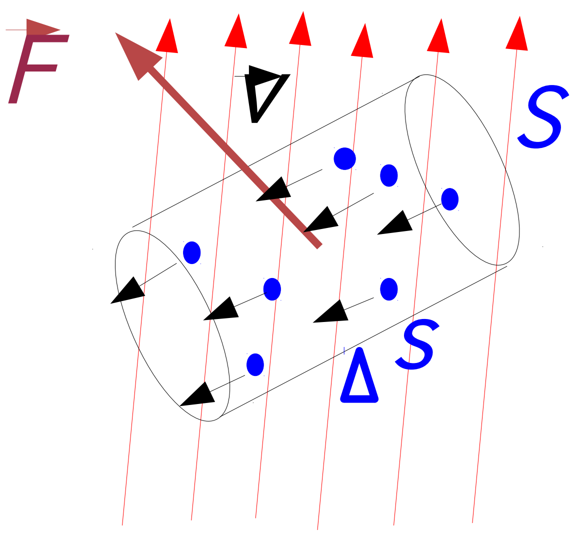
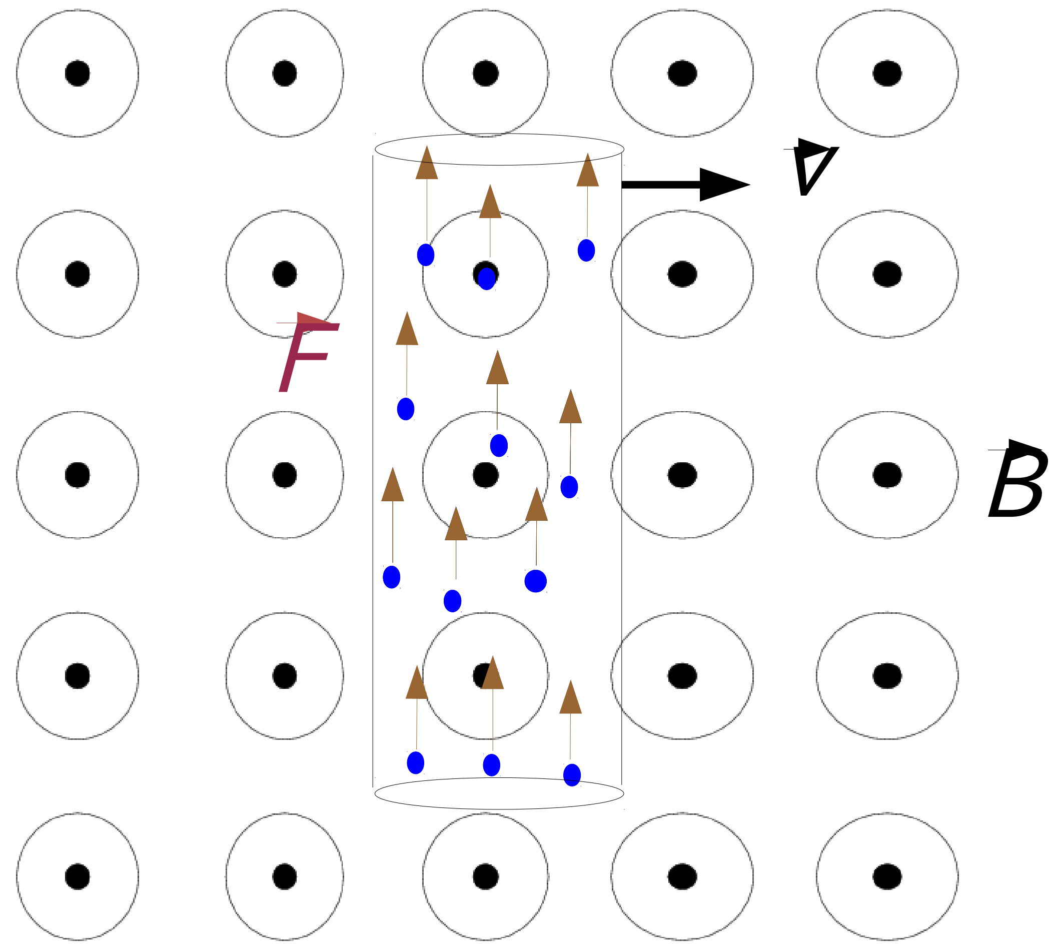
電磁誘導

