# 電磁気学基礎論


http://www.scimuseum.kita.osaka.jp/~saito/job/writing/rep/2001/seidenki.htm

から画像をコピーしました。

ファラデーから、マクスウェルへの手紙

数学者が物理的な作用の研究にたずさわり、ある結論に到達したとき、それは

普通の言葉を使っても、数式に劣らず不足なく、表現できないものでしょうか。

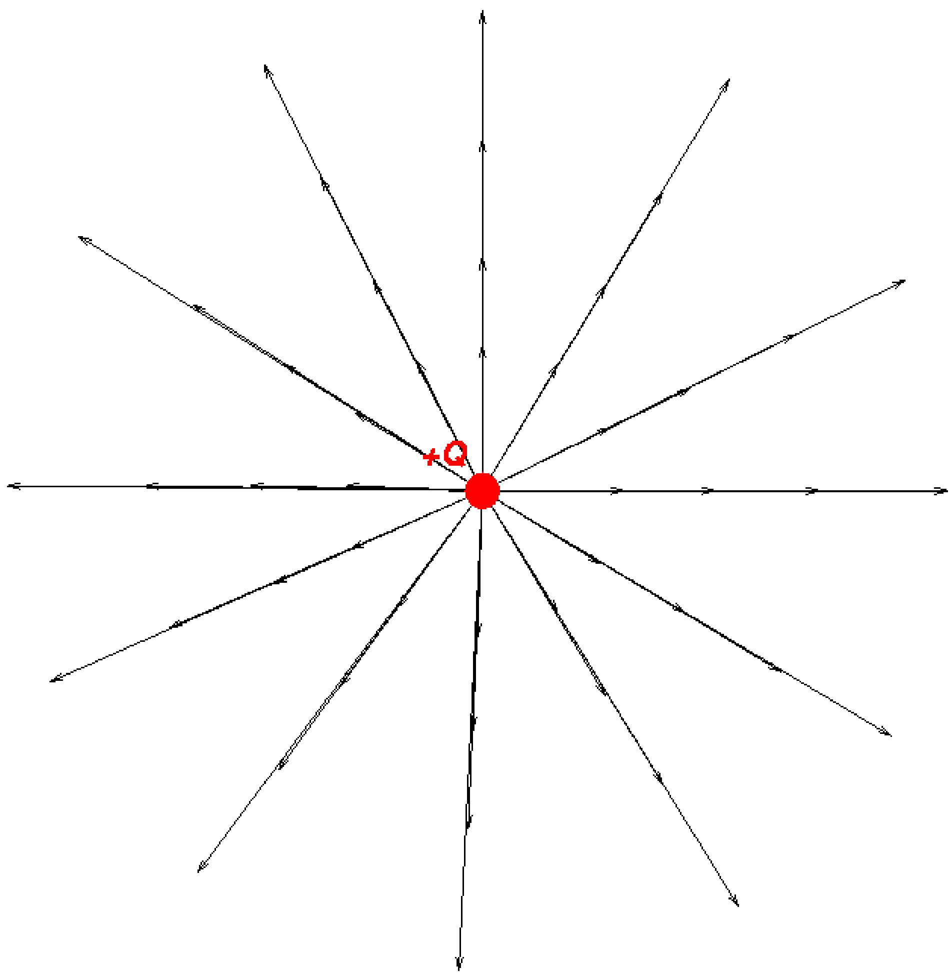
もし、そういう表現 つまり私たちも実験を通してその研究に参画できるように、

