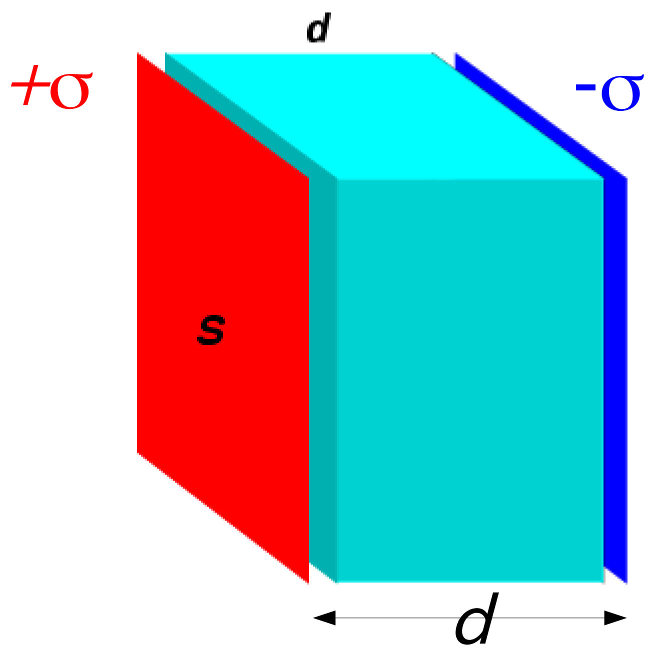
実際のコンデンサー



平行な二つの平面を極板と呼ぶ。面積 S、極板上の電荷 Qそれぞれが有限なので、極板の平均電荷密度 σは、

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

と計算できる。したがって、
極板が無限に広い場合の関係式、

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

は、

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

と、実際のコンデンサーの場合の近似式して使える。

実際のコンデンサーで、電位差の近似式は、

$$V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d$$

となるが

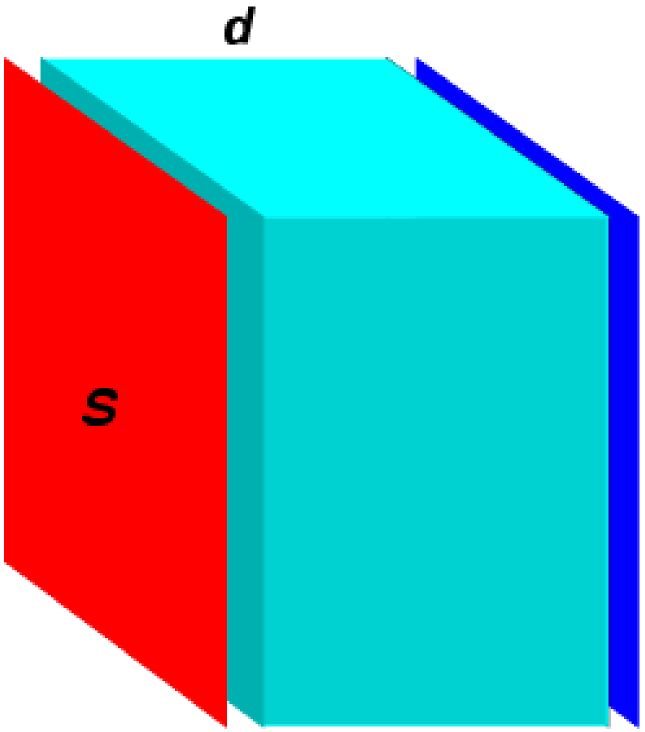
電荷と電位差の関係 $V = \frac{d}{\varepsilon_0 S} Q$ を