動いている物体の中の電子に、磁場があたえる力

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

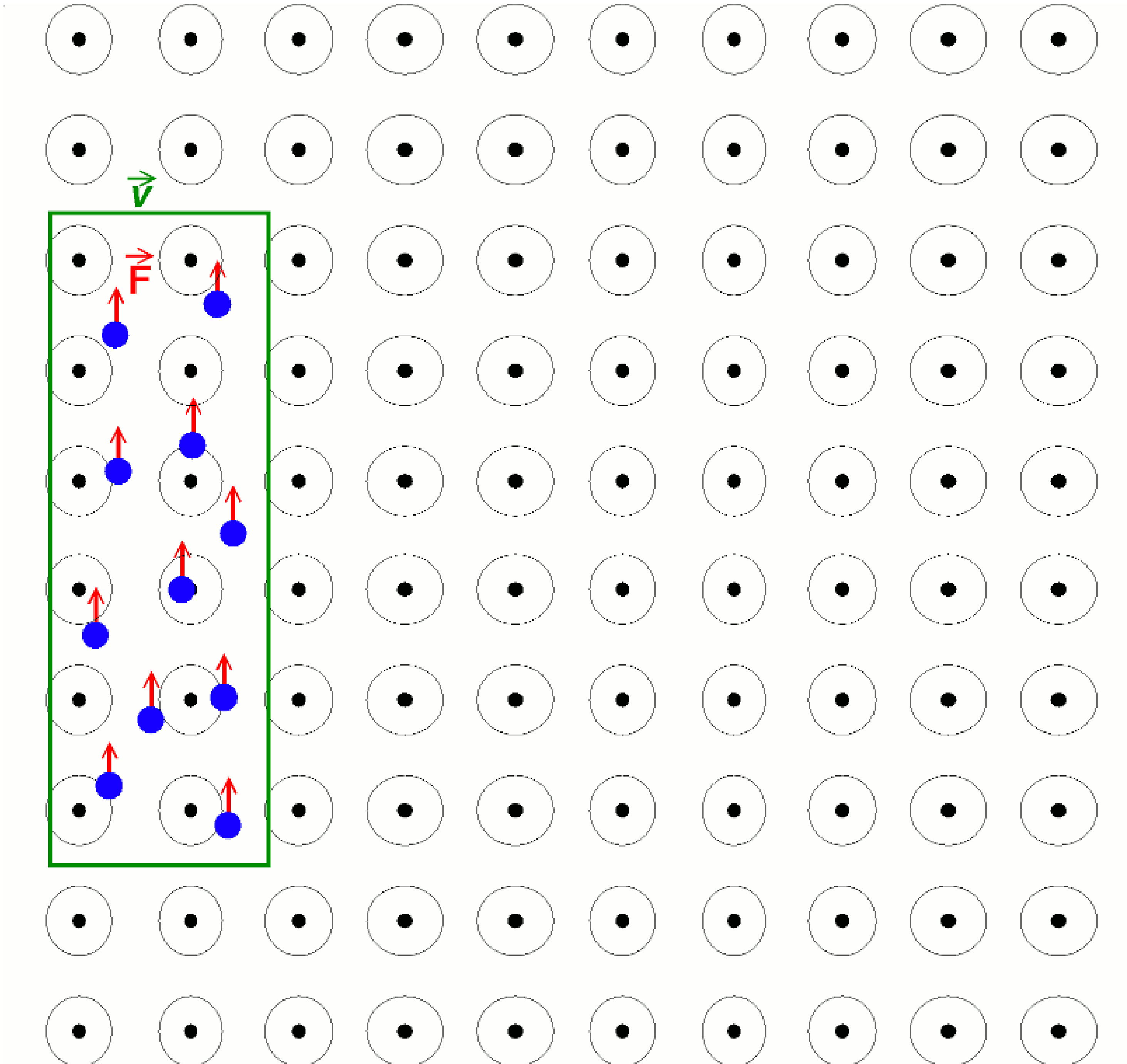




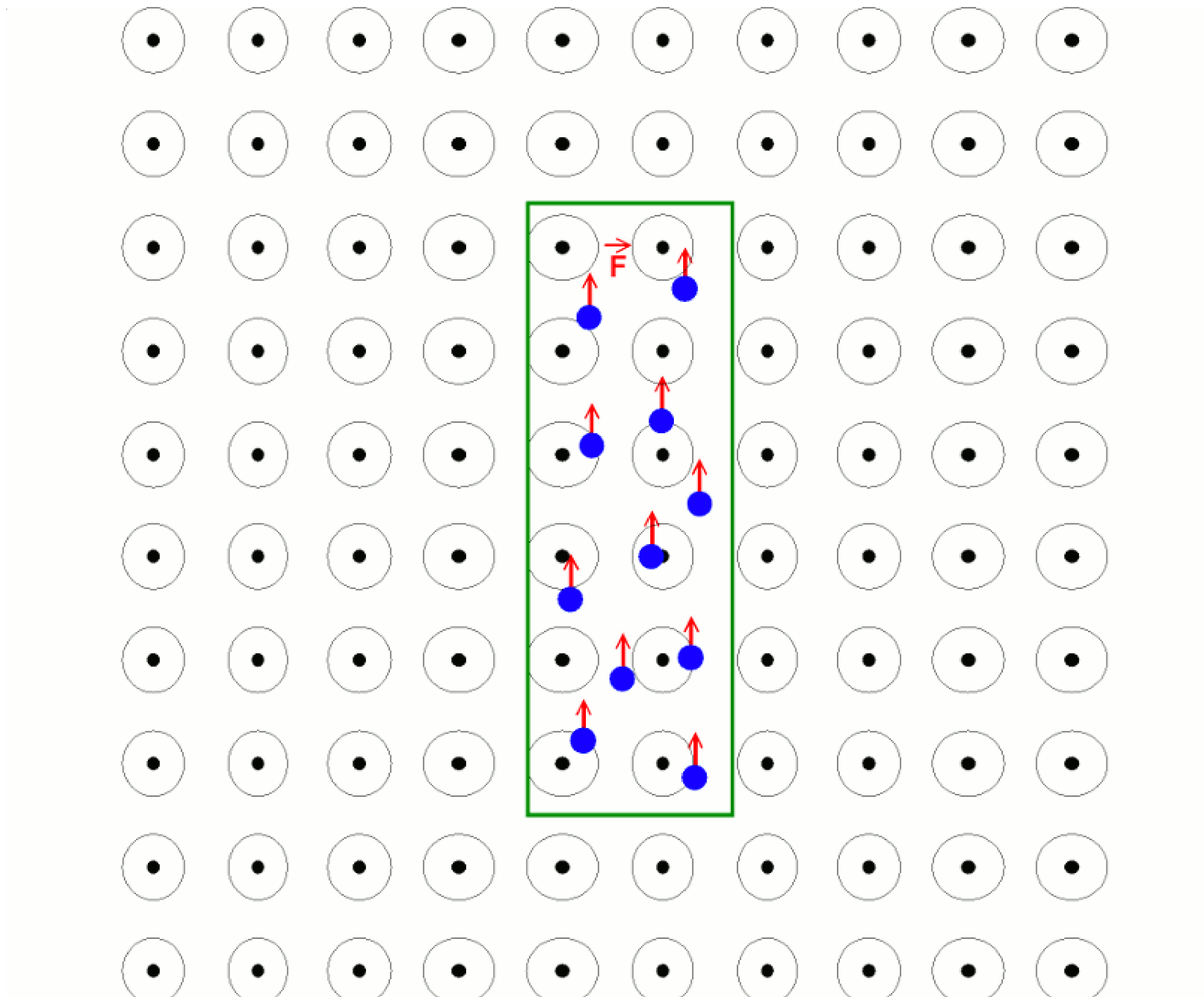
まだ、電子の移動は考えない。

