今日の問題

球形コンデンサー

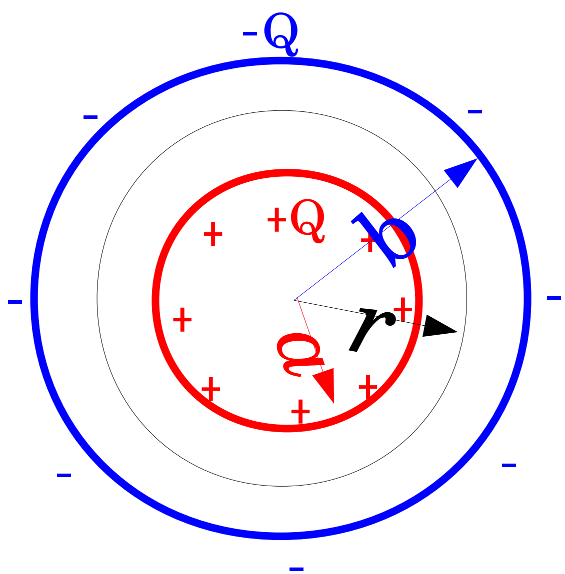
半径aとbの、2つの同心球に一様に電荷が分布して、それぞれ合計が

+Q, -Q（絶対値は等しく、符号が反対）。ガウスの法則を考え、

$$\varepsilon_0 \int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dS = \sum_{\text{内側にある電荷}} Q$$

同じ中心を持つ半径 r の球の内部の電荷を評価すると、

$$\sum_{\text{内部}} Q = \begin{cases} +Q - Q = 0 & (b<r) \\ Q & (a<r<b) \\ 0 & (r<a) \end{cases}$$



ガウスの法則へ応用して、

$$\varepsilon_0 4\pi r^2 \cdot E = \begin{cases} \\ \end{cases}$$

以上より、
電場の大きさは、

ベクトルで書いて、

$$E = \begin{cases} \\ \end{cases}$$

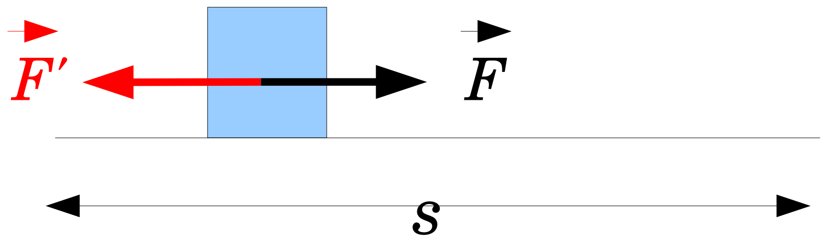
$$\vec{E} = \begin{cases} \\ \end{cases}$$

電場による仕事

力と仕事の復習

仕事の定義: $U = F \cdot s$

[仕事]=[移動をなすための力]・[移動した距離]
=ー[移動を妨げる力]　・[移動した距離]



力の方向と移動する方向が一直線上に無い時は、ベクトルで

$U = \vec{F} \cdot \vec{S}$

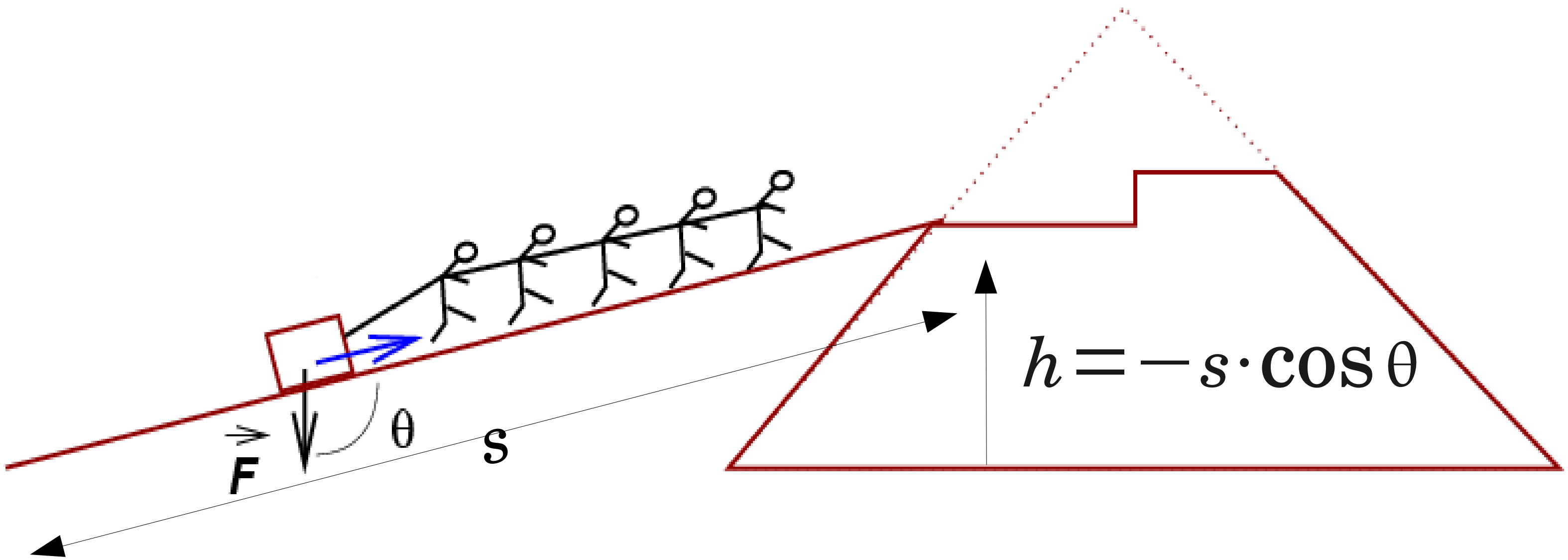
$U = -\vec{F} \cdot \vec{S}$　（ $\vec{F}$ が移動を妨げる力の場合）