秘密の記号を翻訳した表現ができれば、私などには大変ありがたいのですが。

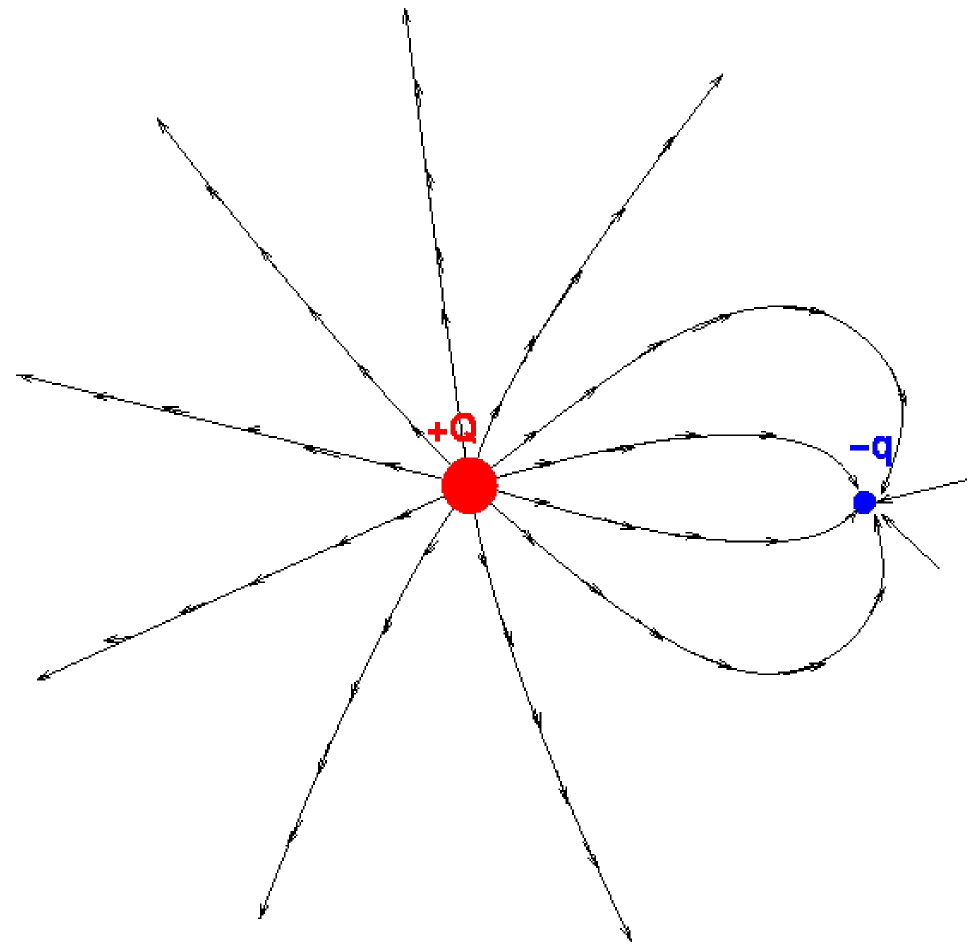
マクスウェルの答え＝電気力線と磁力線

この授業の出発点

**電荷からは、電気力線が伸ている**




単独の電荷の場合放射状に




複数の電場では配置によって曲線を描く

電気力線を用いて、電場を電気力線で表現する。

- 電気力線の密度は電場の強さに比例して、その比例定数は $\varepsilon_0$

電気力線の密度 = $\varepsilon_0$ × 電場の強さ