この力は電場による力： $\vec{F} = -e\vec{E}\,'$　$\vec{E}\,' = (\vec{v} \times \vec{B})$と同じ。

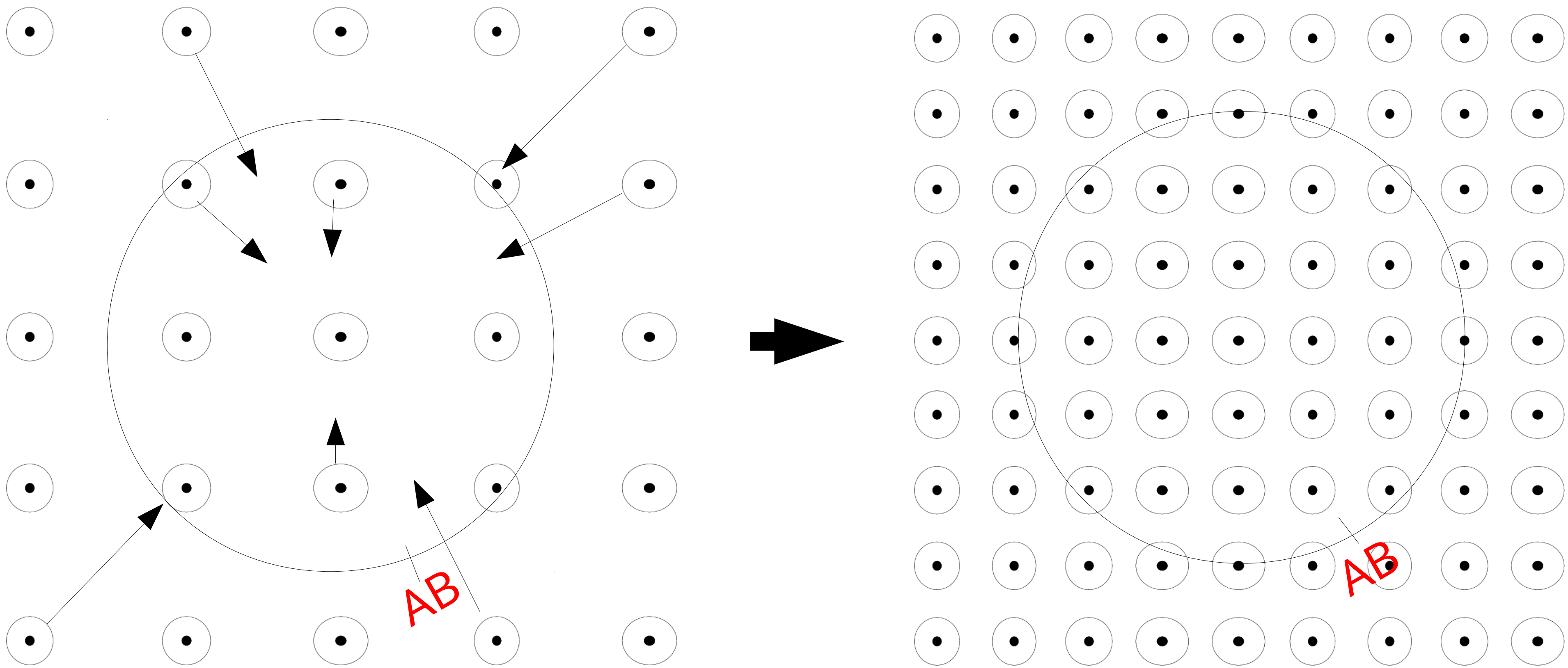
$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B}) = -e\vec{E}\,'$$