重力による力と仕事

物を持ち上げるために必要な仕事は、持ち上げる高さに比例する

$$U = -F_g \cdot s \cdot \cos\theta = -\vec{F}_g \cdot \vec{s}$$

重力は下向き、かつθは重力と力のなす角



注意、内積で書く時は、符号に注意。

必要な力は重力と反対向き　=>　重力に“-”符号が付く。

コンデンサーの極板間の電位差

２つの平面が距離 *d* 離れて平行に置かれ、コンデンサーの電極を成している。

それぞれ電荷密度+s,-s が与えられている時、その平面の間の空間には、
２つの平面に垂直で、＋の電極から－の電極へ向かい

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

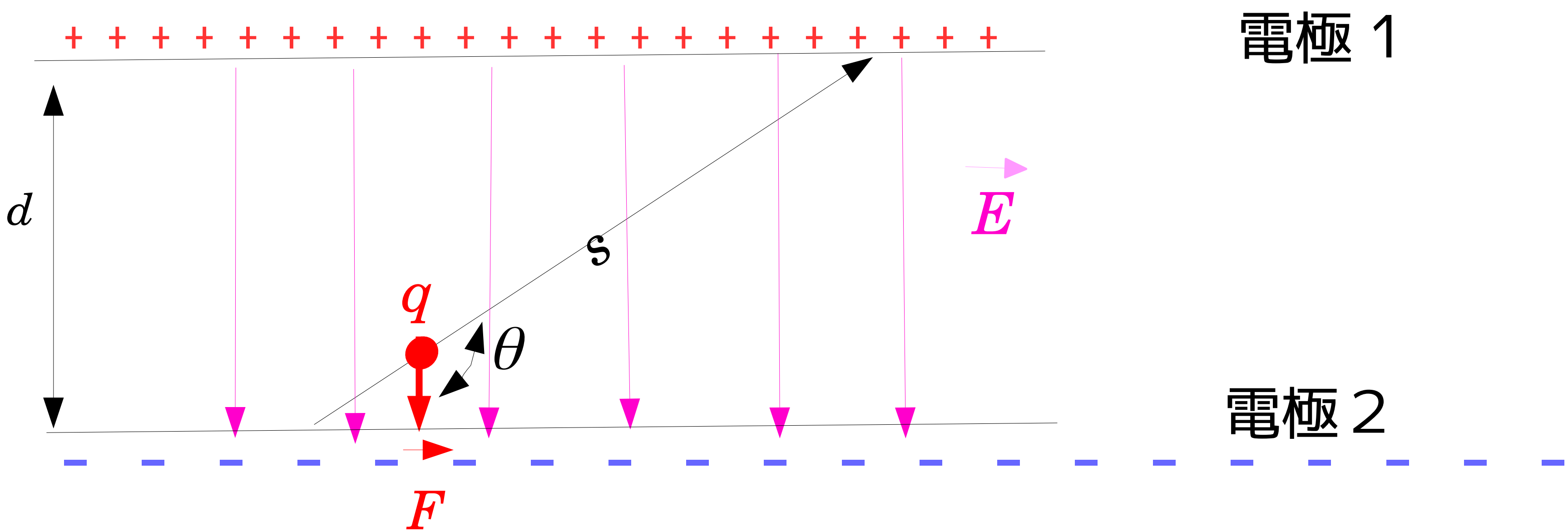
の大きさの電場ができる。その中で、+qの電荷を－の極板から、＋の極板まで移動させるのに必要な仕事は、