$$Q = \boxed{\frac{\varepsilon_0 S}{d}} V$$

と書いて、

$$C \equiv \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

を、



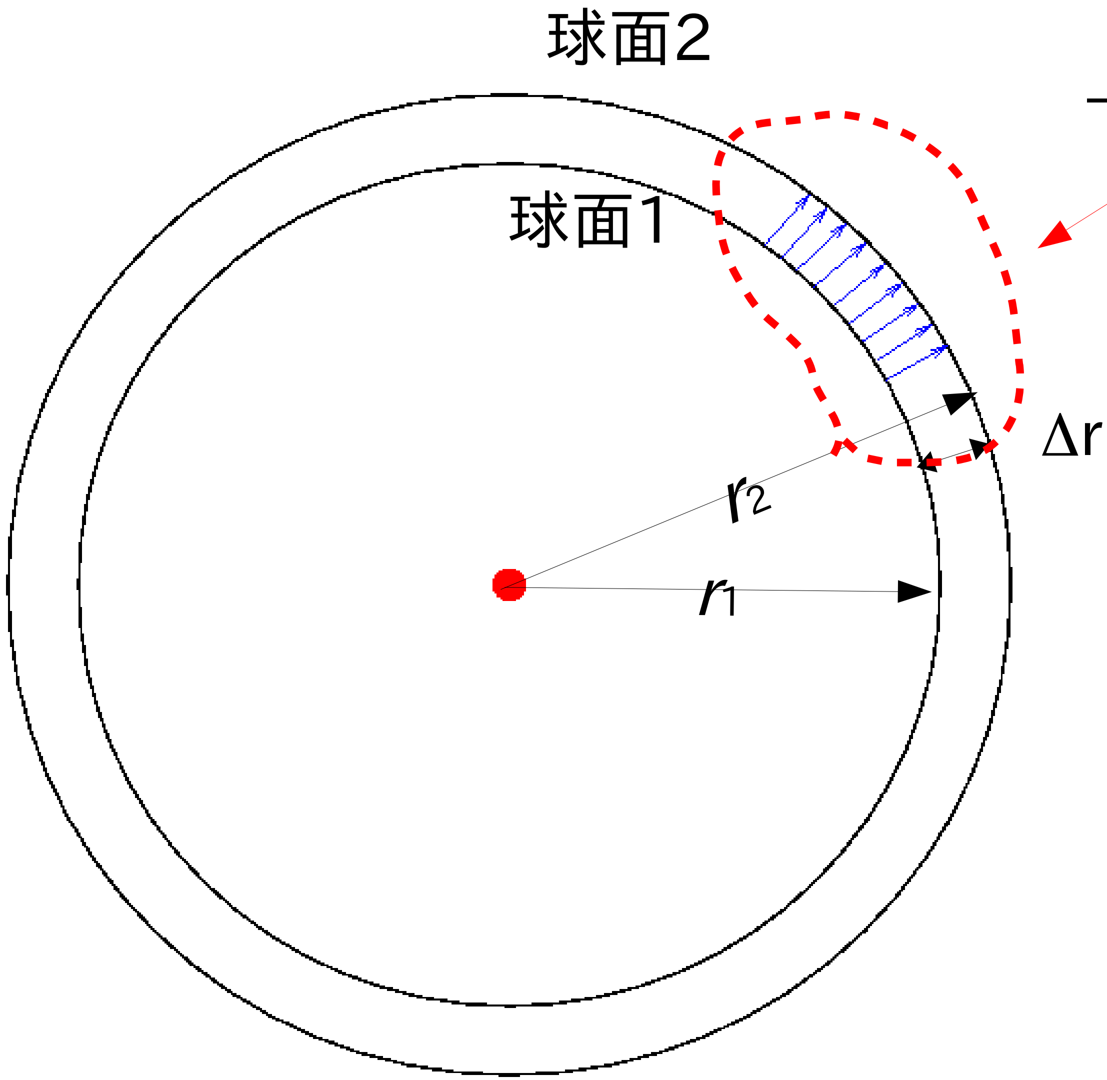
コンデンサーの容量と呼ぶ。

実際のコンデンサーは電荷を蓄える装置として利用される。
また、思考実験の装置としても、重要。

一個の電荷の作る電場(クーロン場)の電位

電荷を中心とした球面対称性＝＞電荷を中心とする球面が等電位面

間隔の狭い2つの電荷を中心とする球面(等電位面)の電位差



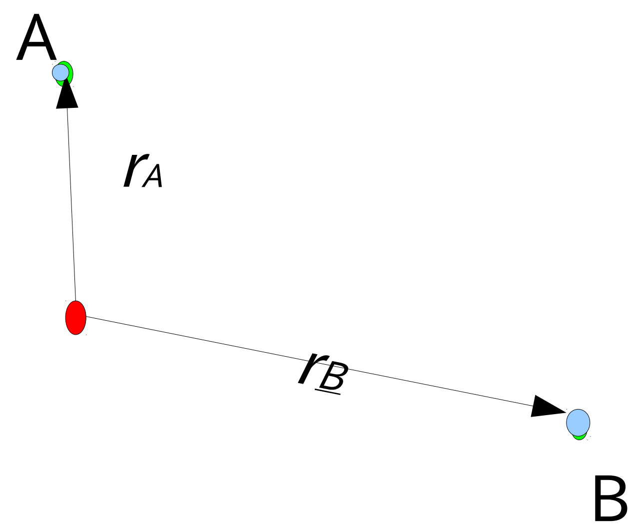
球面1と球面2の電位差

$$\Delta V = -E \cdot \Delta r$$

$$\simeq -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\Delta r$$

一個の電荷の作る電場（クーロン場）の電位差

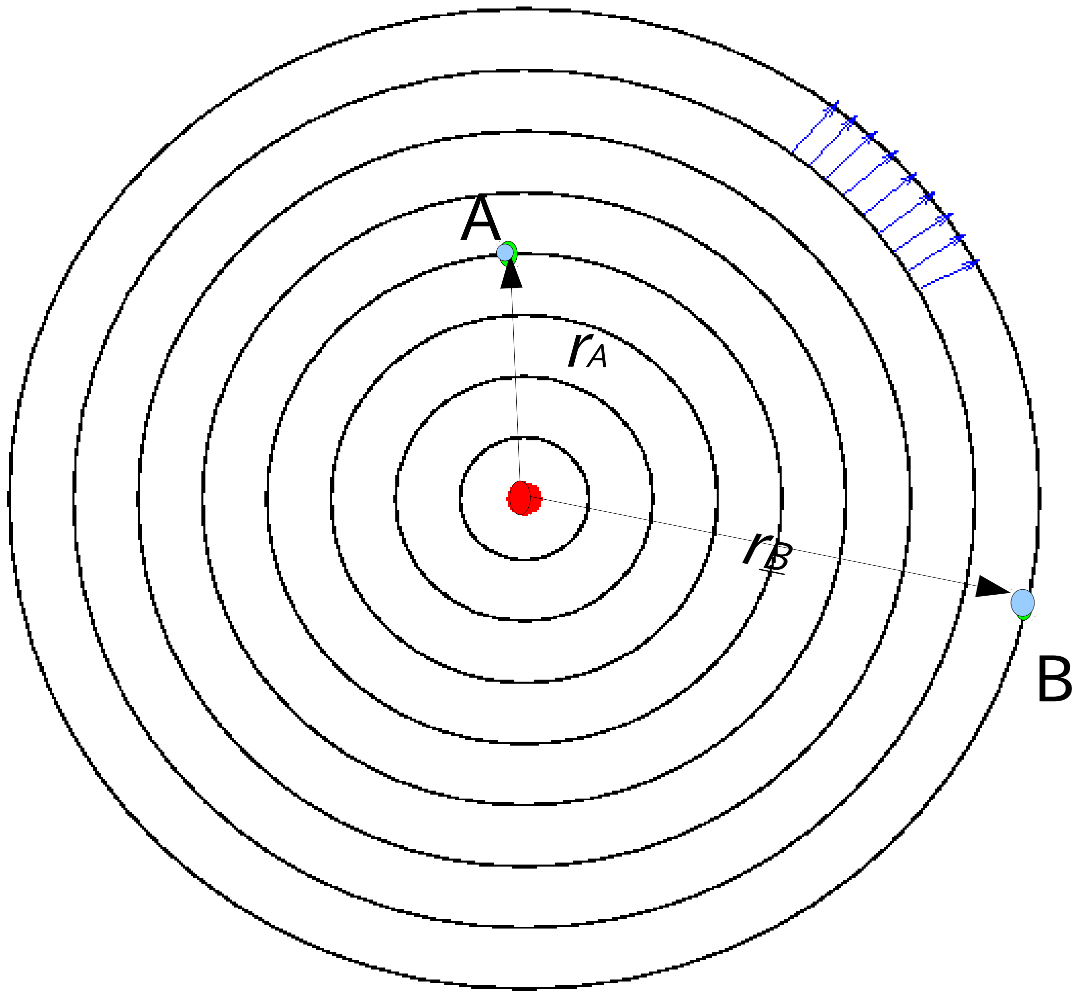
任意の2点間(AとB)の電位差 ΔV



点A　から　点B　まで、

一個の電荷の作る電場（クーロン場）の電位差

任意の2点間(AとB)の電位差 ΔV



$r = r_A$ から　$r = r_B$ まで、

$$\Delta V_i = -E_i \cdot \Delta r_i$$

$$\simeq -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\Delta r_i$$

を足し合わせる。

$$\Delta V_{AB} = \sum_i \Delta V_i \simeq -\sum_i \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_i^2}\Delta r_i \simeq -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}dr$$

結局　r_a と r_b の電位差は、

$$V_{A,B} = -\left[-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_b} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right]$$