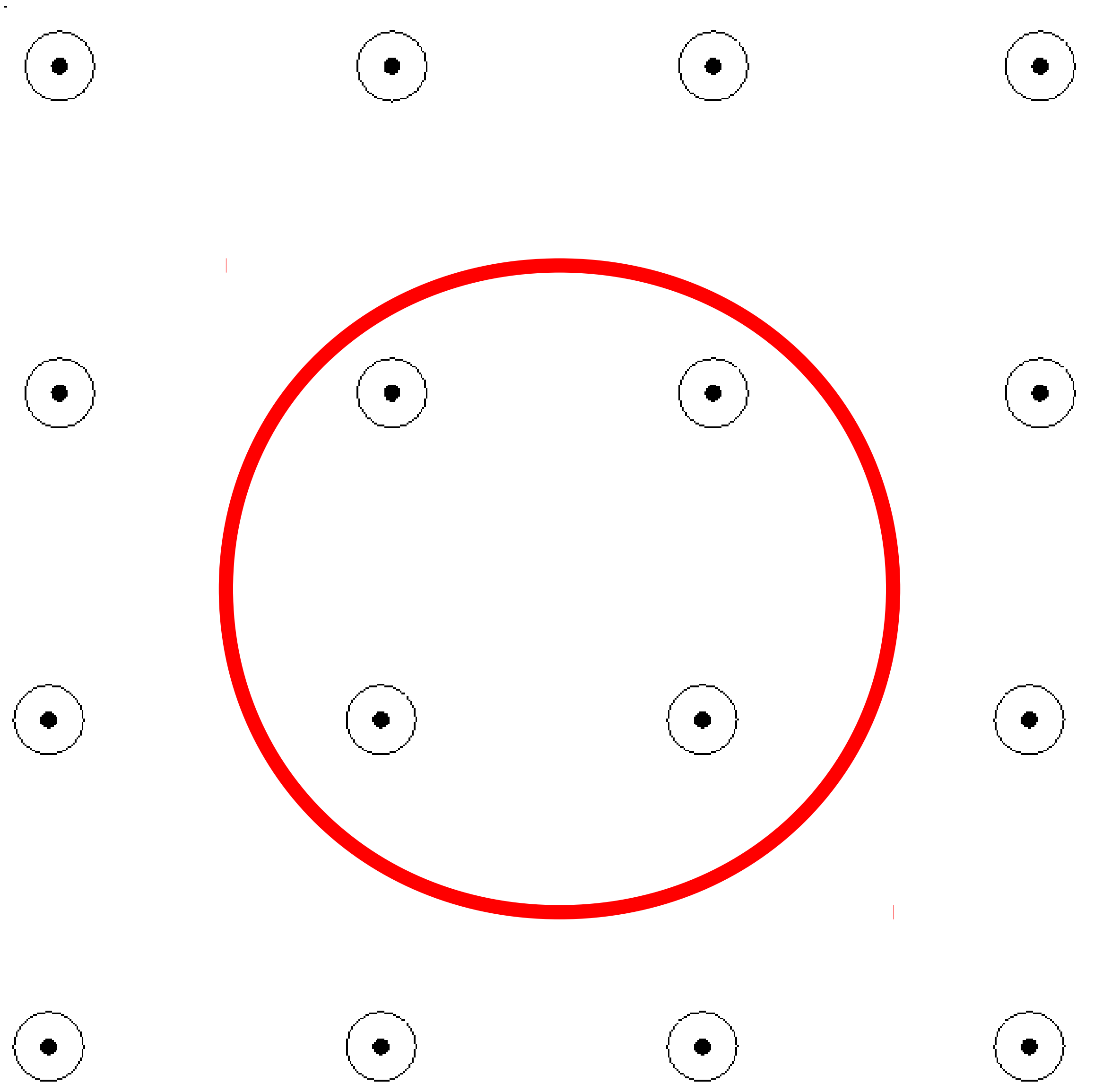
$\vec{B}$が、速度 $-\vec{v}$ で進む場合　　$\vec{F} = -e\vec{E}' = -e\left[-\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right]$



円形の導線の中の磁場が、次第に強くなる場合、

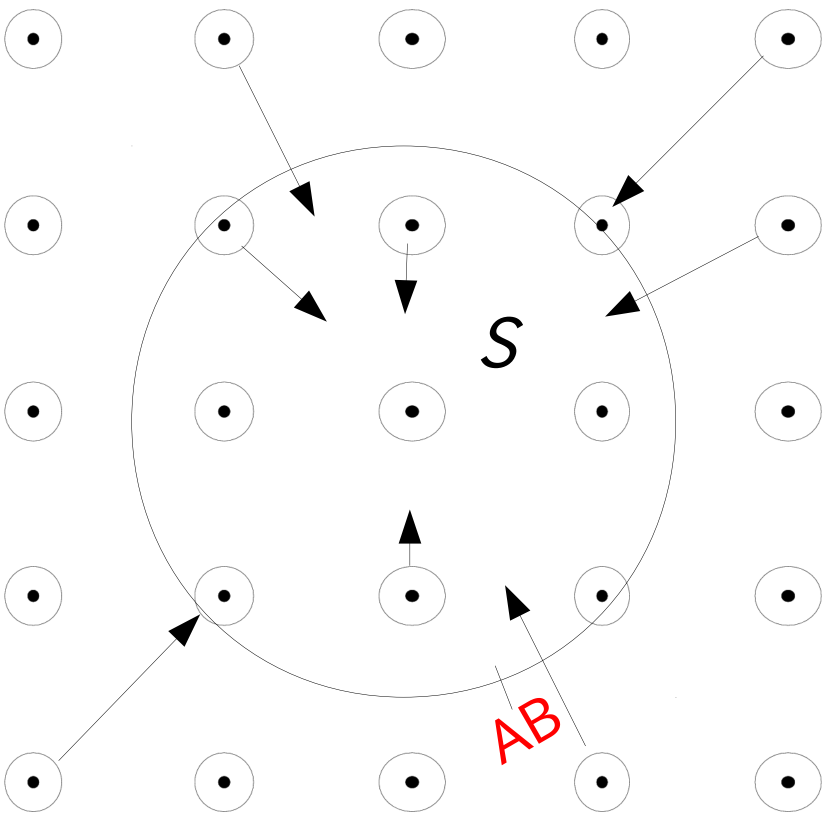


右の図の4倍の磁力線密度



磁場が強くなる時は、磁力線の移動が伴う。

電磁誘導(3)



一周積分

$$\oint \left[\left(\vec{v}_{[\text{磁場の移動する速度}]}\right)\times\vec{B}\right]\cdot d\vec{s}$$