$$U=-\vec{F}\cdot\vec{s}=-q\left(\vec{E}\cdot\vec{s}\right)=q\cdot E\cdot d$$

つまり、仕事は、動かす電荷の大きさと、$E\cdot d\left(=V\right)$ の積で決まる。

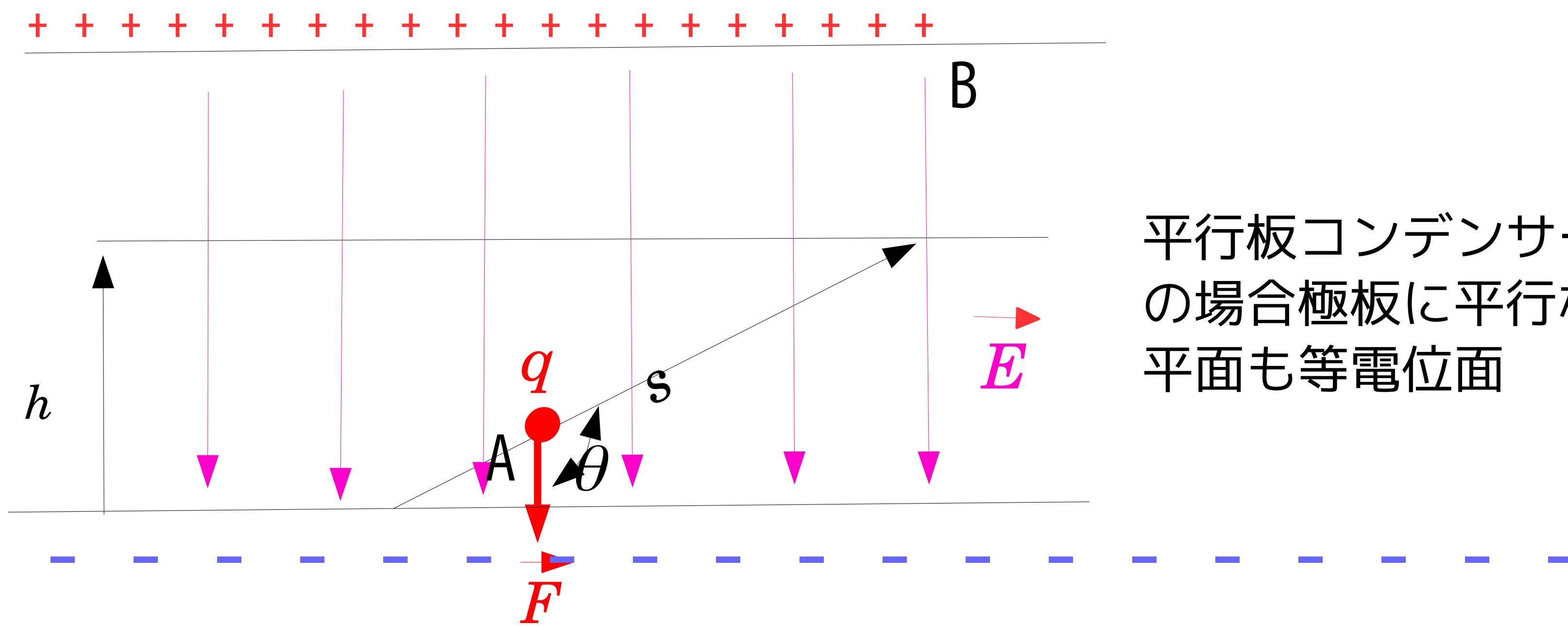
$$V\equiv E\cdot d$$

を、二つの電極の電位差と呼ぶ。



等電位面

ある点からの電位差が一定である平面。コンデンサーの極板も等電位面である。



平行板コンデンサーの場合極板に平行な平面も等電位面

一の極板から、平行な平面へ電荷を移動させる時も、
必要な仕事は、この平面までの距離hを使って、

$$U = -\vec{F}\cdot\vec{s} = -q\left(\vec{E}\cdot\vec{s}\right) = q\cdot E\cdot h$$

