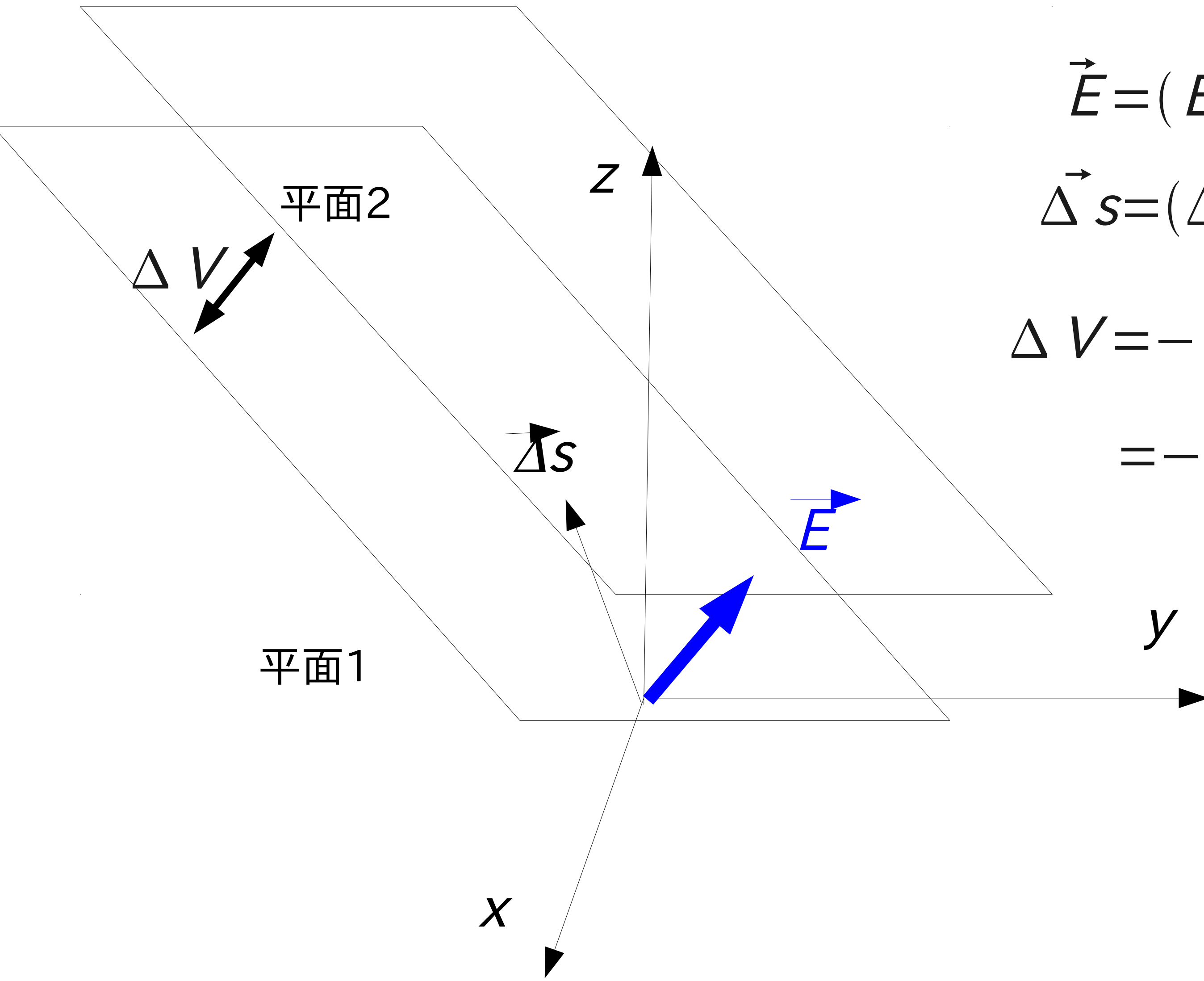
電位から電場を求める。
電位差の2つの計算の比較

A. **電場と距離ベクトルの内積** (座表を用いた、3次元的イメージ)



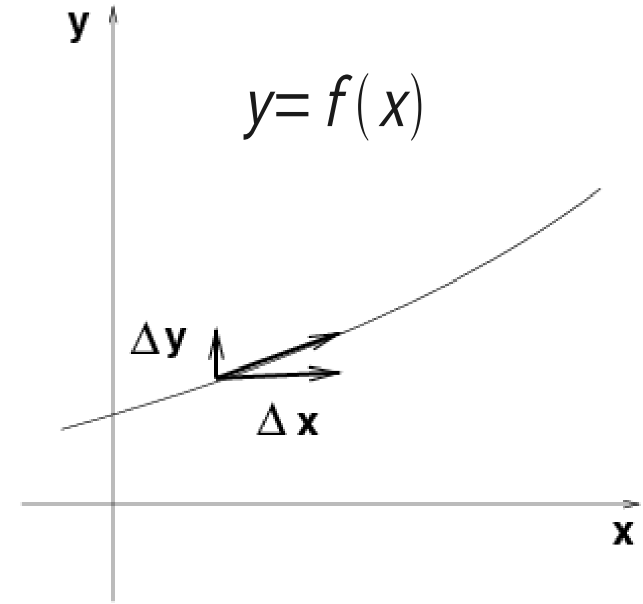
$$\vec{E}=(E_x, E_y, E_z)$$

$$\vec{\Delta s}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$\Delta V=-\vec{E}\cdot\vec{\Delta s}$$

$$=-(E_x\cdot\Delta x+E_y\cdot\Delta y+E_z\cdot\Delta z)$$

微分：物理では、小さい量の比(割り算)。



$$f'(x)=\frac{df}{dx}\simeq\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)\simeq\frac{df}{dx}\cdot\Delta x\ (=f'(x)\cdot\Delta x)$$