と書ける。

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|} + C(\text{定数})$$

と置くと、

$$V_A(\vec{r}) = V(\vec{r}) - V(\vec{r}_A)$$

と、基準点をAとした、電位が定義できる。
なお、クーロン場では、無限遠を基準点として、

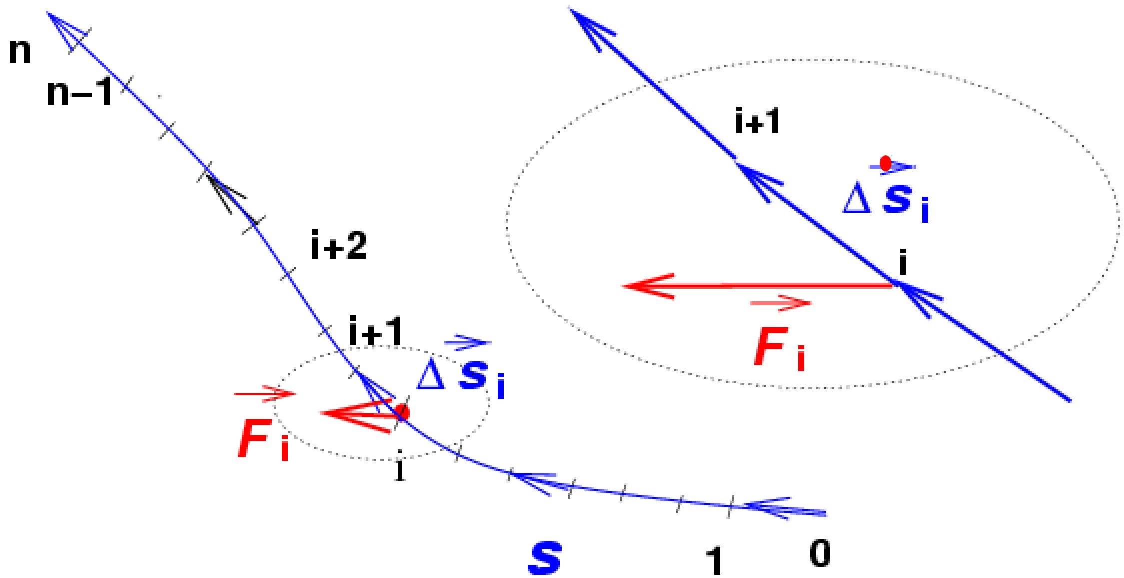
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

を、電位とすることができる。

注意、クーロン場以外では、いつも無限遠を基準と取れるわけでは無い

一般的な曲線にそって結ばれる2点の電位差

=> 分割して個々の電位差の和



$$V \simeq -\left(\vec{E}_0 \cdot \Delta\vec{s}_0 + \ldots + \boxed{\vec{E}_i \cdot \Delta\vec{s}_i +} \ldots + \vec{E}_n \cdot \Delta\vec{s}_n\right)$$

曲線の分割上の仕事

$$= -\sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \simeq -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

線を分割するから、線積分

$\vec{r}_0$ から $\vec{r}_n$ まで、電荷qを移動させるときの仕事は

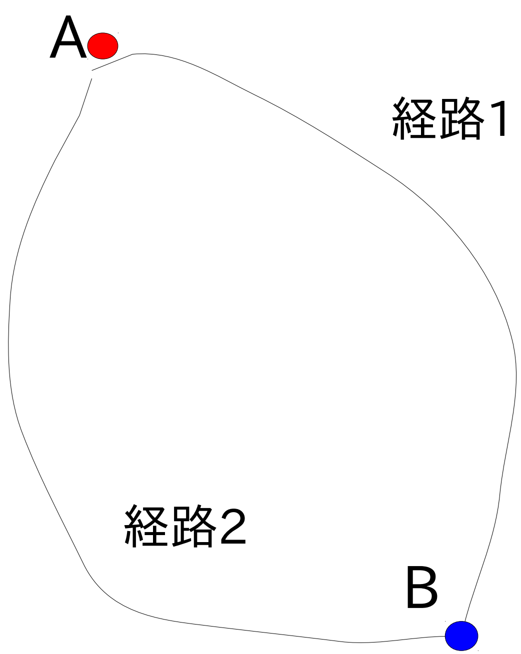
$$U \simeq -q \cdot \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{s}_i \simeq -q \cdot \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

V_{AB} が一意的に計算出きるためには、

$$\left[\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{経路1} = \left[\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{経路2}$$

$$\left[\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{経路1} = -\left[\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{経路2(逆向き)}$$