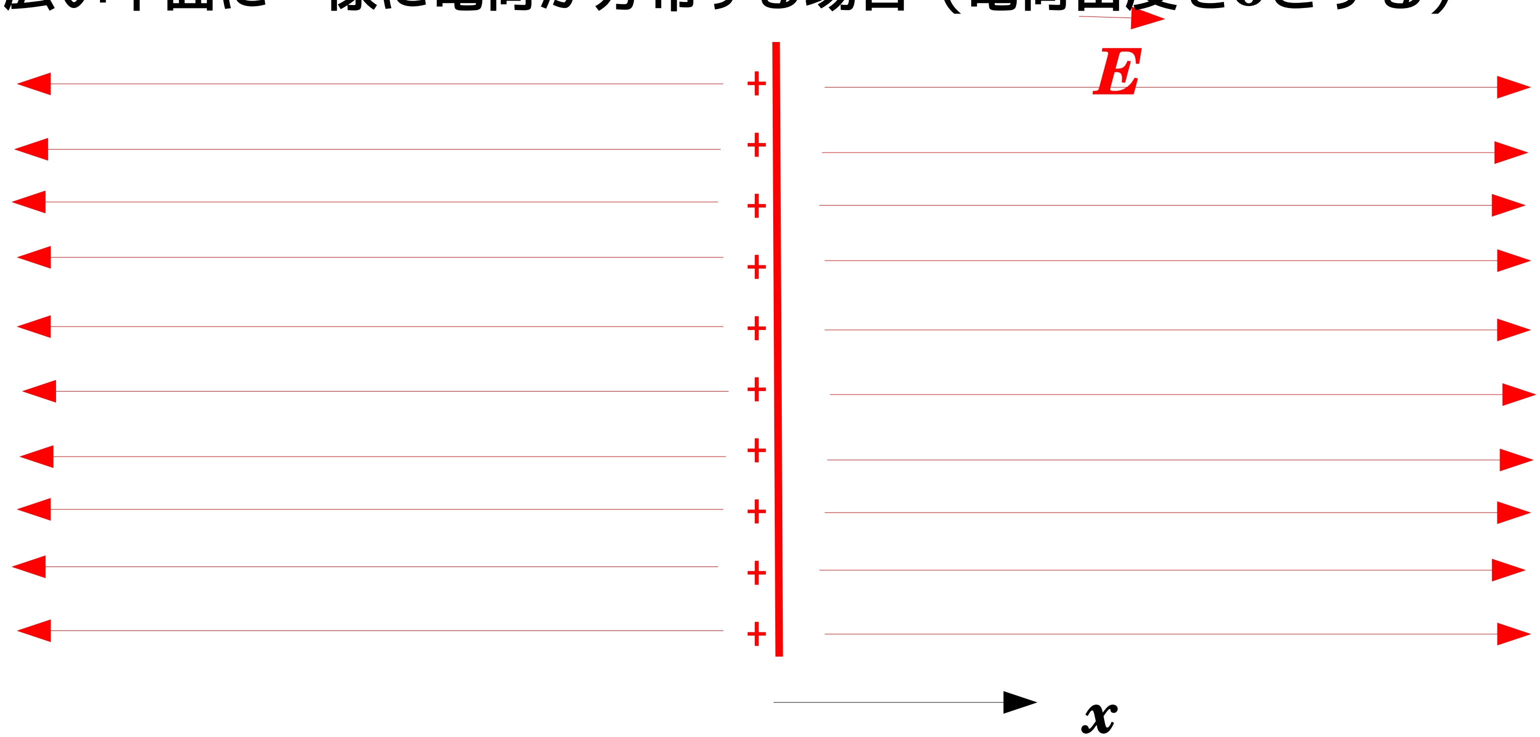
と書け、この平面の一極板からの電位差は

$$V = E\cdot h$$

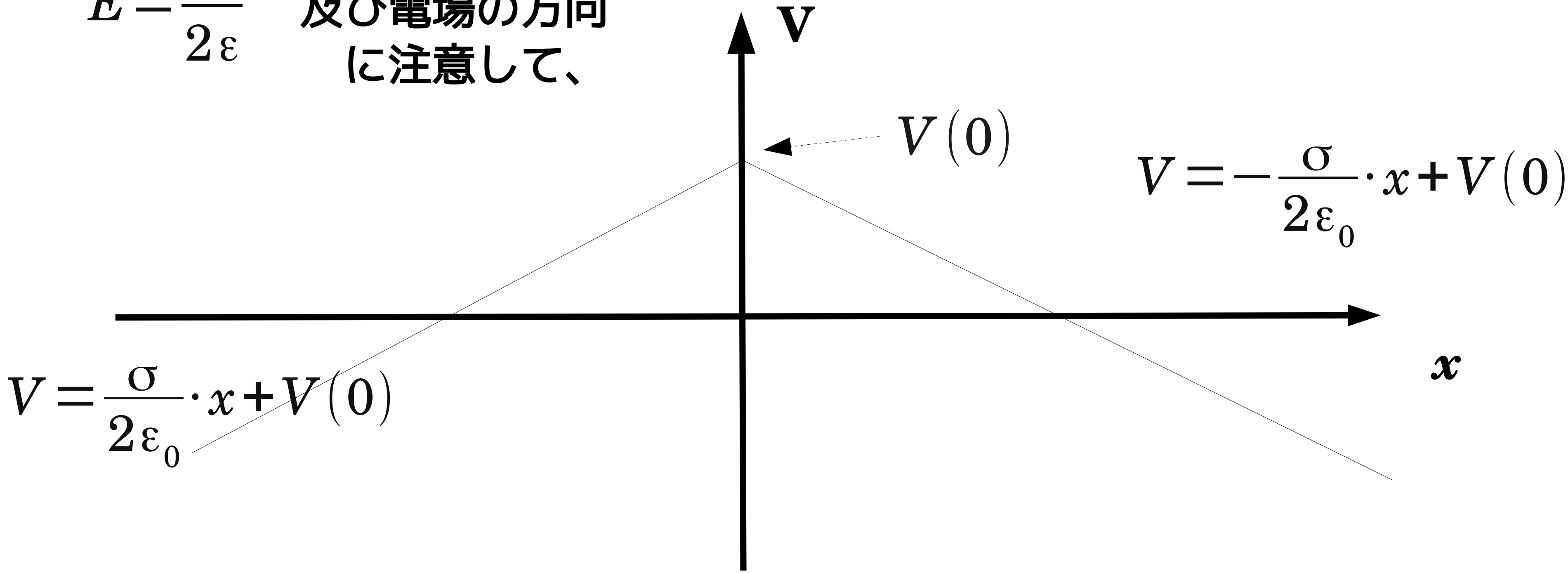
である。

qV: [電荷]x[電位差]は、電場の[位置エネルギー]