は、積分路内に単位時間に入って来る磁力線の数であるが、同様な量は、下の式でも計算できる。

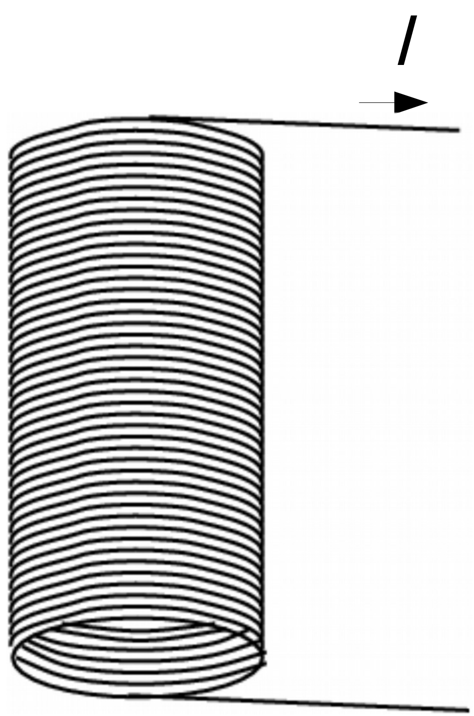
$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

注意、$\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$は面積$S$を通る磁力線の数を数える操作。(ガウスの法則参照) 結局、AB間の電位差は、

$$V_{[AB]} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

と書ける。(誘導起電力)

相互誘導



ソレノイドに巻きついた導線に発生する電位差は、ソレノイドの磁場：　$B = \mu_0 n_1 I$

より、

$$V_{[AB]} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS$$

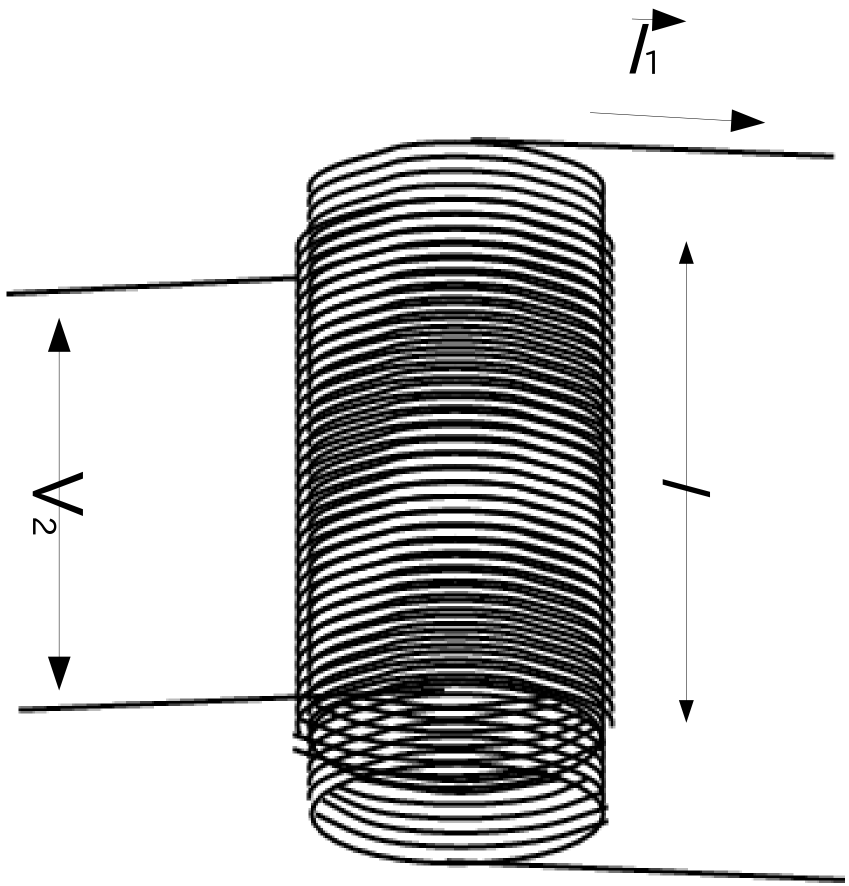
$$= -\frac{d[B\cdot S]}{dt} = -S\mu_0 n_1 \frac{dI}{dt}$$

この電位差は、電流を流す起電力でもある。
巻き数が N 回ならば、N 倍の起電力。

$$V = -N\cdot S\mu_0 n_1 \frac{dI}{dt}$$

直接接続されていない、コイル同士の
磁気による結び付きを相互誘導と呼ぶ。

トランス



二つのソレノイドがかさなりあっている。
かさなりの長さを l、それぞれの巻き線密度をn_1, n_2、ソレノイド1 を流れる電流を I_1 とする。

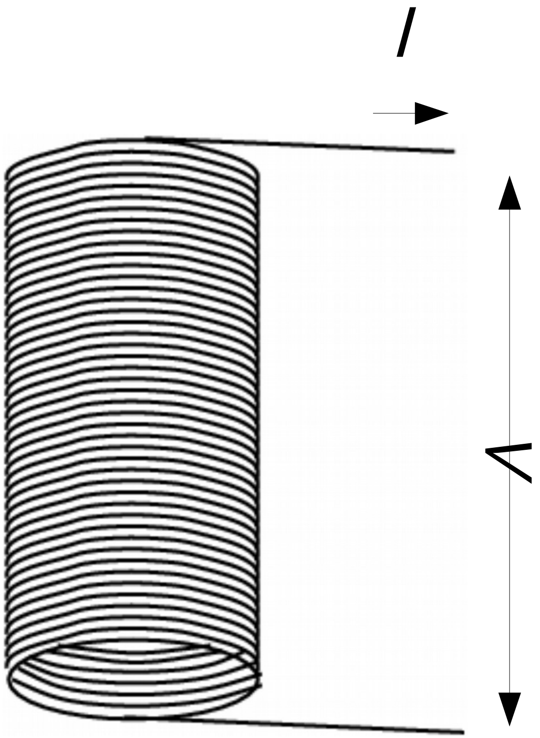
ソレノイドの両端で、磁場が広がる効果を無視すると、ソレノイド2 に誘導される起電力V_2 は、重なっているソレノイド2の巻数　$N = l \cdot n_2$ より、

$$V_2 = -l \cdot n_2 \cdot S \mu_0 n_1 \frac{dI_1}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

