

積分法則のまとめ

面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q / \epsilon_0$$

ガウスの法則

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\text{面積}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

電磁誘導の法則

面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

磁場のガウスの法則

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I$$

アンペールの法則

そろっている

バラバラ?

電場と磁場の対称性を良くする試み

Q_m : 単磁極(モノポール)と

I_m : 磁流[単磁極の流れ]を仮定すると

面積分 $\int_{[閉曲面上]} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q / \epsilon_0$ ガウスの法則

線積分 $\oint_{[面積の周囲]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \sum_{[面積を通る]} I_m - \frac{d}{dt} \int_{面積} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$

電磁誘導の法則

面積分 $\int_{[閉曲面上]} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q_m$ 磁場のガウスの法則

ここは、まだ、対照的でない。

線積分 $\oint_{[面積の周囲]} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I$

アンペールの法則

変位電流(マクスウエルの考察)

電流の途中にコンデンサーを置くとき、
A、Cでのアンペールの法則は

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad \dots(1)$$

と与えられる。

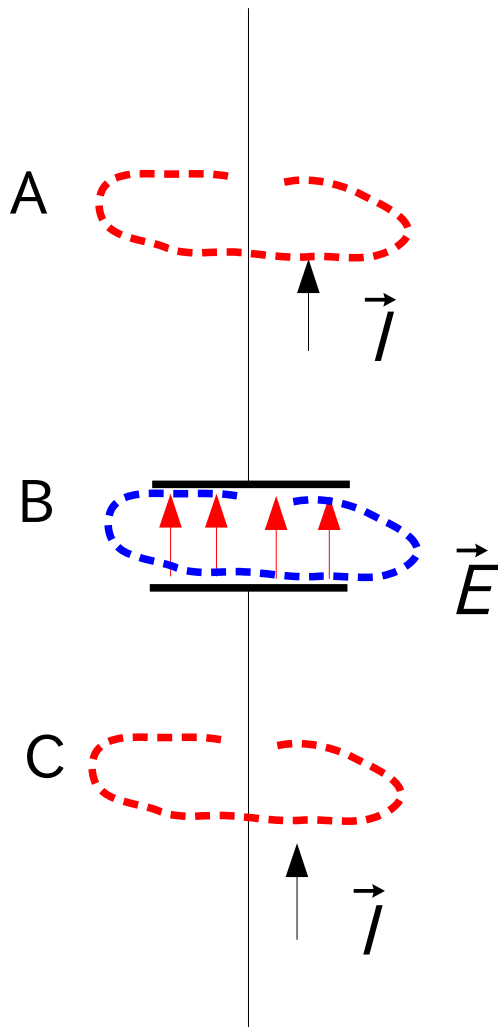
左辺の線積分の位置をAからCまで動かす時、
実際の電流が流れないBで、左辺の値が突然0に
なるのは不自然。電場が電流に代わって同じ
働きをしているに違いない。