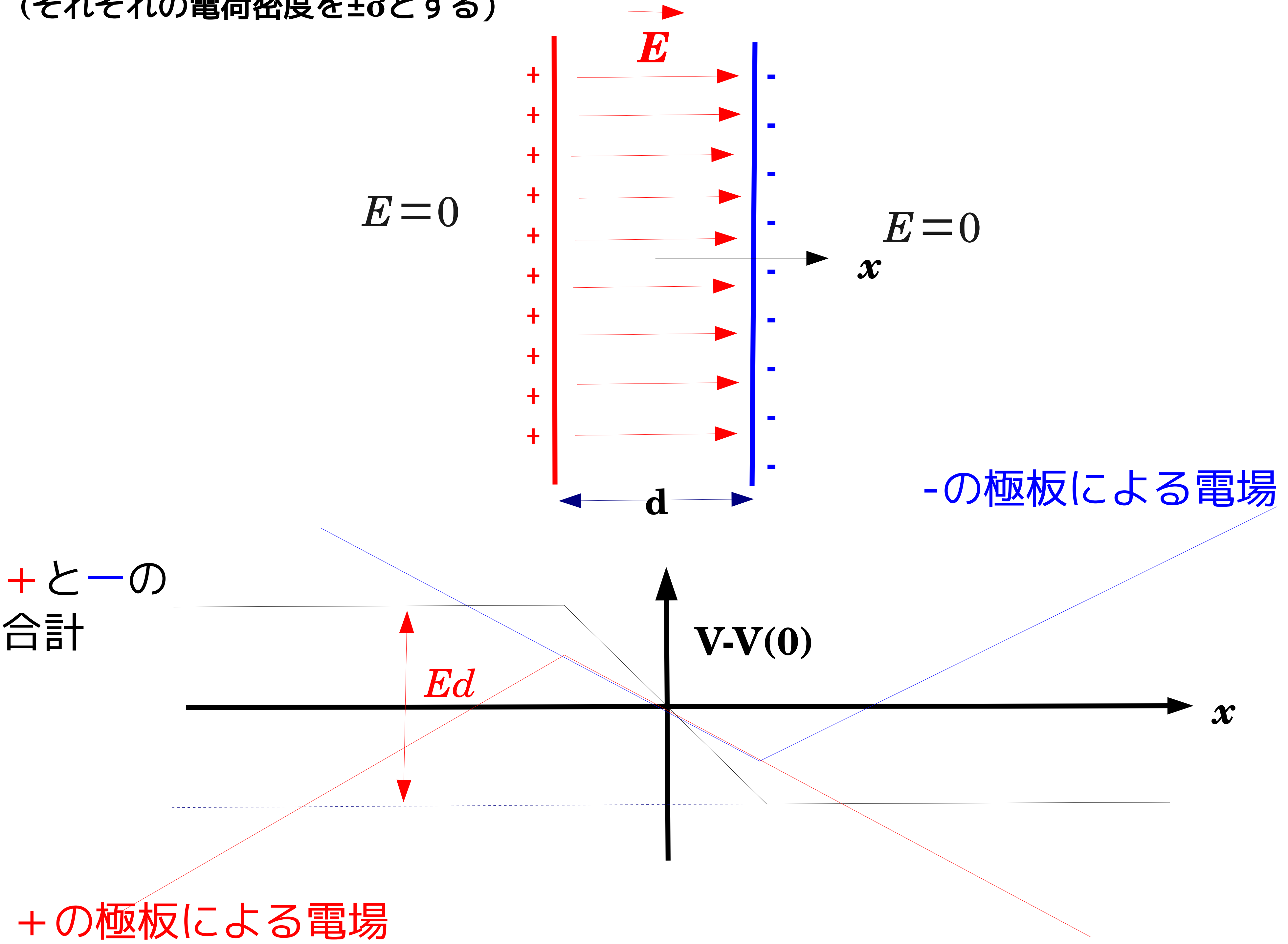
無限に広い平面に一様に電荷が分布する場合（電荷密度をσとする）



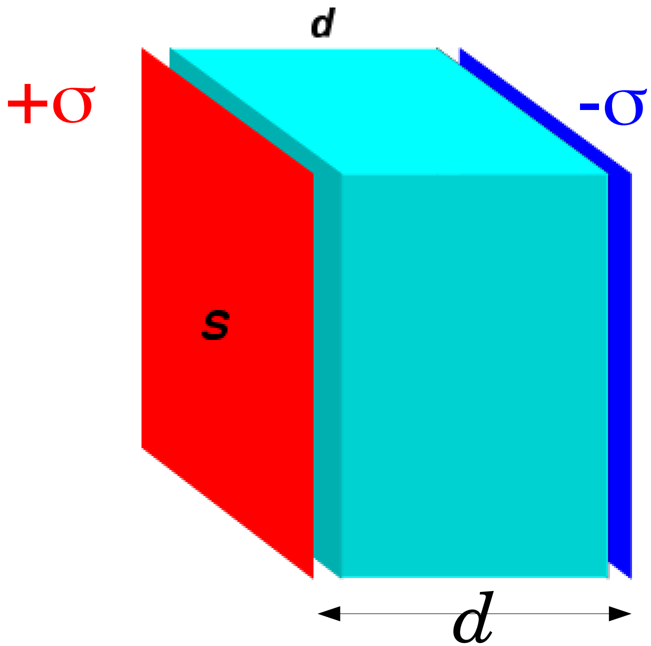
$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon}$$ 及び電場の方向に注意して、



2枚の無限に広い平面に反対符号の電荷が一様に分布する場合
(それぞれの電荷密度を±σとする)



実際のコンデンサー



平行な二つの平面を極板と呼ぶ。面積 $\boldsymbol{S}$、極板上の電荷 $\boldsymbol{Q}$それぞれが有限なので、極板の平均電荷密度 σ は、

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

と計算できる。したがって、
極板が無限に広い場合の関係式、

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

は、

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

と、実際のコンデンサーの場合の近似式して使える。

実際のコンデンサーで、電位差の近似式は、

$$V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d$$

となるが

電荷と電位差の関係 $V = \dfrac{d}{\varepsilon_0 S} Q$ を

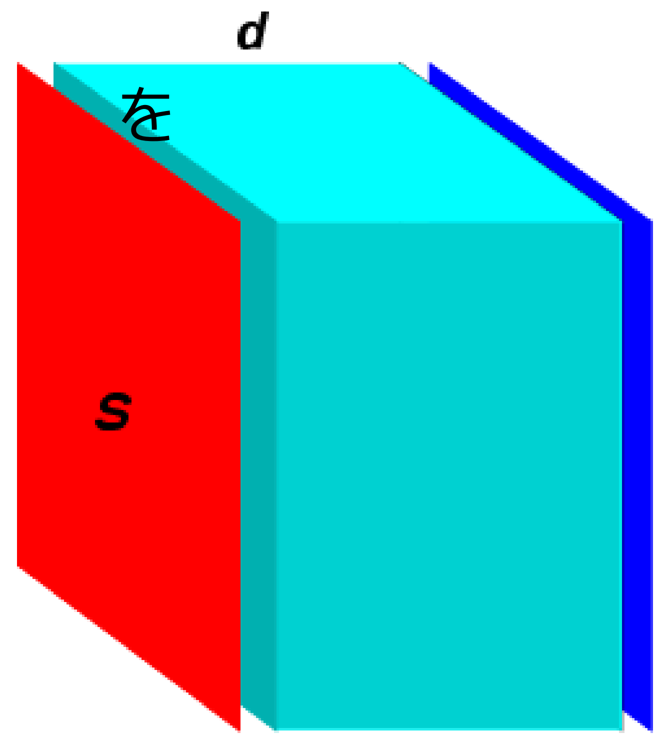
$$Q = \boxed{\frac{\varepsilon_0 S}{d}} V$$