$$\left[\oint_B^B \vec{E}\cdot d\vec{s}\right]_{経路1から\ 経路2(逆向き)} = 0$$



つまり、

$$\oint_B^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$$

が必要十分条件

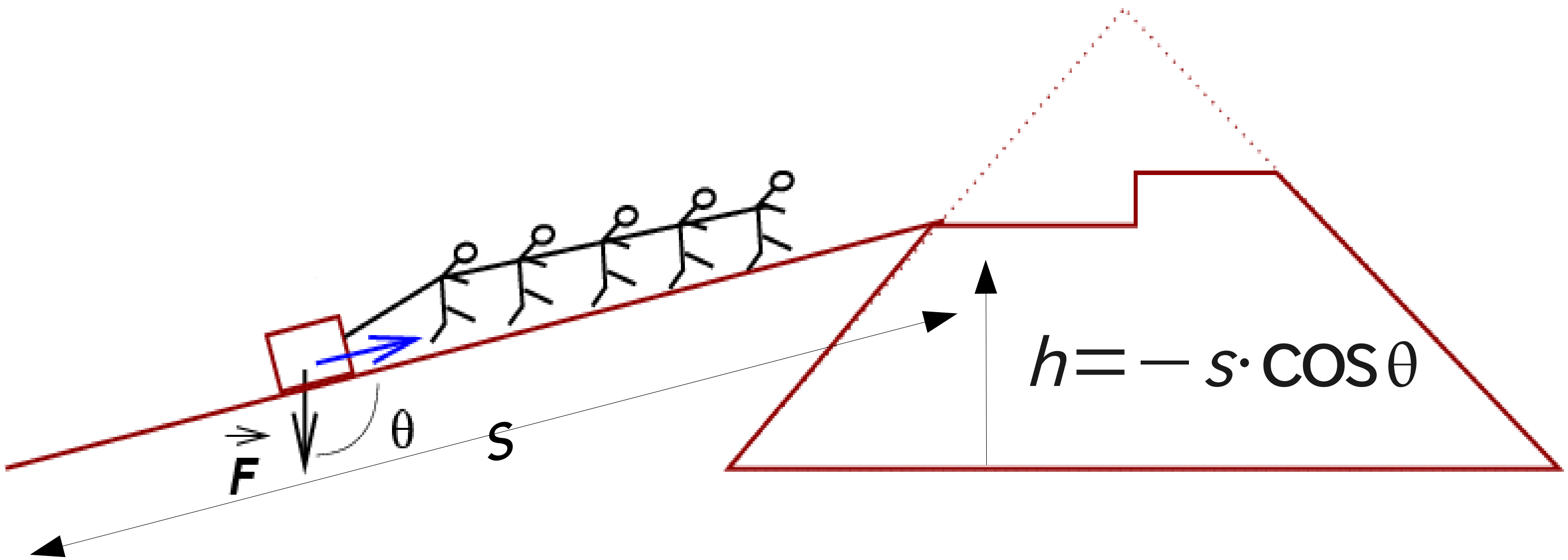
クーロン場はこれを満たしている。

重力による力と仕事

物を持ち上げるために必要な仕事は、持ち上げる高さに比例する

$$U = -F_g \cdot s \cdot \cos\theta = -\vec{F}_g \cdot \vec{s}$$

重力は下向き、かつ θ は重力と力のなす角

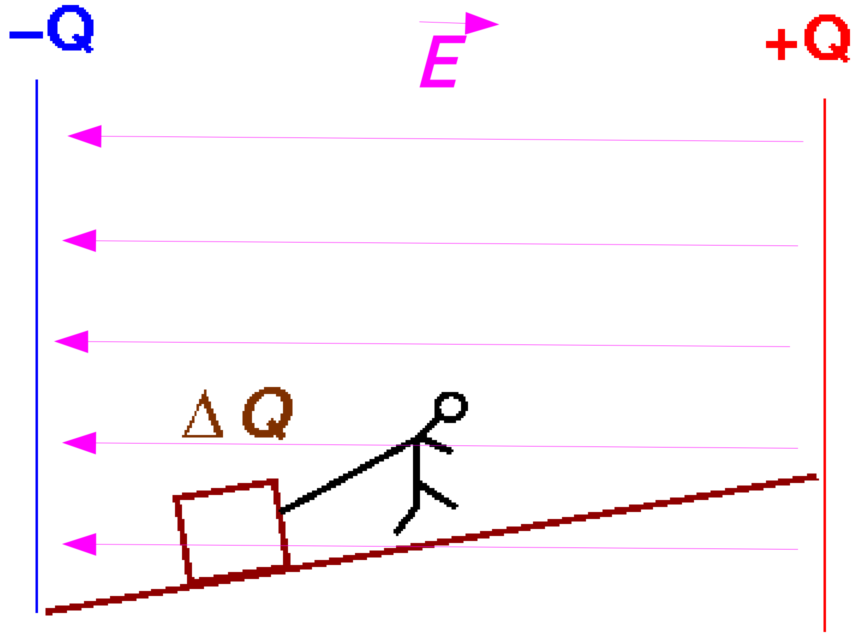


注意、内積で書く時は、符号に注意。

必要な力は重力と反対向き　=＞　重力に“-”符号が付く。