偏微分は、他の変数を定数の様に扱う。

$$\frac{\partial V}{\partial x}\simeq\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}=\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

x による偏微分

$$\Delta V=V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)\simeq\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\Delta x$$

B, 電位が位置の関数として与えられているとして、

x, y, z それぞれ$\Delta x, \Delta y, \Delta z$だけ変化するとき、$V(x,y,z)$ の変化は、

$$\Delta V = V(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - V(x, y, z)$$

$$= V(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - V(x+\Delta x, y+\Delta y, z)$$

$$+ V(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - V(x+\Delta x, y, z)$$

$$+ V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

変化する変数が一つだけになるよう、分解して差をとる。

$$\simeq \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z)\cdot\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}(x+\Delta x, y, z)\cdot\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\cdot\Delta z$$

$$\boxed{\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z}$$

A, B を比較

$$\Delta V = -\vec{E}\cdot\vec{\Delta s}$$

A, 電磁場のイメージ

$$= -(\boxed{E_x}\cdot\Delta x + \boxed{E_y}\cdot\Delta y + \boxed{E_z}\cdot\Delta z)$$

$$\Delta V \simeq \boxed{\frac{\partial V}{\partial x}}\Delta x + \boxed{\frac{\partial V}{\partial y}}\Delta y + \boxed{\frac{\partial V}{\partial z}}\Delta z$$

B, 偏微分の性質

すなわち、

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad \left(\simeq -\left(\frac{\Delta V}{\Delta x}, \frac{\Delta V}{\Delta y}, \frac{\Delta V}{\Delta z}\right)\right)$$

「ベクトル解析」で使われる記号

$$\vec{E}=\left(E_x, E_y, E_z\right)= -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad \left(\simeq -\left(\frac{\Delta V}{\Delta x}, \frac{\Delta V}{\Delta y}, \frac{\Delta V}{\Delta z}\right)\right)$$

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\left(V\right) = -\nabla V$$

(Vの勾配)

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ナブラと呼ばれるベクトル・微分演算子

クーロン場の電位から、電場を求める。

$$V(\vec{r})=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+\boxed{y^2+z^2}}}$$

定数と思って、普通に微分

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}$$

$$\vec{E}=-\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x,y,z)}{r}¿$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

($\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}$ に注意)

確かに、一個の電荷の作る電場、

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

と、一致する。

クーロン場の電位から、クーロン電場を求める。

考え方:　クーロン電場を三次元座標で表現した式

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

から、

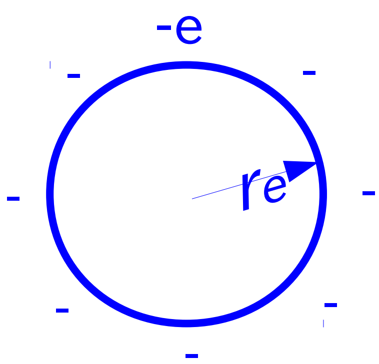
$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

を用いて、

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

を導く

電子の古典半径



電子が半径 r_e の球と考えると、電子の電場のエネルギーの合計は、コンデンサーとしてのエネルギーに等しい。

$$U = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_e}$$

これが電子の静止エネルギー(mc^2 、相対性理論より)に等しいと考えると、電子の半径として、

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}$$

が得られる。これを電子の古典半径と呼ぶ。

物理量　:物理的な量で、単位つきで用いられる。

古典力学で最も基本的と考えられる物理量は、

長さ(m)、時間(s)、質量(kg)

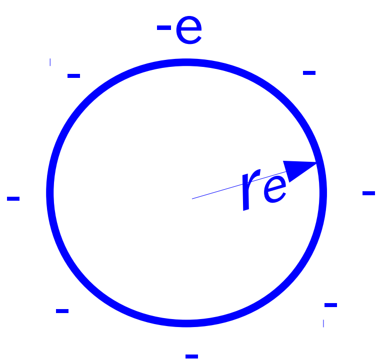
電磁気学ではこれに電荷量が加わる。しかし、測定のし易さから、
電流(A)が基本物理量として用いられる。(MKSA単位系)

物理量	良く使われる単位	基本単位だけで表すと
力	N(ニュートン)	$kg\ m\ s^{-2}$
電荷	C(クーロン)	$A\ s$
電位	V(ボルト)	$kg\ m^2 s^{-3} A^{-1}$
電場の強さ	$V/m = N/c$	$kg\ m\ s^{-3} A^{-1}$
コンデンサーの容量	F(ファラッド)	$kg^{-1} m^{-2} s^4 A^2$

注意　ε_0 もただの数でなく　$8.85418782 \times 10^{-12}\ kg^{-1} m^{-3} s^4 A^2$
と単位つきで書かれる物理量。　(良く使われる単位としては F/m)

電子の古典半径 (2)

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}$$



に、具体的な数値

$$e = -1.60217653\times 10^{-19}\,[A\,sec]$$

$$m = 9.1093826\times 10^{-31}\,[kg]$$

$$\varepsilon_0 = 8.85418782\times 10^{-12}\,[m^{-3}\,kg^{-1}\,sec^4\,A^2]$$

を代入すると、$c = 2.99792458\times 10^{8}\,[m\cdot sec^{-1}]$

$$r_e = \frac{(1.6022\times 10^{-19})^2}{8\times 3.1416\times 8.8542\times 10^{-12}\times 9.1094\times 10^{-31}\times(2.9979\times 10^{8})^2}\left[\frac{[A\,sec]^2}{[m^{-3}\,kg^{-1}\,sec^4\,A^2][kg][m\cdot sec^{-1}]^2}\right]$$

結局、

を得る。

$$r_e = 1.4090\times 10^{-15}\,[m]$$