コンデンサーでは $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(\epsilon_0 E S)$

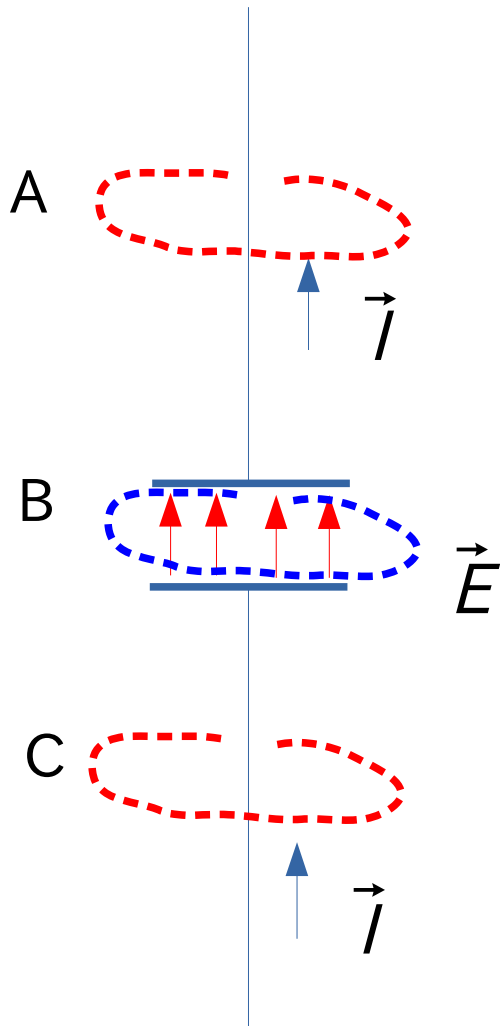
が成り立つので、電流に代わり、

$$\epsilon_0 \frac{d}{dt}(E S)$$

が電流の働きをする。



変位電流(マクスウエルの考察)II



コンデンサーの周囲のアンペールの法則は

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left[\varepsilon_0 \frac{d}{dt} (E S) \right] \quad \dots(2)$$

となる。

したがって、A、B、Cすべての点で成り立つのは、
(1)と合わせて、

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} (E S) \quad \dots(3)$$

である。

対称性を持つ積分方程式たち

電場の面積分 $\int_{[閉曲面上]} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q / \epsilon_0$ (電場のガウスの法則)

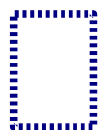
線積分 $\oint_{[面積の周囲]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \sum_{[面積の中を通る]} I_m - \frac{d}{dt} \int_{面積} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$

(電磁誘導の法則)

磁場の面積分 $\int_{[閉曲面上]} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q_m$ (磁場のガウスの法則)

線積分 $\oint_{[面積の周囲]} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積の中を通る]} I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{面積} \vec{E} \cdot \hat{n} dS$

(アンペール・マクスウエルの法則)



電場の面積分に関係



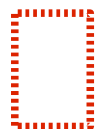
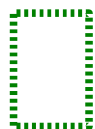
電荷に関係する



電流に関係する



磁場の面積分に関係



単磁極と、磁流はまだ見つからない。

マクスウエルの方程式の積分型

電場の
面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q / \epsilon_0 \quad (\text{電場のガウスの法則})$$

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\text{面積}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{電磁誘導の法則})$$

磁場の
面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (\text{磁場のガウスの法則})$$

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\text{面積}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{アンペール・マクスウエルの法則})$$

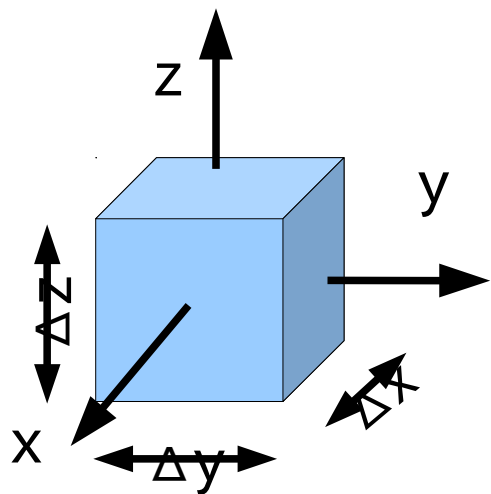
通常、まだ見つからない単磁極、磁流の項は書かない。

ガウスの法則

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q / \epsilon_0 \quad \text{を微分形に書き変える。}$$