と書ける。

電流の変化と起電力の比例定数 M を相互インダクタンスと呼ぶ。

自己誘導



一つのソレノイドの磁場の強さの変化は、
そのソレノイド自身にも起電力を引き起こす。
この現象を自己誘導と呼ぶ。
その起電力は、相互誘導の強さを与える式、

$$V_2 = -l n_2 \cdot S \mu_0 n_1 \frac{dI_1}{dt}$$

に $n_2 = n_1$ を代入、不要な添字を整理して、

$$V = -l S \mu_0 n_1^2 \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

と与えられる。

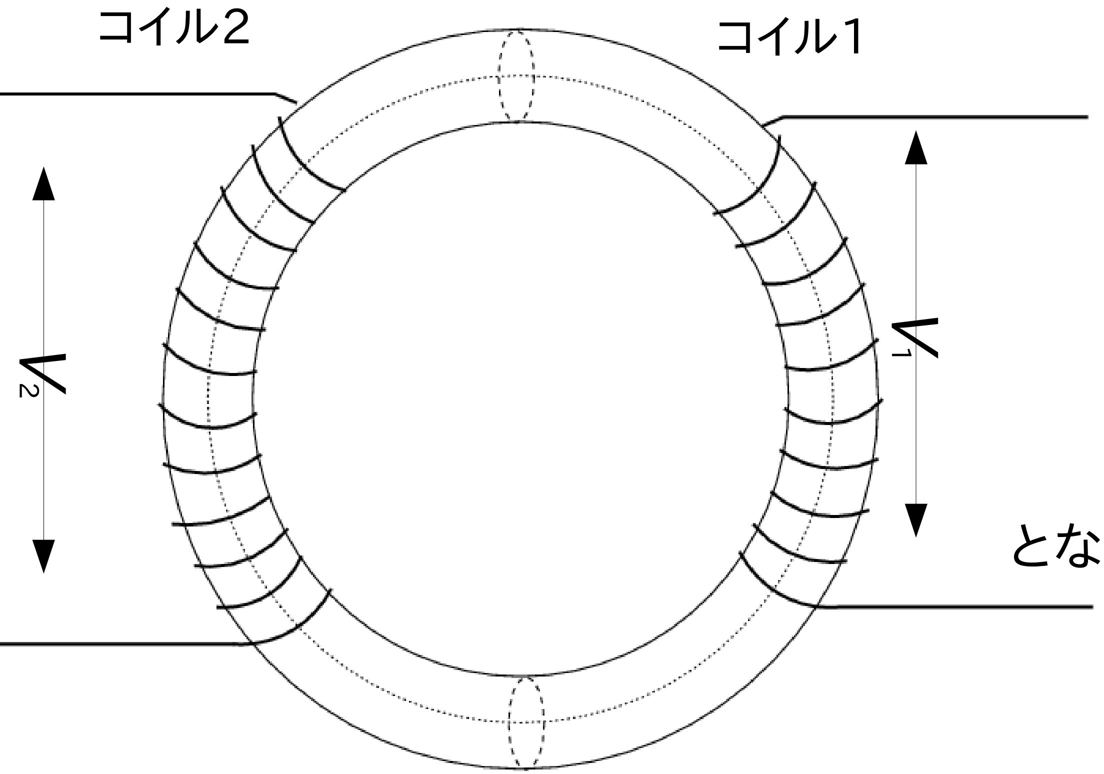
この電流の変化率と起電力の比例定数 L を
自己インダクタンスと呼ぶ。

トランス2

左下の様な、ドーナッツ型の磁性体の芯をもつトランスは、磁束(磁場)の漏れ出しが少なく、効率が良い事が知られている。(トロイダル型トランスとよぶ)

この様な場合コイルのかさなりの長さは、全周の長さl、

巻き線密度は、$n_1 = N/l$と考えてよい。



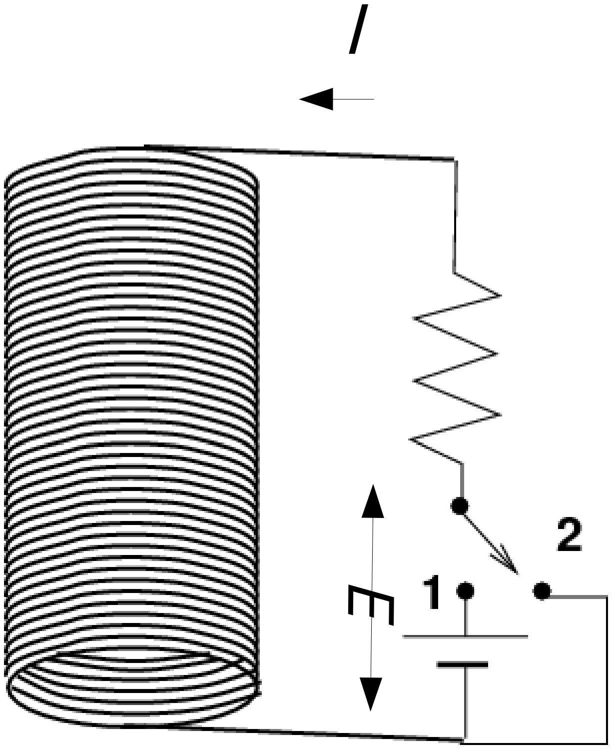
$$V_1 = -S\mu \frac{N_1^2}{l}\frac{dI_1}{dt}$$ 自己誘導

$$V_2 = -S\mu \frac{N_1 \cdot N_2}{l}\frac{dI_1}{dt}$$ 相互誘導

となるので、

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2}$$ が得られた。

コイルの入った回路 (LR 回路)



