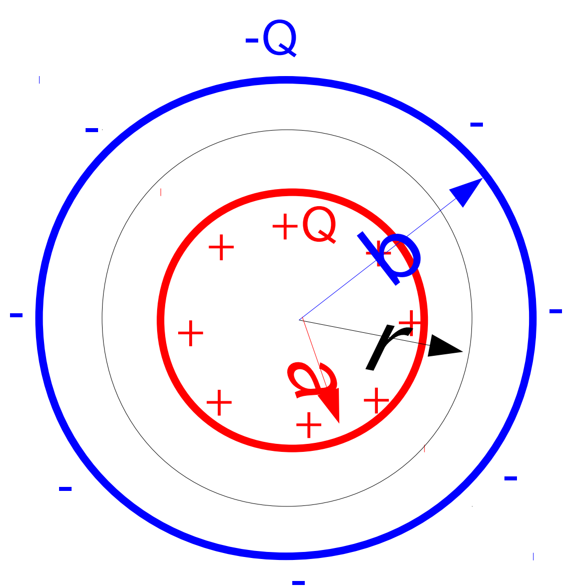
$$\varepsilon_0 4\pi r^2 \cdot E = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ Q & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

電場の大きさは、

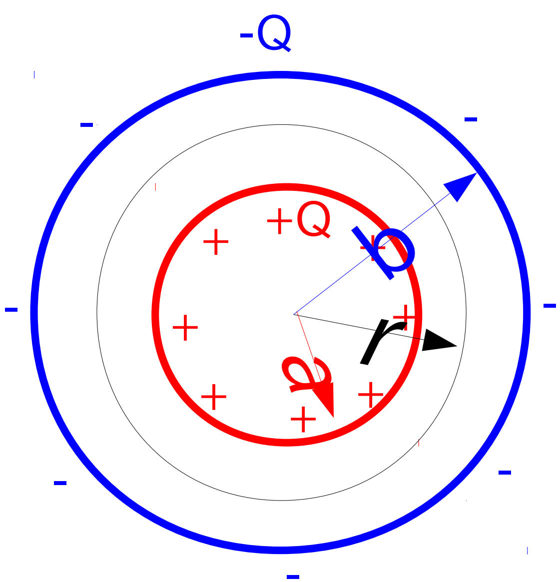
$$E = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

ベクトルで書いて、

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\hat{r}}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$



球形コンデンサー２



球形コンデンサーの電場は、rの関数として

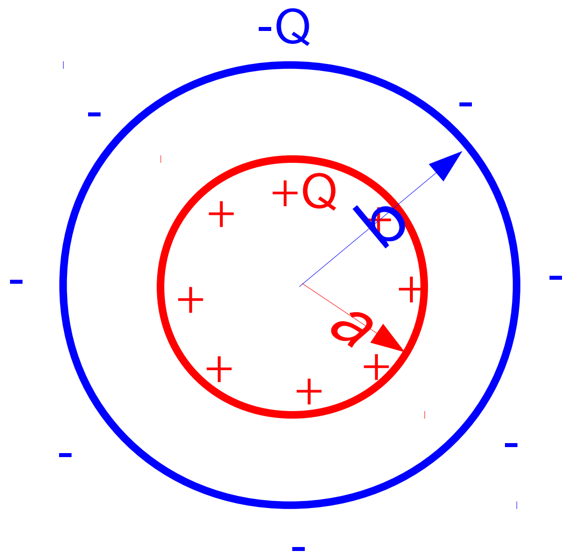
$$\vec{E}=\begin{cases} 0 & (b<r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & (a<r<b) \\ 0 & (r<a) \end{cases}$$

点電荷の作る電位を参考にすると、
無限遠点を基準とした、球形コンデンサーの電位は、
rの関数として

$$V(r)=\begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{b} & (b<r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (a<r<b) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{a} & (r<a) \end{cases}$$