- 電気力線の伸びる方向は、電場ベクトルの方向と一致する。
- 電気力線は＋の電荷から－の電荷まで、または無限遠まで伸びる。

（言い換えると電気力線は、＋の電荷と－の電荷をつなぐ。）

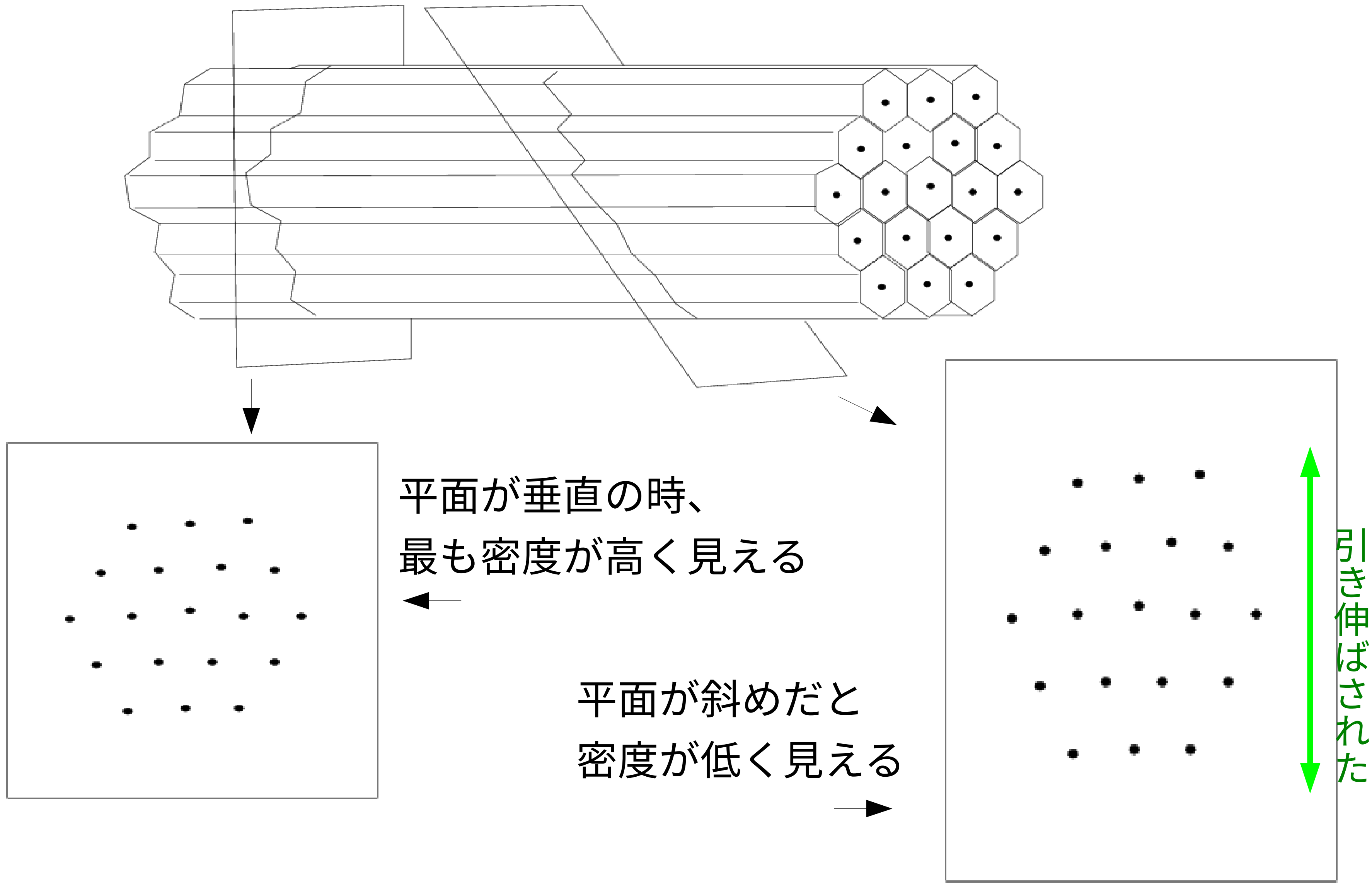
定量化のため

- 大きさ $+Q$ の電荷からは $Q$ 本の電気力線が伸びている。

（線の数だから、整数のはずだが、実数で考える。その理由は、授業で）

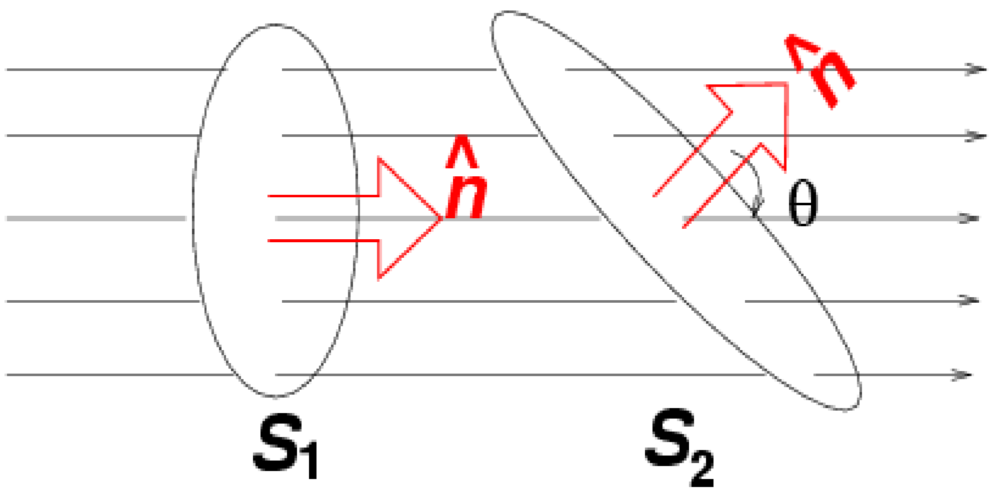
を用いて、電（磁）気学を始めよう。