左図の様にソレノイドに、電池の様な直流電源を用いて、電流を流していたとしよう。

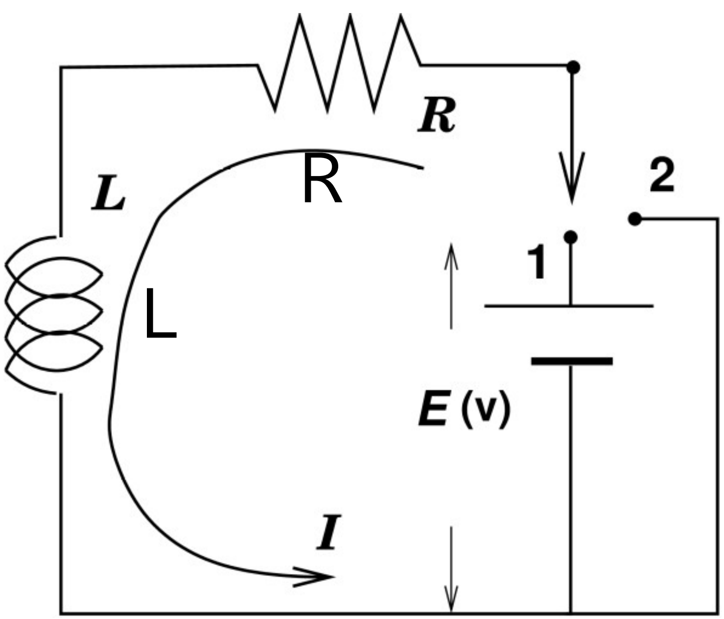
ある瞬間(t=0)に、スイッチが切り替わって、電池のところが、ただの導線に変った。

スイッチ1の状態での電圧のバランス。

$$E = R\,I + L\frac{dI}{dt}$$

この状態で、長時間放置されれば、電流の時間変化は無視できる。したがって、

$$E = R\,I$$



スイッチ2の状態での電圧のバランス。

$$0 = R\,I + L\frac{dI}{dt}$$

スイッチ2の状態で、微分方程式を直接解く

$$0 = RI + L\frac{dI}{dt} \longrightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$

$$\longrightarrow \frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}$$

(変数分離型の微分方程式)

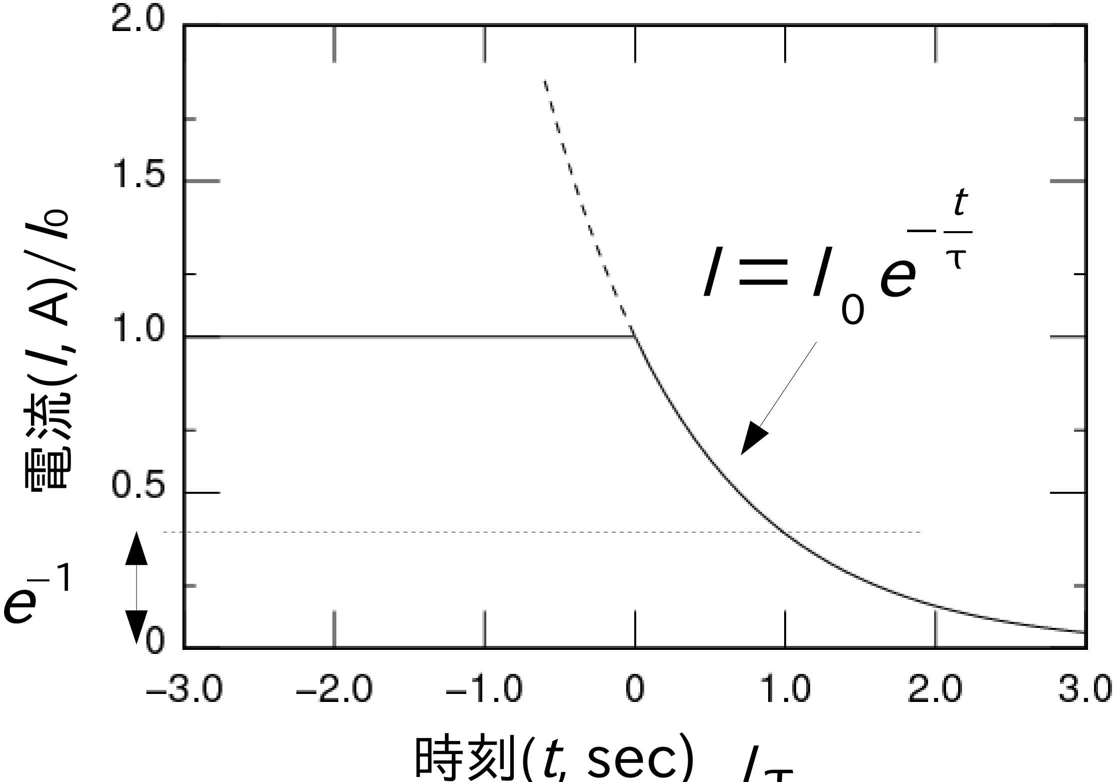
$$\int_0^t \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}dt = \int_0^t \left(-\frac{R}{L}\right)dt$$

$$\int_{I(0)}^{I(t)} \frac{dI}{I} = \int_0^t \left(-\frac{R}{L}\right)dt$$

$$\log\frac{I(t)}{I(0)} = -\left(\frac{R}{L}\right)t \longrightarrow I(t) = I(0)\,e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

電流を時間 t の関数で表す。

$$I(t) = I_0 e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$ ただし、 $I_0 = I(0)$