と書いて、

$$C \equiv \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

を、

コンデンサーの容量と呼ぶ。

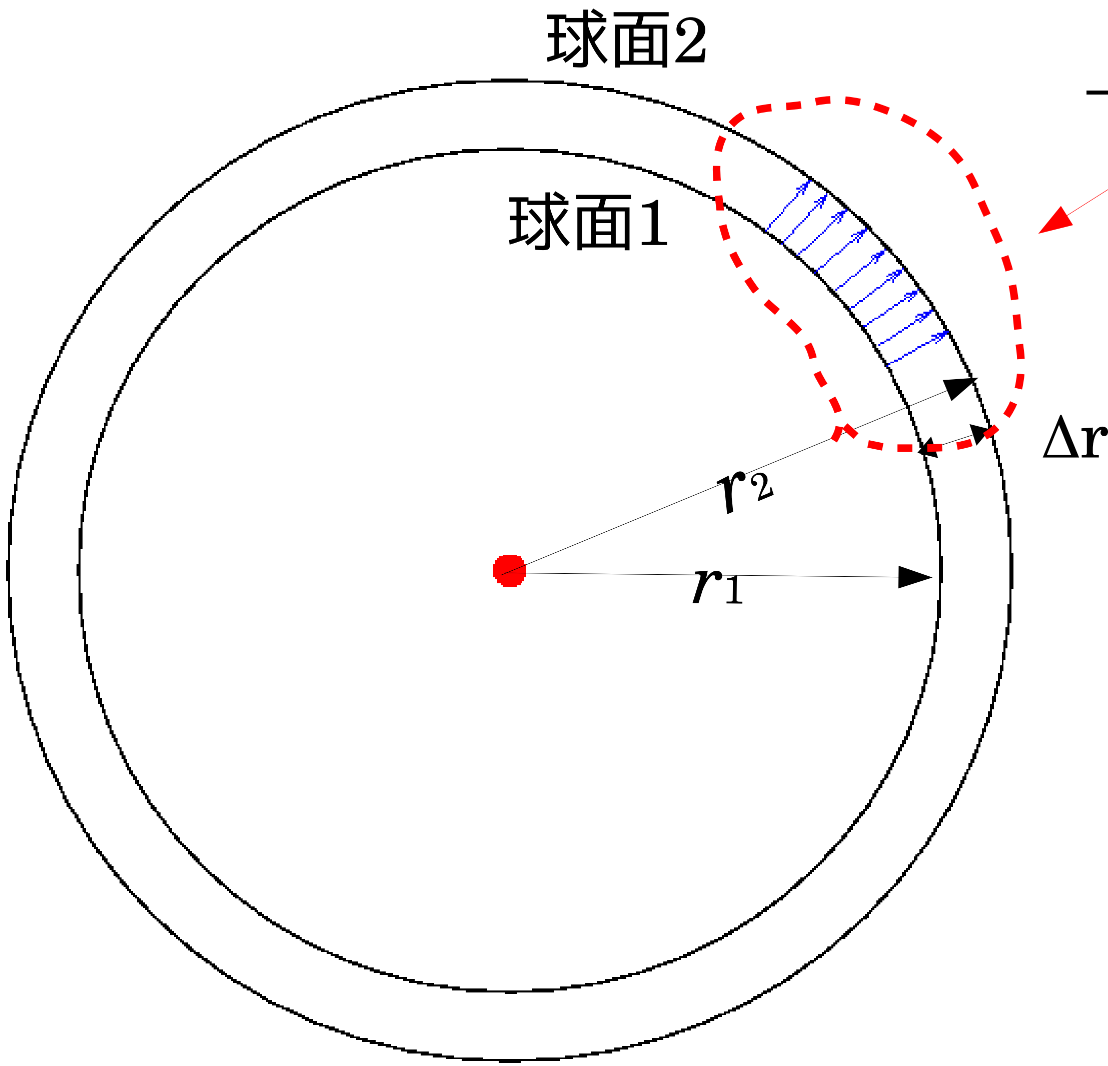


実際のコンデンサーは電荷を蓄える装置として利用される。
また、思考実験の装置としても、重要。

一個の電荷の作る電場（クーロン場）の電位

電荷を中心とした球面対称性＝＞電荷を中心とする球面が等電位面

間隔の狭い２つの電荷を中心とする球面(等電位面)の電位差



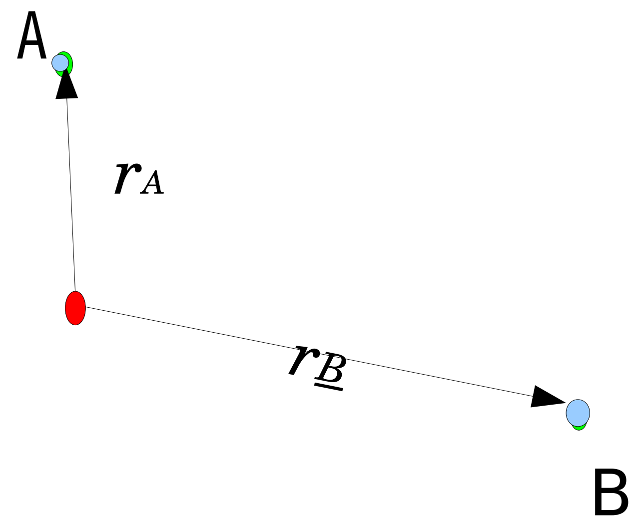
球面1と球面2の電位差

$$\Delta V = -E \cdot \Delta r$$

$$\simeq -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\Delta r$$

一個の電荷の作る電場（クーロン場）の電位差

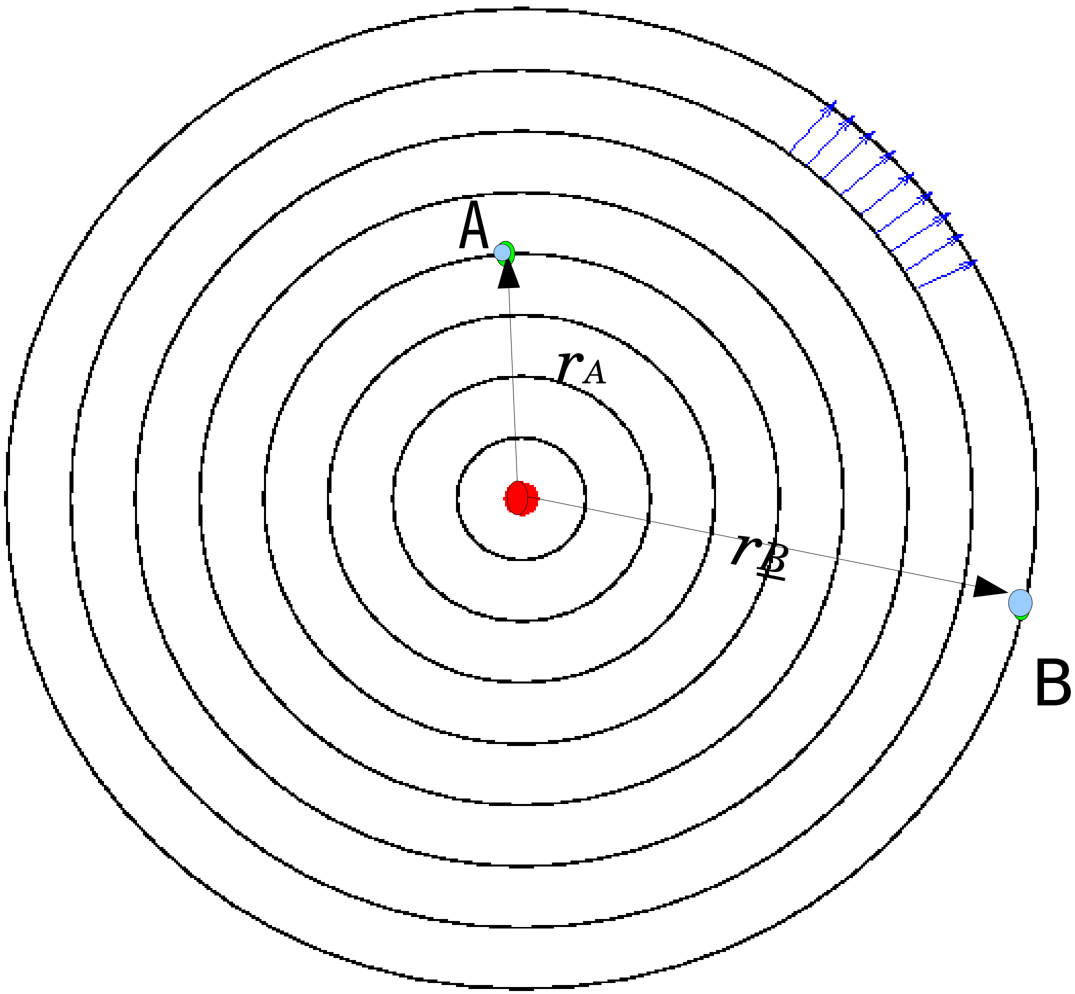
任意の２点間(AとB)の電位差 ΔV



点A　から　点B　まで、

一個の電荷の作る電場（クーロン場）の電位差

任意の２点間(AとB)の電位差 ΔV



$r = r_A$ から $r = r_B$ まで、

$$\Delta V_i = -E_i \cdot \Delta r_i \simeq -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\Delta r_i$$