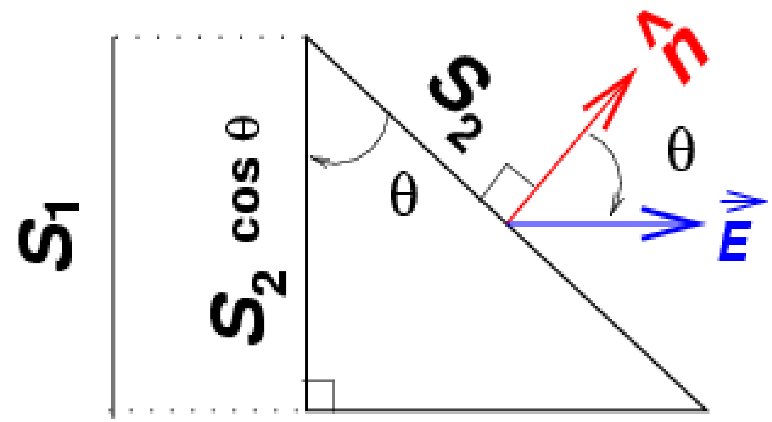
# 電気力線の数　＜＝＝＞　電場の強さ




「電場の強さ」は切断面を通る本数と角度による補正で決まる

切る角度による補正 <=面積に $\cos\theta$ を掛ける



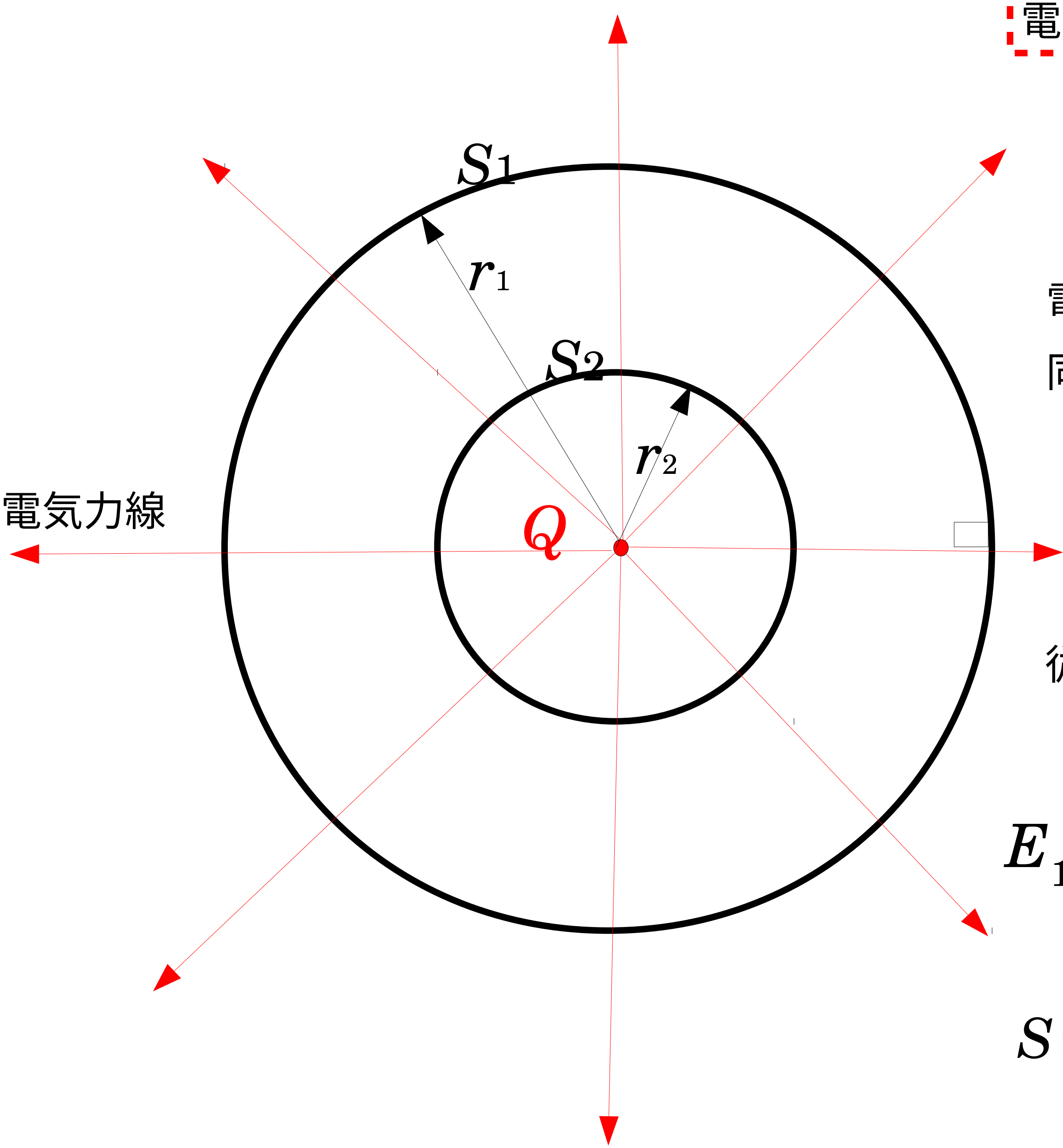




$$\frac{N}{S_1}=\frac{N}{S_2\cos\theta}=\frac{N}{S_2\hat{n}\cdot\frac{\vec{E}}{E}}=\varepsilon_0 E$$ (電場の強さ)

