

マクスウェルの方程式(群)は波動方程式を含む

電磁誘導の法則 $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ を具体的に書き出して、

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right)$$

アンペール・マクスウェルの法則 $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{I} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ も同様に

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mu_0 (I_x, I_y, I_z) + \varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{\partial E_y}{\partial t}, \frac{\partial E_z}{\partial t} \right)$$

$$\vec{B} = (0, B_y, 0)$$

簡単のため、 $\vec{I} = 0$ $\vec{E} = (0, 0, E_z)$ と置くと生き残るのは、

アンペールの法則

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

両辺を t で偏微分

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

電磁誘導の法則

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

両辺を x で偏微分

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t}$$

で囲まれた部分は、「微分の順番が交換できる」とすると等しい。したがって、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad \text{: 波動方程式}$$

が得られた。

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ H/m} = \text{N}^2/\text{A}^2$$

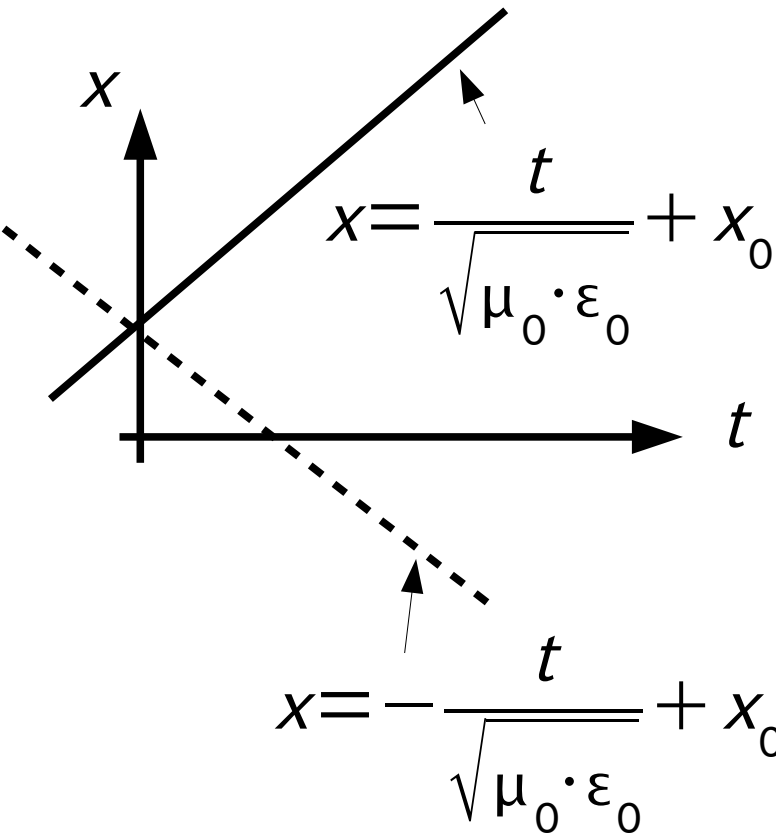
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ F/m}$$

電磁波

この解は、

$$E_z = f\left(x \pm \frac{t}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}}\right)$$

の形なら何でも良い。
この意味で一般解と呼ぶ。



—符号に注目する。左のグラフの実線上で、電場は一定の値をもつ。言い替えると、この一定の値は時間と共に、速度 $1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ で進行している。このような波動を**進行波**と呼ぶ。

+符号に注目すると、時間と共に一定の値をもつ電場は時間と共に後退している。このような波動を**後退波**と呼ぶ。

なお、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \equiv 299792458 \text{ m/s} \approx 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

は光の速度に等しい。