となる。

球形コンデンサー３



半径 aと bの球面を極板と考える。

電場はこの極板の間 $(a<r<b)$に、だけ存在する。

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

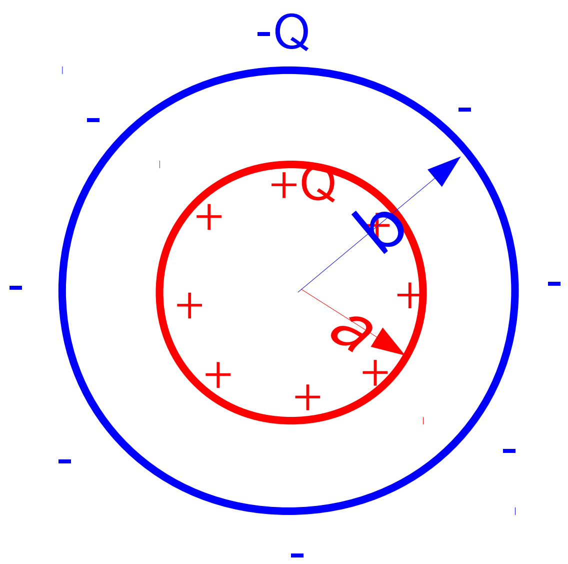
極板間の電位差　(クーロン場の時と同様)

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

電気容量

$$Q=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}V$$ より $$C=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

球形コンデンサー 4, 蓄えられるエネルギー



電気容量

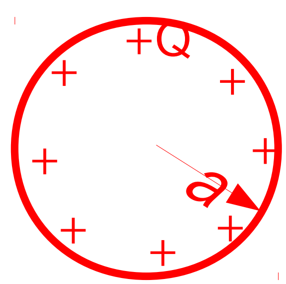
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

より、蓄えられるエネルギーは、

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

b → ∞ の時、

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

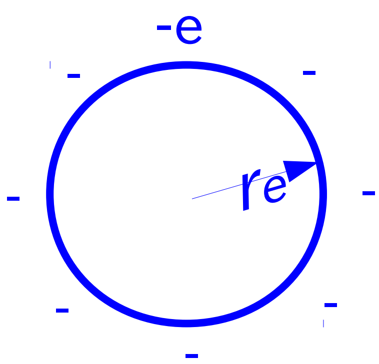


電気容量も

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

となる。

電子の古典半径



電子が半径 r_e の球と考えると、電子の電場のエネルギーの合計は、コンデンサーとしてのエネルギーに等しい。

$$U = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_e}$$

これが電子の静止エネルギー(mc^2 、相対性理論より)に等しいと考えると、電子の半径として、

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}$$

が得られる。これを電子の古典半径と呼ぶ。

物理量　：物理的な量で、単位つきで用いられる。

古典力学で最も基本的と考えられる物理量は、

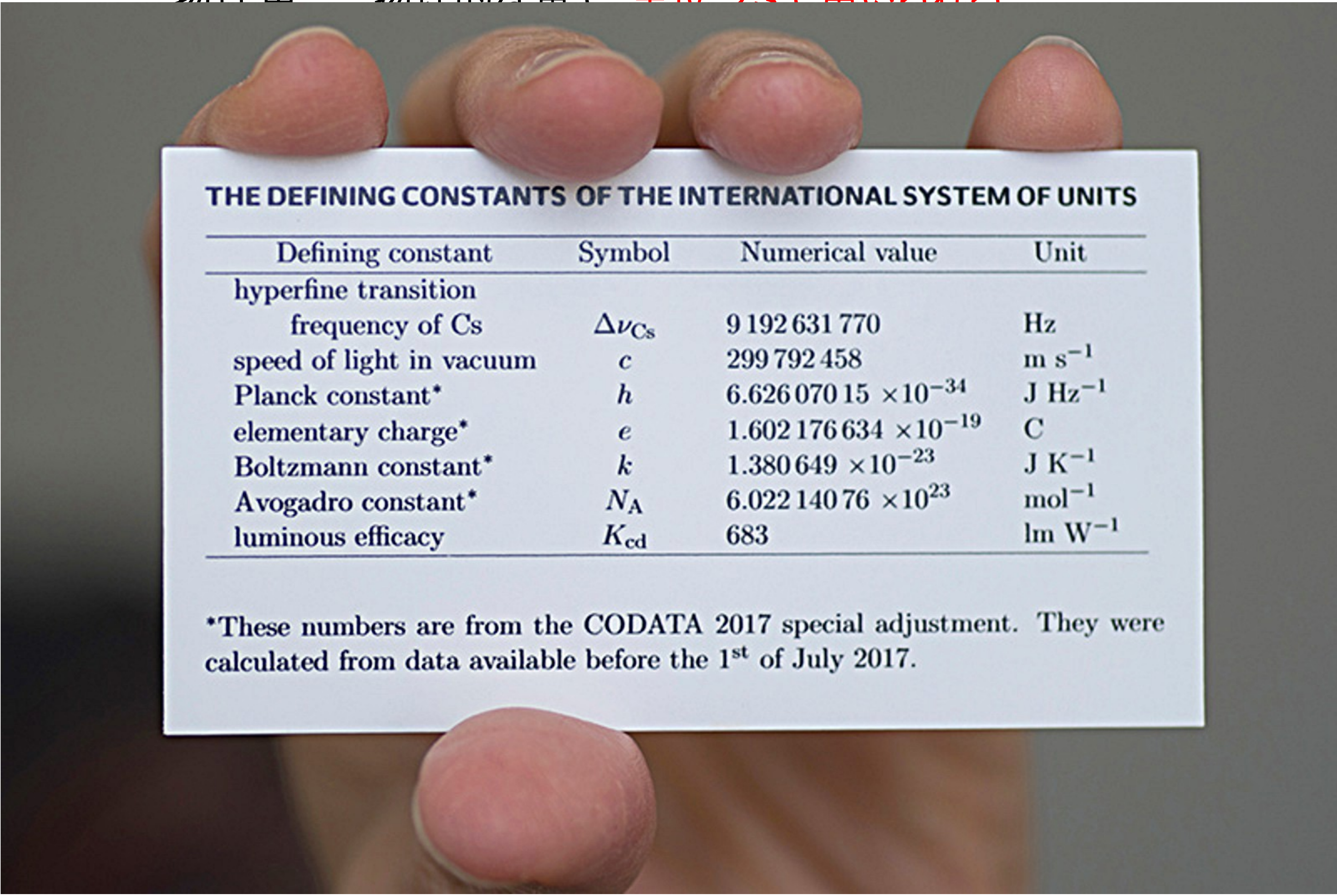
長さ(m)、時間(s)、質量(kg)