座標(x,y,z)を中心に持つ直方体の表面を、この閉曲面と考える。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= [\Delta y \Delta z] \cdot [\vec{E} \cdot \hat{i}]_{x+\Delta x/2} + [\Delta y \Delta z] \cdot [\vec{E} \cdot (-\hat{i})]_{x-\Delta x/2} \\ &+ [\Delta z \Delta x] \cdot [\vec{E} \cdot \hat{j}]_{y+\Delta y/2} + [\Delta z \Delta x] \cdot [\vec{E} \cdot (-\hat{j})]_{y-\Delta y/2} \\ &+ [\Delta x \Delta y] \cdot [\vec{E} \cdot \hat{k}]_{z+\Delta z/2} + [\Delta x \Delta y] \cdot [\vec{E} \cdot (-\hat{k})]_{z-\Delta z/2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= [\Delta x \Delta y \Delta z] \cdot \frac{[\vec{E} \cdot \hat{i}]_{x+\Delta x/2} - [\vec{E} \cdot \hat{i}]_{x-\Delta x/2}}{\Delta x} \\ &+ [\Delta x \Delta y \Delta z] \cdot \frac{[\vec{E} \cdot \hat{j}]_{y+\Delta y/2} - [\vec{E} \cdot \hat{j}]_{y-\Delta y/2}}{\Delta y} \\ &+ [\Delta x \Delta y \Delta z] \cdot \frac{[\vec{E} \cdot \hat{k}]_{z+\Delta z/2} - [\vec{E} \cdot \hat{k}]_{z-\Delta z/2}}{\Delta z} \end{aligned}$$

(続き) $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ が非常に小さいとき

$$\text{左辺} = [\Delta x \Delta y \Delta z] \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

したがって、電場に対するガウスの法則、

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q / \epsilon_0$$

は、次の様に書き換えられる。

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \left(= \frac{\sum_{[\text{内部}]} Q}{[\Delta x \Delta y \Delta z]} / \epsilon_0 \right)$$

ρ_c : 電荷密度

この関係はベクトル演算子を用いると、簡単に書け記憶しやすい。

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad \text{または} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}$$

いずれも左辺は

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

を、まとめた書き方。特に後者は、形式的に

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{と} \quad \vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$$

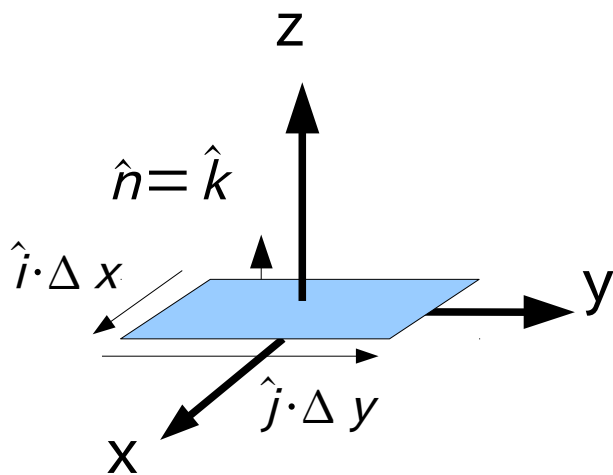
の内積と考えたものである。

電磁誘導の法則

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\text{面積}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS \quad \text{を微分形に書き変える。}$$

XY平面の長方形の面積と、その周囲を考える。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= [\vec{E} \cdot \hat{i} \cdot \Delta x]_{y-\Delta y/2} + [\vec{E} \cdot \hat{j} \cdot \Delta y]_{x+\Delta x/2} \\ &+ [\vec{E} \cdot (-\hat{i} \cdot \Delta x)]_{y+\Delta y/2} + [\vec{E} \cdot (-\hat{j} \cdot \Delta y)]_{x-\Delta x/2} \\ &= \left([\vec{E} \cdot \hat{i}]_{y-\Delta y/2} - [\vec{E} \cdot \hat{i}]_{y+\Delta y/2} \right) \cdot \Delta x \\ &+ \left(-[\vec{E} \cdot \hat{j}]_{x-\Delta x/2} + [\vec{E} \cdot \hat{j}]_{x+\Delta x/2} \right) \cdot \Delta y \\ &= [\Delta x \Delta y] \frac{[\vec{E} \cdot \hat{i}]_{y-\Delta y/2} - [\vec{E} \cdot \hat{i}]_{y+\Delta y/2}}{\Delta y} \\ &+ [\Delta x \Delta y] \frac{[\vec{E} \cdot \hat{j}]_{x+\Delta x/2} - [\vec{E} \cdot \hat{j}]_{x-\Delta x/2}}{\Delta x} \end{aligned}$$