内積で $\cos\theta$ を作る

$$N=\varepsilon_0\left(\vec{E}\cdot\hat{n}\right)S$$ 電場から、電気力線の数を求める方法

# (点)電荷$Q$がつくる電場と電気力線




電荷を中心とする球面と電気力線は垂直

$$N = \varepsilon_0 S \cdot E$$

電荷を中心とする二つの球面があると、同じ数($N$)の電気力線が通る。つまり、

$$N = \varepsilon_0 E_1 \cdot S_1 = \varepsilon_0 E_2 \cdot S_2$$

従って、

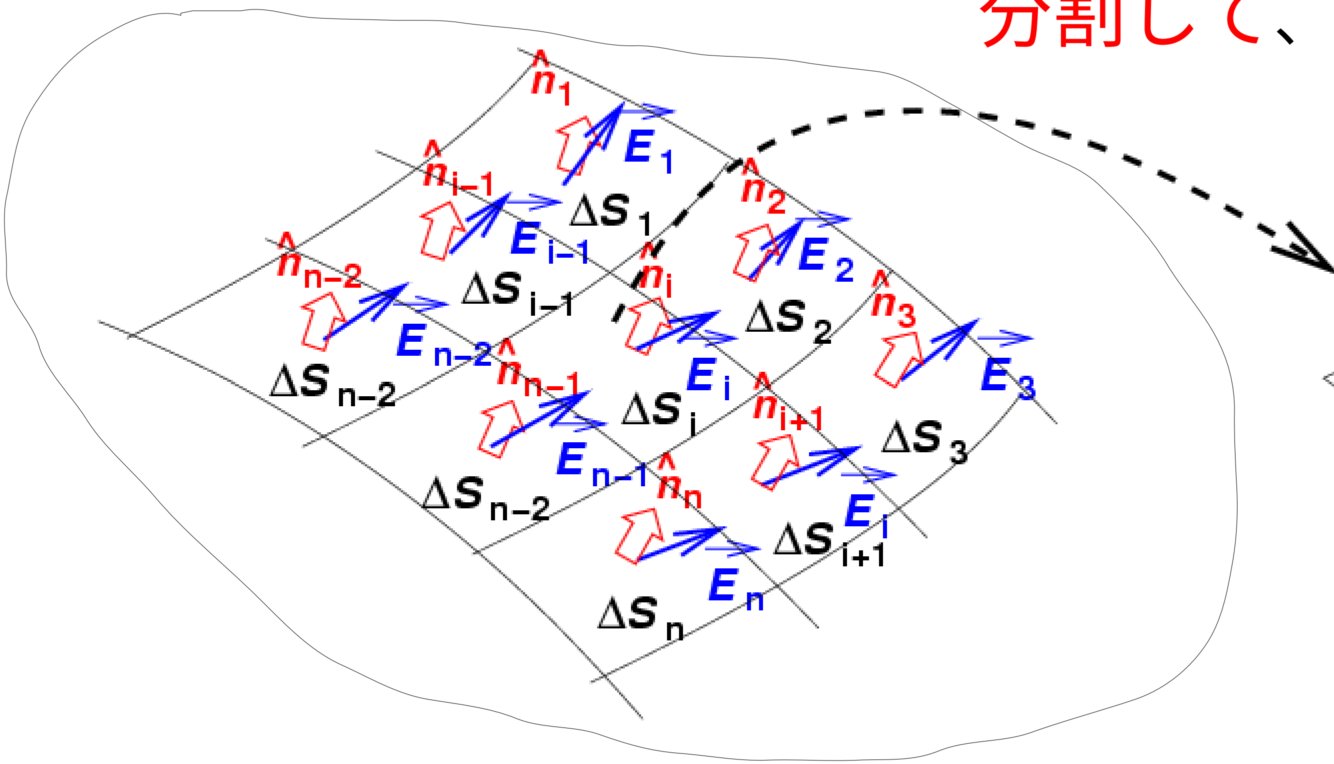
$$E_1 : E_2 = \frac{1}{S_1} : \frac{1}{S_2} = \frac{1}{4\pi r_1^2} : \frac{1}{4\pi r_2^2}$$