を足し合わせる。

$$\Delta V_{AB} = \sum_i \Delta V_i \simeq -\sum_i \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i^2}\Delta r_i \simeq -\int_{r_A}^{r_B}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr$$

結局　ra と rb の電位差は、

$$V_{A,B}=-\left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_b}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right]$$

と書ける。

$$V(\vec{r})=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|}+C(定数)$$

と置くと、

$$V_A(\vec{r})=V(\vec{r})-V(\vec{r}_A)$$

と、基準点をAとした、電位が定義できる。
なお、クーロン場では、無限遠を基準点として、

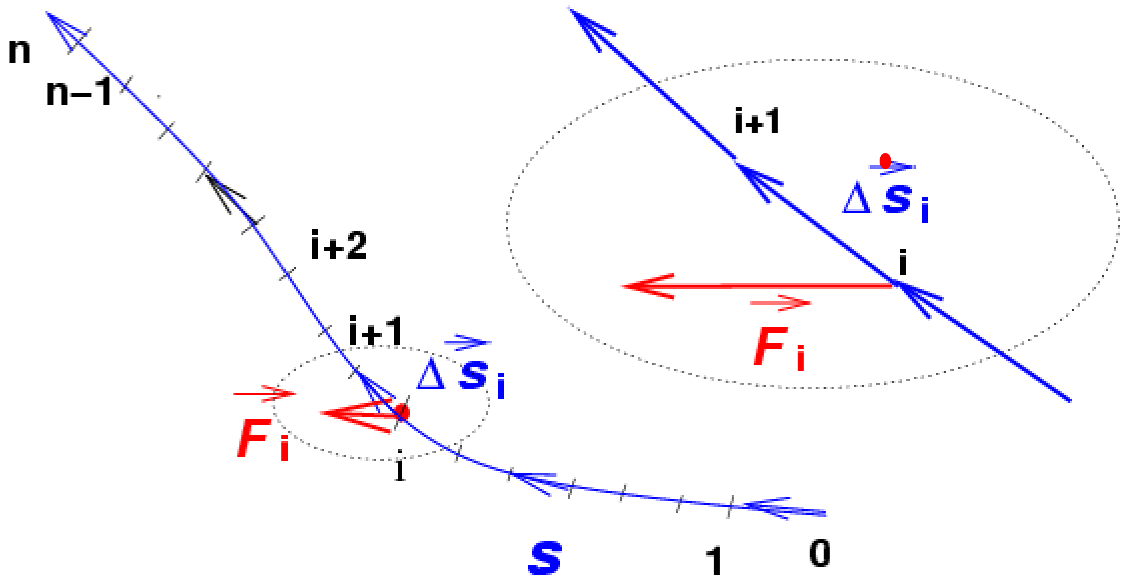
$$V(\vec{r})=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