続き

$$\begin{aligned} &= [\Delta x \Delta y] \frac{E_x(x, y - \Delta y/2, z) - E_x(x, y + \Delta y/2, z)}{\Delta y} \\ &\quad + [\Delta x \Delta y] \frac{E_y(x + \Delta x/2, y, z) - E_y(x - \Delta x/2, y, z)}{\Delta x} \\ &\sim [\Delta x \Delta y] \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= -\frac{d}{dt} \int_{\text{面積}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = -\int_{\text{面積}} \frac{\partial(\vec{B} \cdot \hat{k})}{\partial t} dS \\ &\sim -\frac{\partial B_z}{\partial t} [\Delta x \Delta y] \end{aligned}$$

続き2,

$\Delta x, \Delta y$ が非常に小さいとき

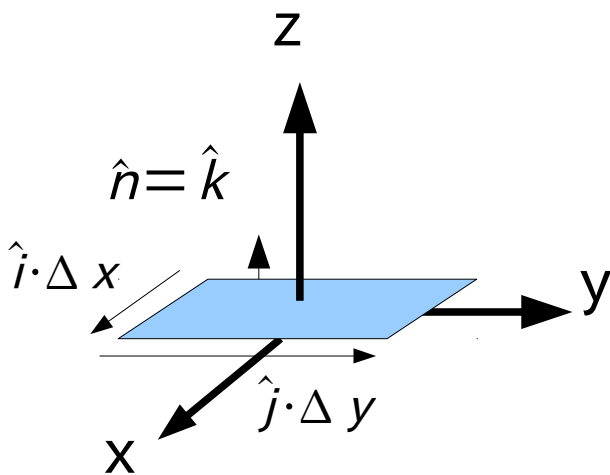
$$\text{左辺} = [\Delta x \Delta y] \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

$$\text{右辺} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} [\Delta x \Delta y]$$

したがって、電磁誘導の法則は、
XY平面上で、

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

となる。



続き3,

まず、XY平面(Z軸に垂直)を考えたが、YZ平面(X軸に垂直)、ZX平面(Y軸に垂直)でも同様な考察が可能。したがって、電磁誘導の法則の微分形は、次の3つの式のセットになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) &= - \frac{\partial B_y}{\partial t} \end{aligned}$$

ベクトルとしてまとめると、

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right)$$

この関係も、ベクトル演算子を導入すると覚えやすい。

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{または} \quad \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

後者は、形式的に

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{と} \quad \vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$$

の外積と考えたもの。

アンペール・マクスウェルの法則

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\text{面積}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

の微分形

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mu_0 I_z + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) = \mu_0 I_x + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) = \mu_0 I_y + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

ベクトルとしてまとめると、

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mu_0 (I_x, I_y, I_z) + \varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{\partial E_y}{\partial t}, \frac{\partial E_z}{\partial t} \right)$$

ベクトル演算子を導入して、

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{I} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

または

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{I} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

マクスウエルの方程式の積分型

電場の
面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q / \epsilon_0 \quad (\text{電場のガウスの法則})$$

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\text{面積}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{電磁誘導の法則})$$

磁場の
面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad (\text{磁場のガウスの法則})$$

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\text{面積}} \vec{E} \cdot \hat{n} dS \quad (\text{アンペール・マクスウエルの法則})$$

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。

マクスウエルの方程式 (通常はこの微分形を意味する)

電場のガウスの法則

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}$$

または

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}$$

電磁誘導の法則

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

磁場のガウスの法則

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

アンペール・マクスウエルの法則

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

今日の問題

1. マクスウエルの方程式の積分型、微分型を対応させて示せ。
2. マクスウエルの方程式が波動方程式を含むことを示せ。