$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

e^{-1}

$/\tau$

$$\tau \equiv \frac{L}{R}$$:時定数

時刻 t=0 で、スイッチ1から、スイッチ2に、切り替わった。

スイッチが2に切り替わってから、抵抗に発生する全熱量U

%

$$U = \int_0^{\infty} R \cdot I^2(t)\, dt$$

$$= R \cdot I_0^{\,2} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \left[e^{-2\frac{t}{\tau}} \right]_0^{\infty}$$

したがって、

$$\boxed{U = \frac{1}{2} L I_0^{\,2}}$$

は、状態1で、電流 I_0 が流れていた時、

コイルに蓄えられていたエネルギー

スイッチが2に切り替わってから、$\boxed{\text{抵抗に発生する全熱量}U}$

$$U = \int_0^{\infty} R \cdot I^2(t)\, dt$$

$$= R \cdot I_0^{\ 2} \cdot \frac{\tau}{2} \cdot \left[e^{-2\frac{t}{\tau}} \right]_0^{\infty}$$

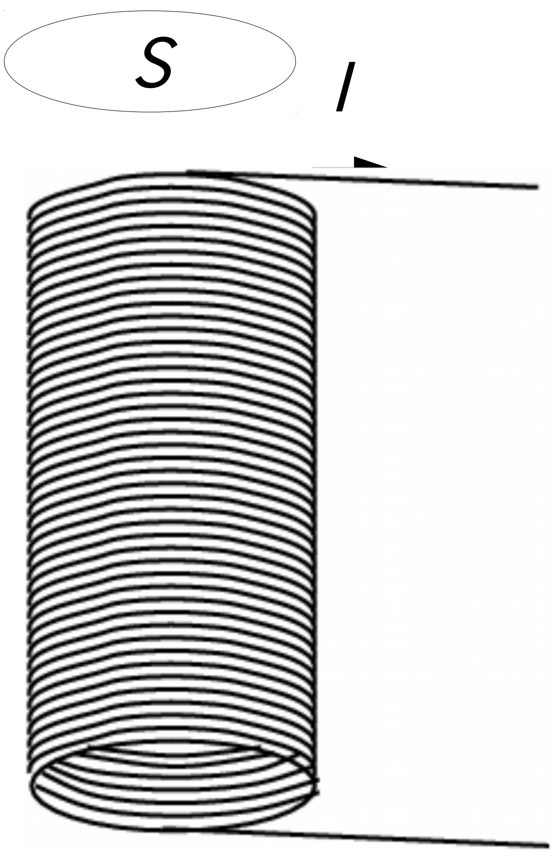
したがって、

$$\boxed{U = \frac{1}{2} L I_0^{\ 2}}$$

は、状態1で、電流 I_0 が流れていた時、
コイルに蓄えられていたエネルギー

ソレノイドの、自己インダクタンスは

$$L = lS\mu_0 n_1^2$$



また、

$$B = \mu_0 n_1 I$$

したがって、電流 I が流れるコイルに蓄えられたエネルギーは

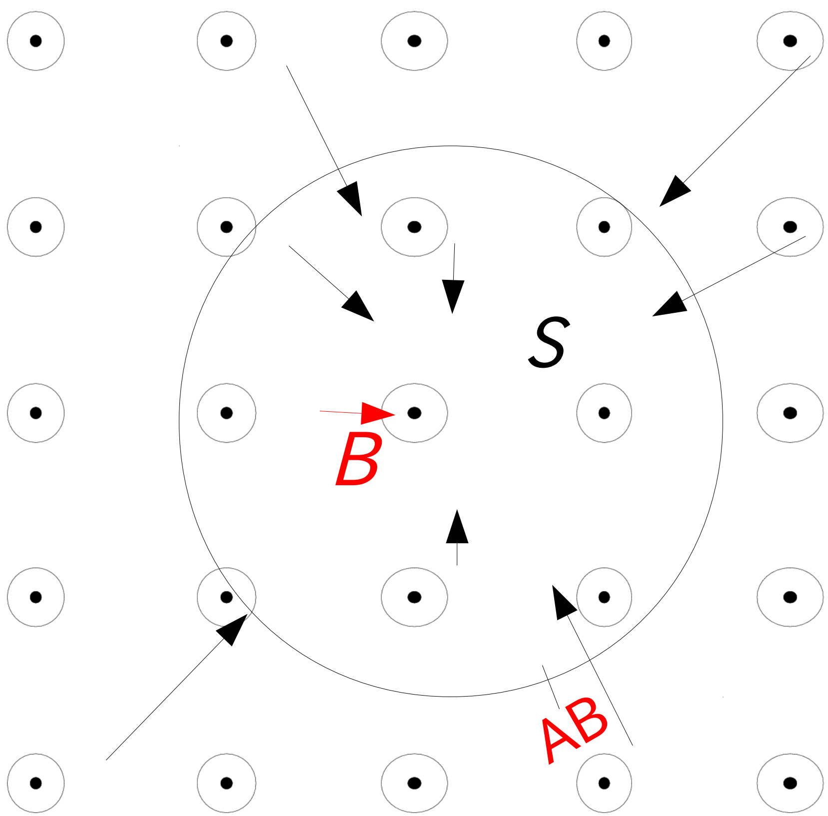
$$U = \frac{1}{2} lS\mu_0 n_1^2 I^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 [lS]$$

$[lS]$は、ソレノイド内部の体積だから、

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

は、ソレノイド内部の磁場のエネルギー密度と考えられる。

今日の問題



一様な磁場があり、その中に磁場に垂直に円形で面積Sの導線があり、一箇所切れ目があり、僅かに離れている両端をA,Bとする。

1, 磁場の強さが時間の関数として、

$$B = b \cdot t + B_0$$

のように変化するとき、A,Bに発生する起電力を求めよ。

2, 磁場の強さが時間の関数として、

$$B = B_0 \sin(\omega t)$$

のように変化するときでは、起電力はどうなるか。