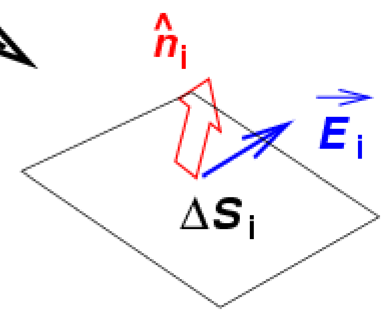
$S = 4\pi r^2$　（球の表面積）に注意。

# 一般的な曲面を通る電気力線を数える方法

分割して、それぞれの微小面積の上で

$$N_i = \varepsilon_0 (\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i) \Delta S_i \text{(本)}$$




全体の和を取る

$$N = N_1 + \ldots + N_i + \ldots = \sum_i N_i = \varepsilon_0 \sum_i (\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i) \Delta S_i$$

形式的な積分の形に

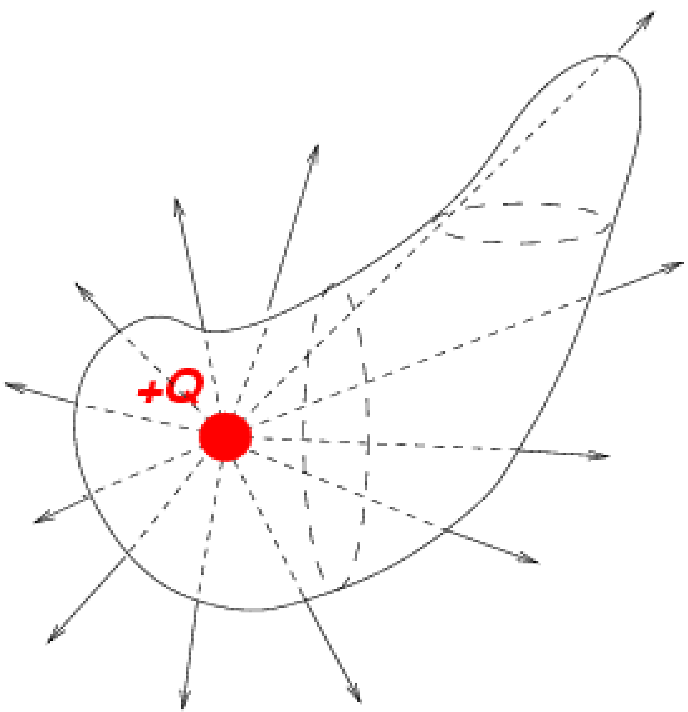
$$N = \varepsilon_0 \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS$$

面でこの操作＝＞面積分

電荷を中心とする球面を、任意の閉曲面に変えたら、

→ ガウスの法則

電荷が閉曲面の内側の場合、



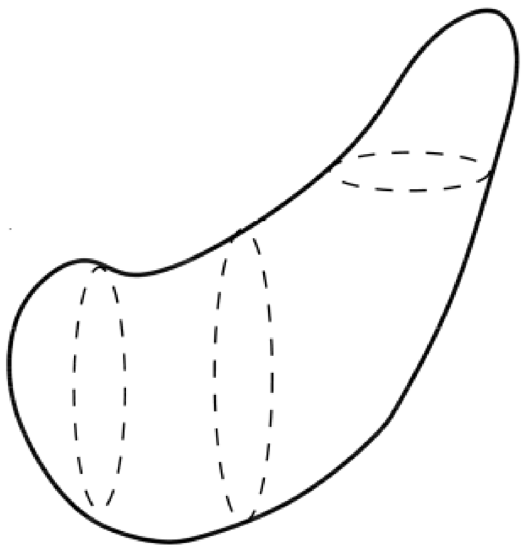

$$\varepsilon_0 \int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\, dS = Q \ \ (= N)$$