電場の持つエネルギー

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験

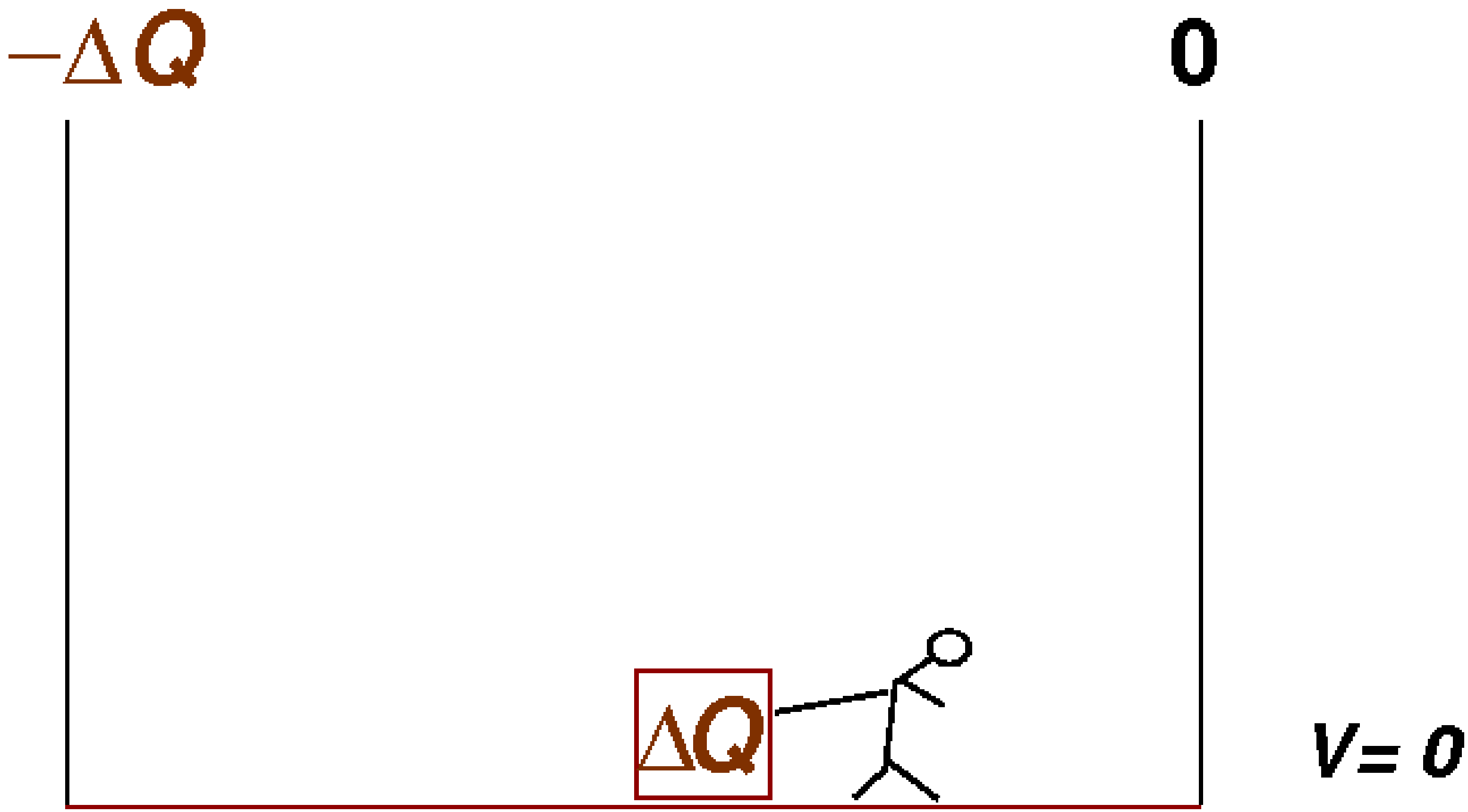


$V \cdot \Delta Q$

の仕事が電場に逆らってなされる。

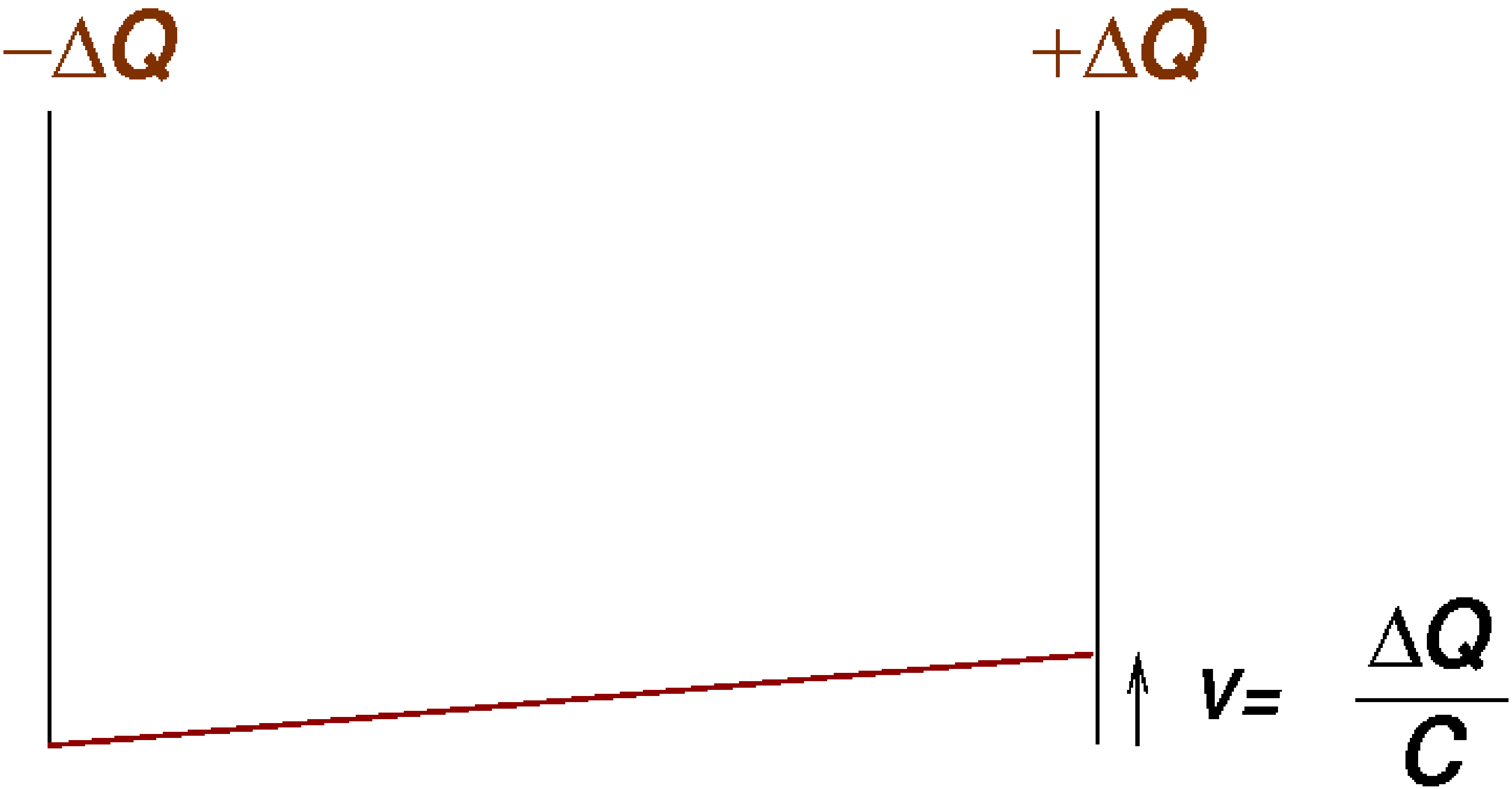
ただし、実際のコンデンサーでは、
極板間の電位差が ΔQ の移動とともに変化する。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



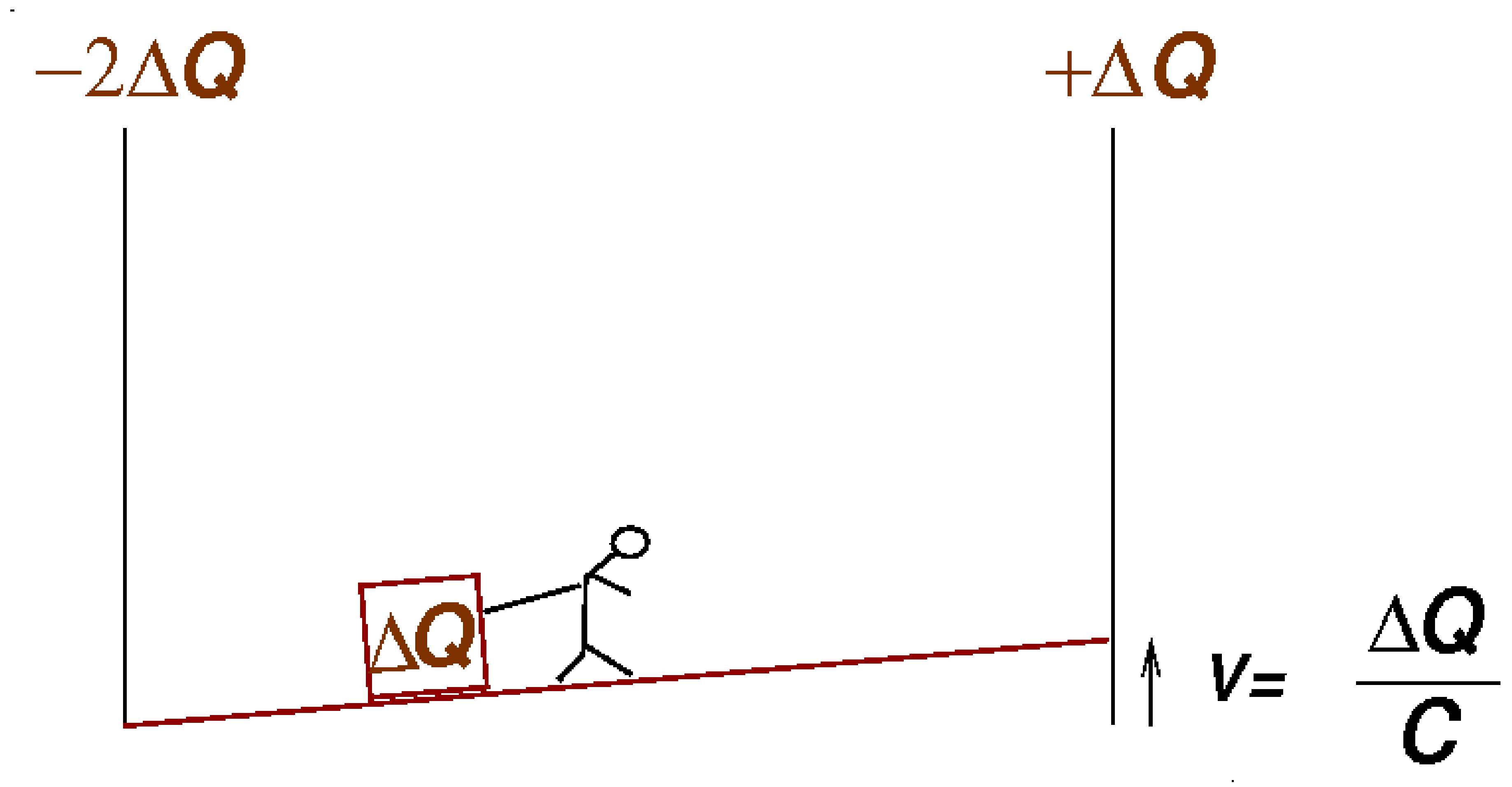
一方の極板の電荷が、 ΔQ だけ減少して、
もう一方の極板へ。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