を、電位とすることができる。

注意、クーロン場以外では、いつも無限遠を基準と取れるわけでは無い

一般的な曲線にそって結ばれる２点の電位差

=> 分割して個々の電位差の和



$$V \simeq -\left(\vec{E}_0 \cdot \Delta \vec{s}_0 + \ldots + \boxed{\vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i +} \ldots + \vec{E}_n \cdot \Delta \vec{s}_n\right)$$

曲線の分割上の仕事

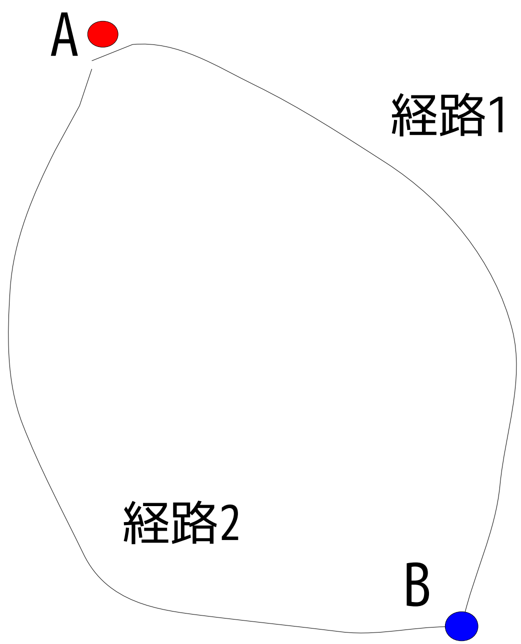
$$= -\sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i \simeq -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

線を分割するから、**線積分**

$\vec{r}_0$ から $\vec{r}_n$ まで、電荷qを移動させるときの仕事は

$$U \simeq -q \cdot \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i \simeq -q \cdot \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

V_{AB} が一意的に計算出きるためには、



$$\left[\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{経路1} = \left[\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{経路2}$$

$$\left[\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{経路1} = -\left[\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{経路2(逆向き)}$$

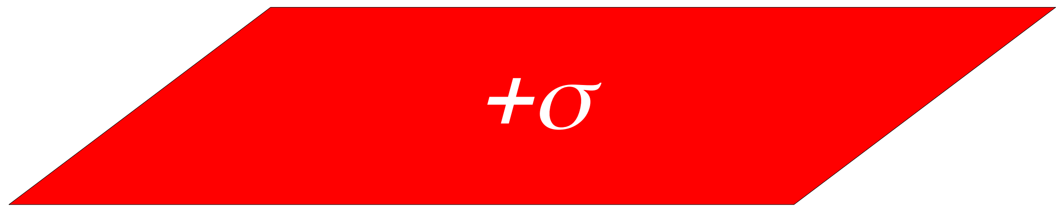
$$\left[\oint_B^B \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{経路1から\ 経路2(逆向き)} = 0$$

つまり、 $$\oint_B^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

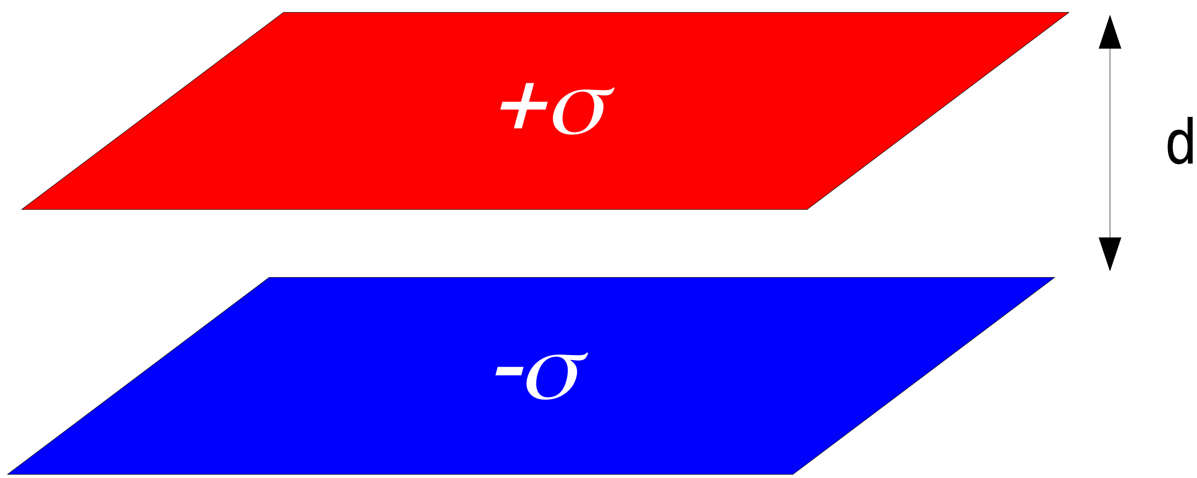
が必要十分条件

クーロン場はこれを満たしている。

1. 無限に広い平面に一様に電荷が分布しており、その平面密度が+σである場合、電気力線を描き電場の強さを示せ。



2. 無限に広い二つの平面が平行に距離ｄ離して置かれ、それぞれに、符号の異なる電荷が面密度+σ, -σで分布している。電気力線を描き、電場の強さと二つの平面の電位差を示せ。



3. 有限の面積Sをもつ二つの平面に、平行に距離ｄ離して置かれ、それぞれに符号の異なる電荷+Q, -Qを与えた場合、2.を近似式として用いて、電場の強さと二つの平面の電位差を示せ。