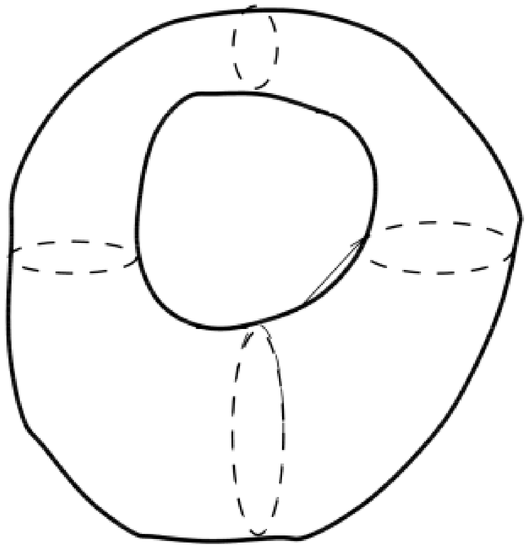
電荷から伸びる
電気力線の総数

注1、閉曲面とは、縁の無い閉じた曲面の事。

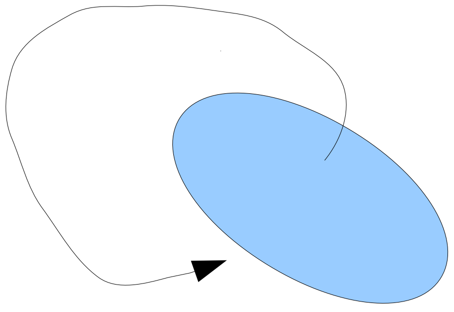
注2、$\hat{n}$ は通常外向き、つまり、内から外の方向

# もう少し、閉曲面について





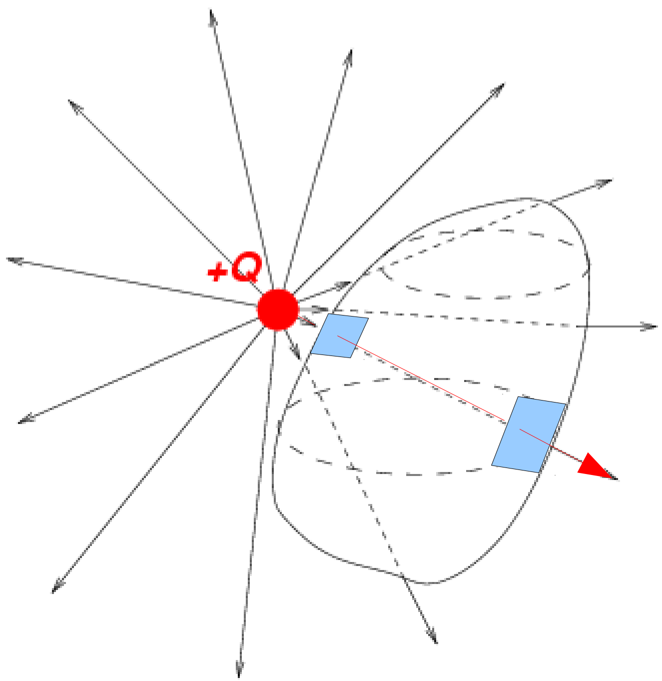
1. この面には、縁(へり)が無い。
2. この面は、内側と外側を区別する。
3. 物体(3次元の)の表面は閉曲面である。

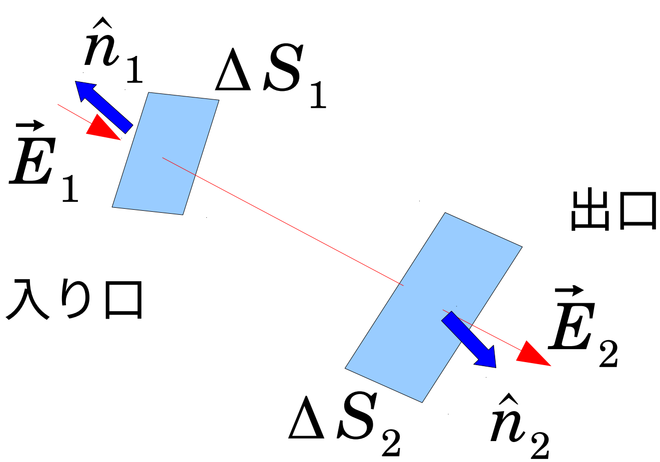


反対語は、開曲面

1. 縁のある曲面。
2. 曲面を通らず、曲面の両側を結ぶことができる。
3. 閉曲面の一部分を取り出すと、開曲面。

# 電荷が閉曲面の外側の場合




**一本の**電気力線が、閉曲面に入る点と出る点に注目。
それぞれ大きさは1(本)だが、計算するときは、

$$(\vec{E}_1\cdot\hat{n}_i)\Delta S_{1,}\quad(\vec{E}_2\cdot\hat{n}_2)\Delta S_2 \qquad \ldots(1)$$