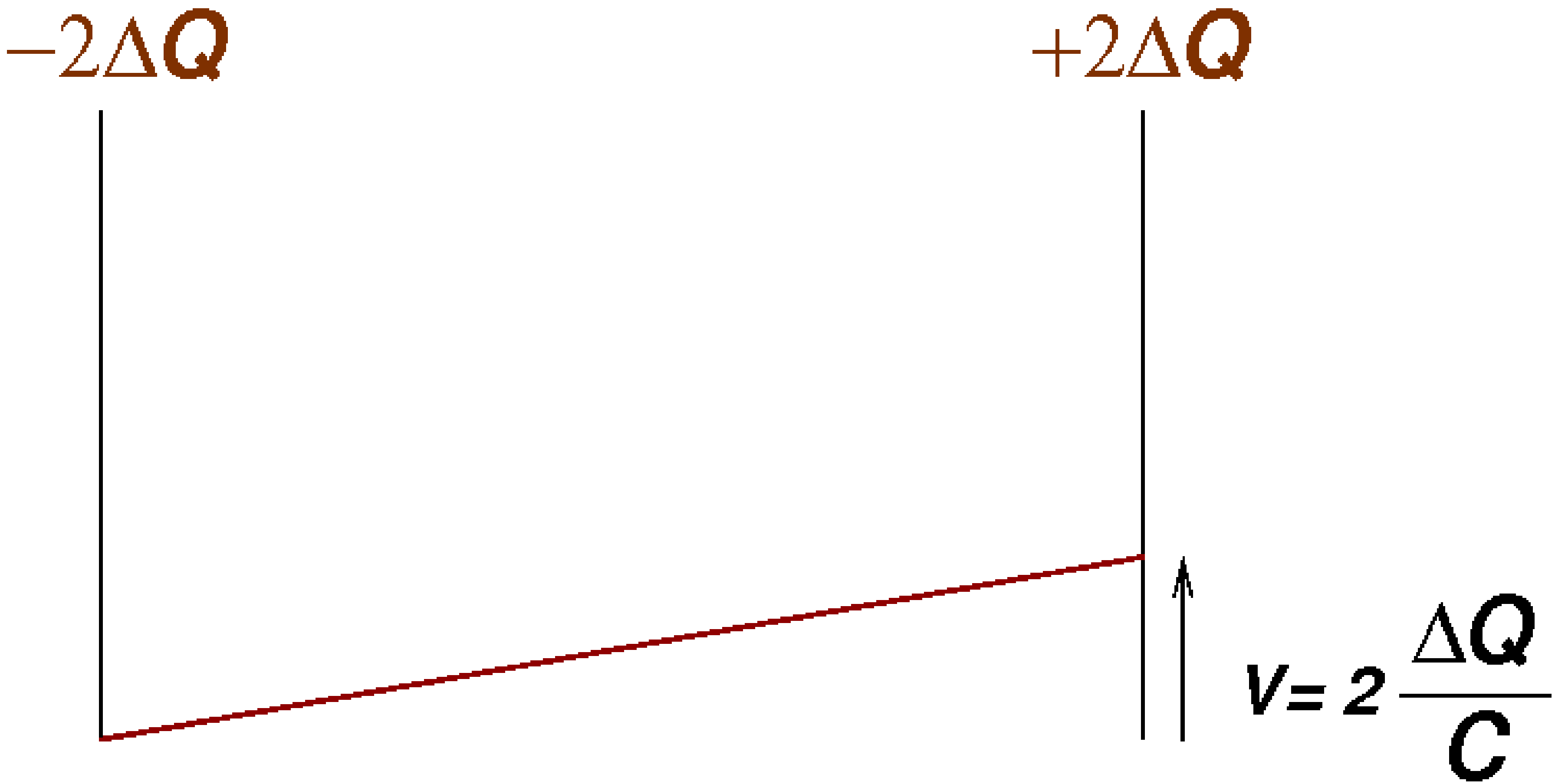
極板間の電位差が、$\dfrac{\Delta Q}{C}$だけ増加する。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