電磁気学ではこれに電荷量が加わる。しかし、測定のし易さから、
電流(A)が基本物理量として用いられる。(MKSA単位系)

物理量	良く使われる単位	基本単位だけで表すと
力	N(ニュートン)	$\mathrm{kg\ m\ s^{-2}}$
電荷	C(クーロン)	$\mathrm{A\ s}$
電位	V(ボルト)	$\mathrm{kg\ m^2 s^{-3} A^{-1}}$
電場の強さ	$V/m = N/c$	$\mathrm{kg\ m\ s^{-3} A^{-1}}$
コンデンサーの容量	F(ファラッド)	$\mathrm{kg^{-1} m^{-2} s^4 A^2}$

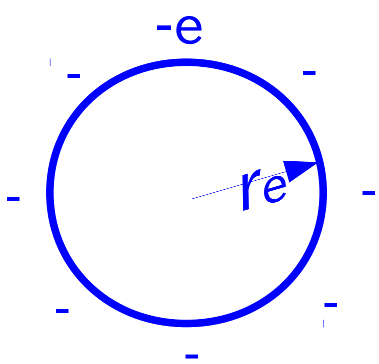
注意　ε_0 もただの数でなく　$8.85418782 \times 10^{-12}\ \mathrm{kg^{-1} m^{-3} s^4 A^2}$
と単位つきで書かれる物理量。　(良く使われる単位としては F/m)

物理量　・物理的な量で、単位つきで用いられる



電子の古典半径 (2)

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}$$



に、具体的な数値

$$e = -1.60217653 \times 10^{-19}\,[A\ sec]$$

$$m = 9.1093826 \times 10^{-31}\,[kg]$$

$$\varepsilon_0 = 8.85418782 \times 10^{-12}\,[m^{-3}\,kg^{-1}\,sec^4\,A^2]$$

$$c = 2.99792458 \times 10^{8}\,[m \cdot sec^{-1}]$$

を代入すると、

$$r_e = \frac{(1.6022 \times 10^{-19})^2}{8 \times 3.1416 \times 8.8542 \times 10^{-12} \times 9.1094 \times 10^{-31} \times (2.9979 \times 10^8)^2}\left[\frac{[A\ sec]^2}{[m^{-3}\,kg^{-1}\,sec^4\,A^2][kg][m \cdot sec^{-1}]^2}\right]$$

結局、

を得る。

$$r_e = 1.4090 \times 10^{-15}\,[m]$$