次の ΔQの移動は、増加した電位に逆らった移動。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験

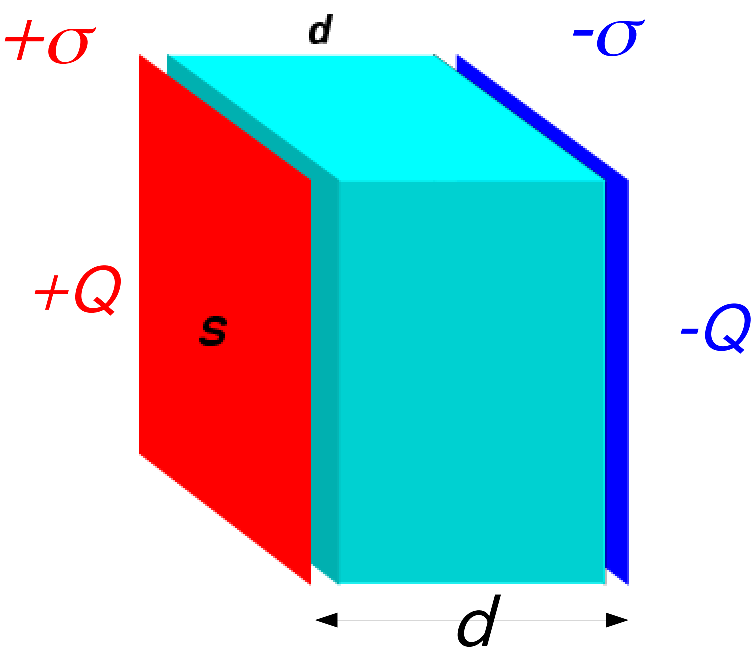


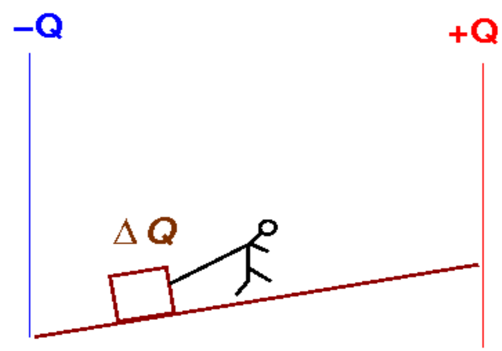
2回 ΔQが移動した後の電位差

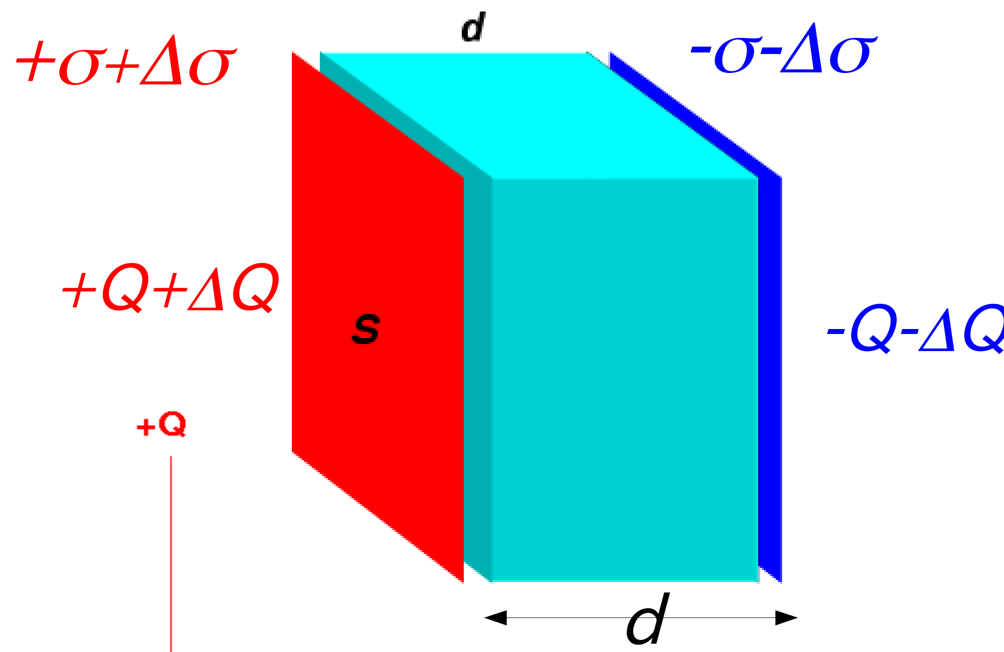
コンデンサーの中の微小電荷の移動前後の比較

ΔQの電荷の移動の前

ΔQの電荷の移動の後







- 極板の電荷密度の変化

$$\sigma\left(=\frac{Q}{S}\right) \rightarrow \sigma+\frac{\Delta Q}{S}$$

- 極板間の電場の変化

$$E\left(=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) \rightarrow E+\frac{\Delta Q}{\varepsilon_0 S}$$

- 極板間の電位差の変化

$$V(=E\cdot d) \rightarrow V+\frac{d}{\varepsilon_0 S}\Delta Q=\boxed{V+\frac{\Delta Q}{C}}$$

コンデンサーの中の微小電荷の移動(まとめ)

両極板の電荷 *0* の状態から
*n*回ΔQの移動が繰り替えされた状態

- 極板の電荷密度 $\sigma \left(=\frac{Q}{S}\right)=n\frac{\Delta Q}{S}$
- 極板間の電場 $E\left(=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)=n\frac{\Delta Q}{\varepsilon_0 S}$
- 極板間の電位差 $V\left(=E\cdot d\right)=n\frac{d}{\varepsilon_0 S}\Delta Q=n\frac{\Delta Q}{C}$

コンデンサーになされた仕事の合計

(電荷を蓄えるのに必要な仕事)

i回めに ΔQを、運ぶための仕事は $V_i \cdot \Delta Q$

両極板の電荷が0の状態から、最終的に電荷$\pm Q$ になったとして、

仕事の合計の計算は、

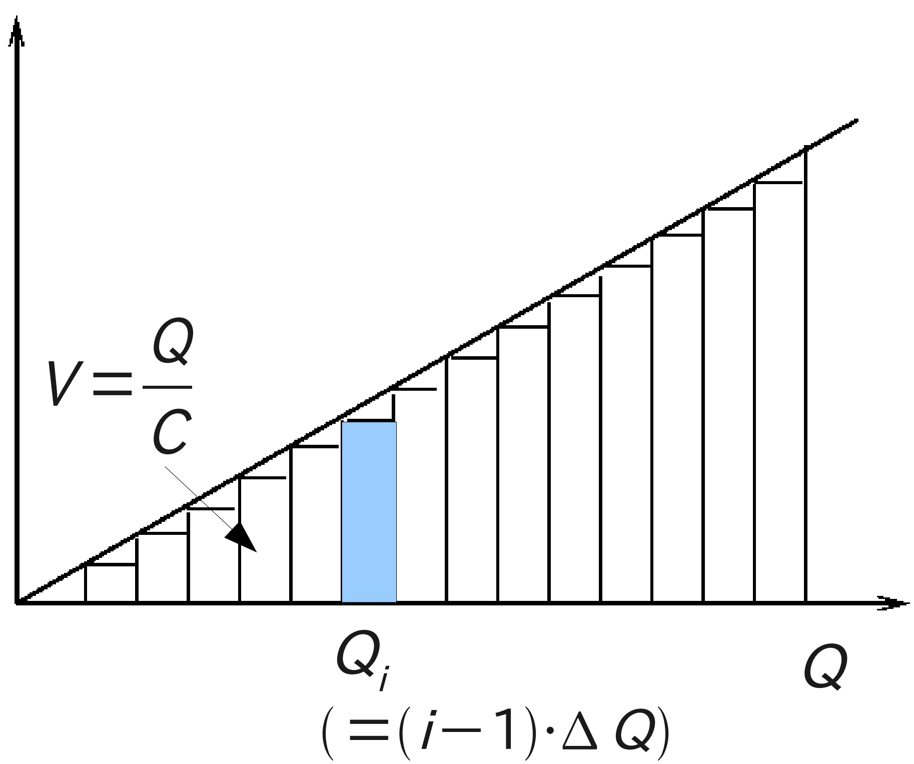
$$U = \sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{C} \Delta Q \simeq \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ$$

したがって、この合計は
の極限で、

$$\Delta Q \to 0$$

となる。

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$



コンデンサーになされた仕事の合計 (2)

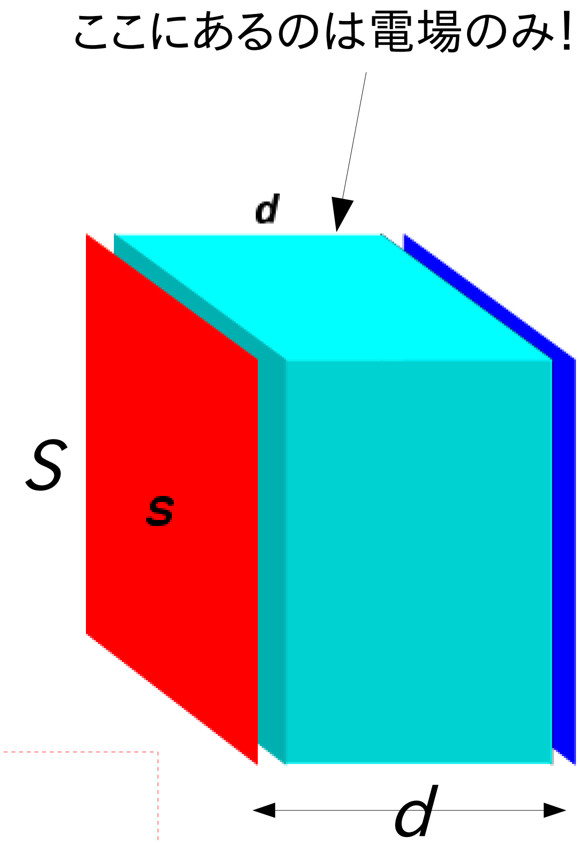
$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$ および $$C\equiv\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$ より、

$$U=\frac{d}{2\varepsilon_0 S}(S\sigma)^2=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\boxed{S\cdot d}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\boxed{S\cdot d}$$

ここで、

$$S\cdot d=[\,極板間の体積\,]$$

に注意。



つまり、コンデンサーになされた仕事は、
電場の存在する空間に分布するエネルギー

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$ (電場の持つエネルギー密度)

となって、蓄えられる。

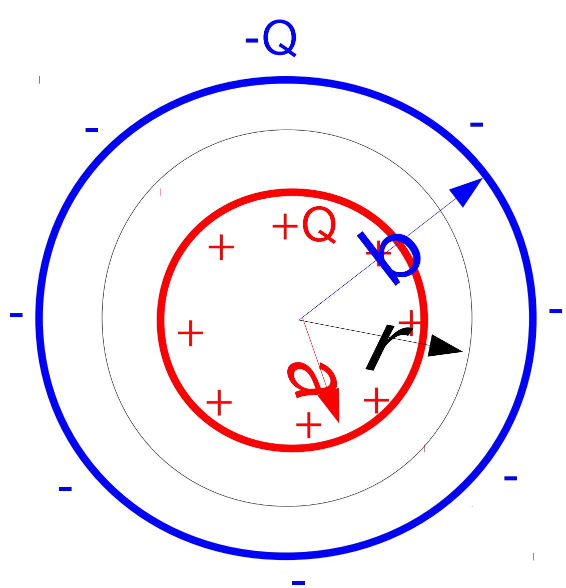
球形コンデンサー
下図の様な球形コンデンサーに置いては、電場の大きさがが0で無いのは
$a < r < b$ の範囲のみである。(球の表面に一様に電荷が分布する場合と同様、
点電荷の作る電場、電位と、電場を参考にする。)

ガウスの法則へ応用して、

$$\varepsilon_0 4\pi r^2 \cdot E = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ Q & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

電場の大きさは、

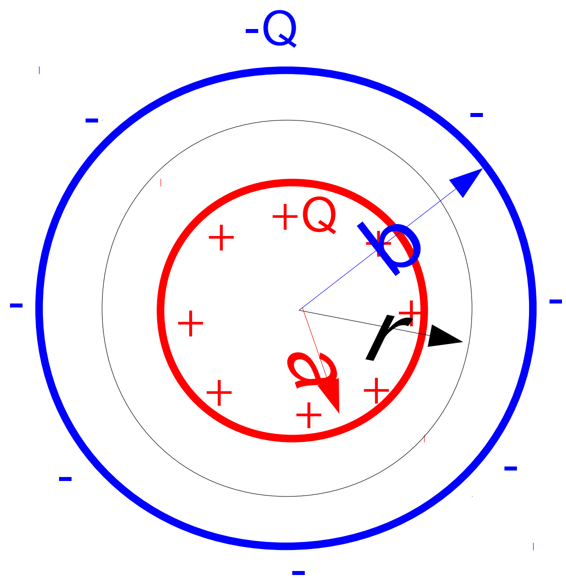
$$E = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$



ベクトルで書いて、

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

今日の問題。
球形コンデンサーの内急に+Q、外球に-Qを与えた場合の電位差を考え、
コンデンサーの容量と、蓄えられたエネルギーを求めよ。



球形コンデンサーの電場は、rの関数として

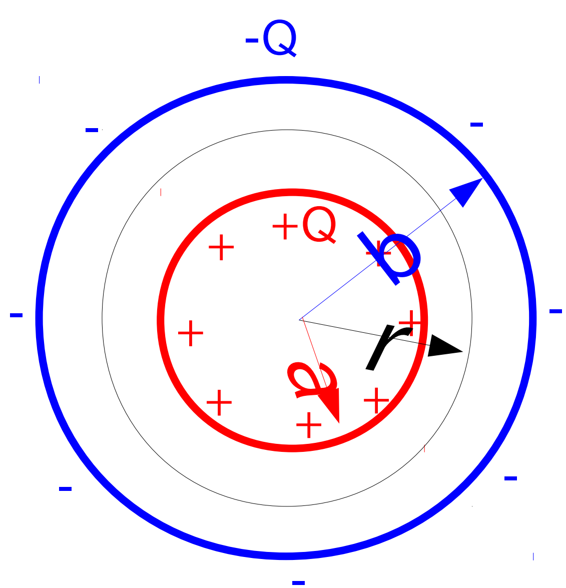
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

となる。

今日の問題。
球形コンデンサーの内急に+Q、外球に-Qを与えた場合の電位差を考え、
コンデンサーの容量と、蓄えられたエネルギーを求めよ。

球形コンデンサーの電場は、rの関数として

$$\vec{E}=\begin{cases} 0 & (b<r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & (a<r<b) \\ 0 & (r<a) \end{cases}$$

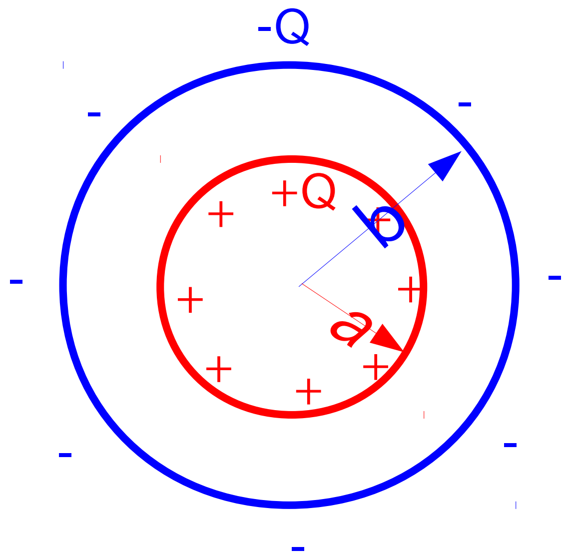


点電荷の作る電位を参考にすると、
無限遠点を基準とした、球形コンデンサーの電位は、
rの関数として

$$V(r)=\begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{b} & (b<r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (a<r<b) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{a} & (r<a) \end{cases}$$

となる。

球形コンデンサー(理想的コンデンサー)



半径 aと bの球面を極板と考える。

電場はこの極板の間 $(a<r<b)$に、だけ存在する。

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

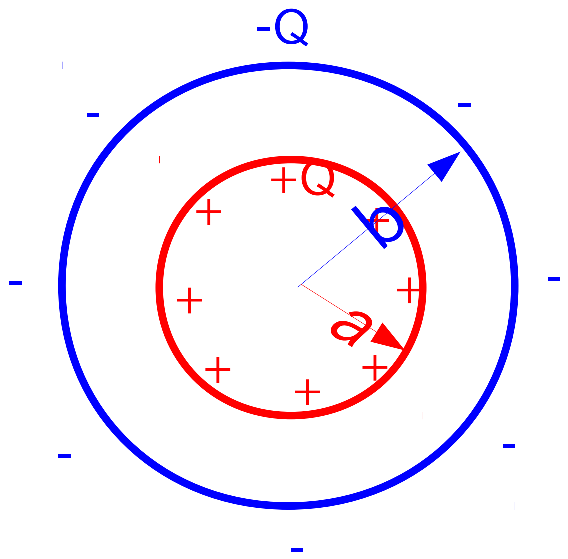
極板間の電位差　(クーロン場の時と同様)

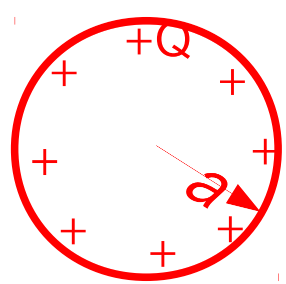
$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

電気容量

$$Q=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}V$$ より $$C=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

球形コンデンサーに蓄えられるエネルギー





電気容量

$$C=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

より、蓄えられるエネルギーは、

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

b → ∞ の時、

$$U=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

電気容量も

$$C=4\pi\varepsilon_0 a$$

となる。