しかし、$\hat{n}$ の向きを考えると

$$\vec{E}_1\cdot\hat{n}_1<0,\quad \vec{E}_2\cdot\hat{n}_2>0$$

なお、$\Delta S_1,\ \Delta S_2$ は面積なので、負にはならない。

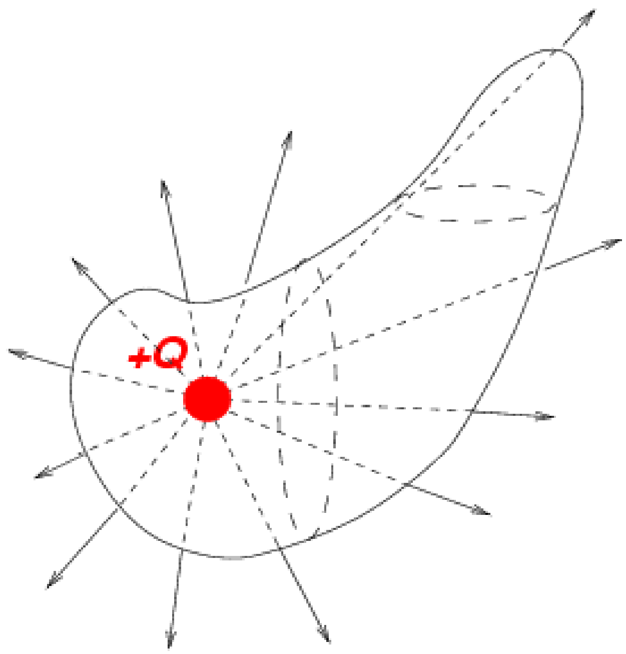
つまり、計算式（１）のそれぞれの**大きさは１**だが、**負と正**であり、電気力線が面を通過する方向により、＋、ーの符号がつく。加えれば、

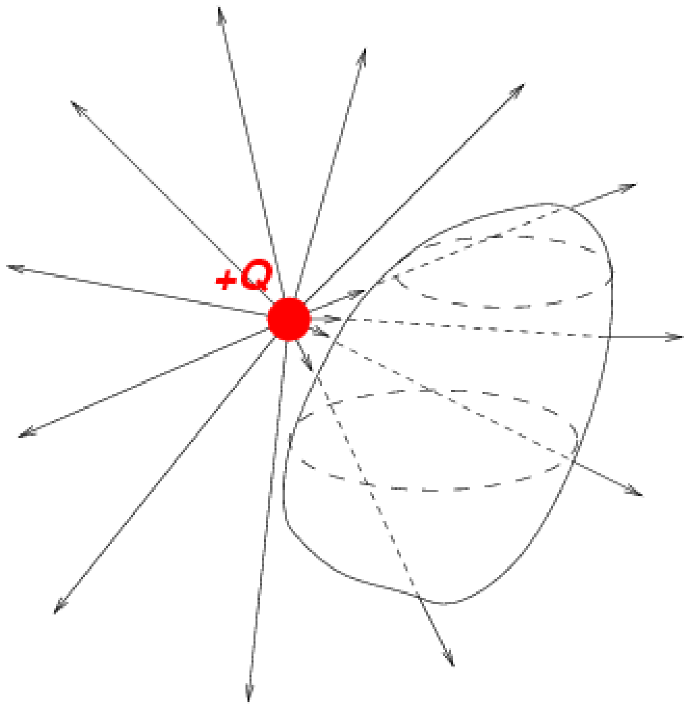
つまり、電荷が外にある場合、閉曲面全体の合計は

$$(\vec{E}_1\cdot\hat{n}_i)\Delta S_1+(\vec{E}_2\cdot\hat{n}_2)\Delta S_2=0$$

となる。$\int_S(\vec{E}\cdot\hat{n})dS=0$

# ガウスの法則まとめ




電荷が閉曲面の内側の場合、

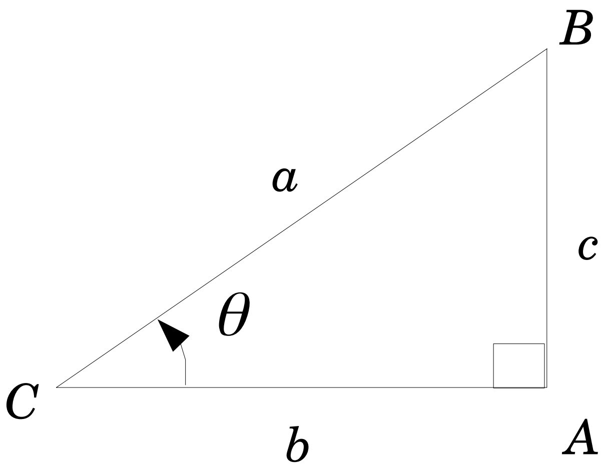
$$\varepsilon_0 \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n})\, dS = Q$$

電荷が閉曲面の外側の場合

$$\varepsilon_0 \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n})\, dS = 0$$

必要になる、高校で学んだ数学的基礎。ともかく覚えて使ってしまおう。

## 三角関数



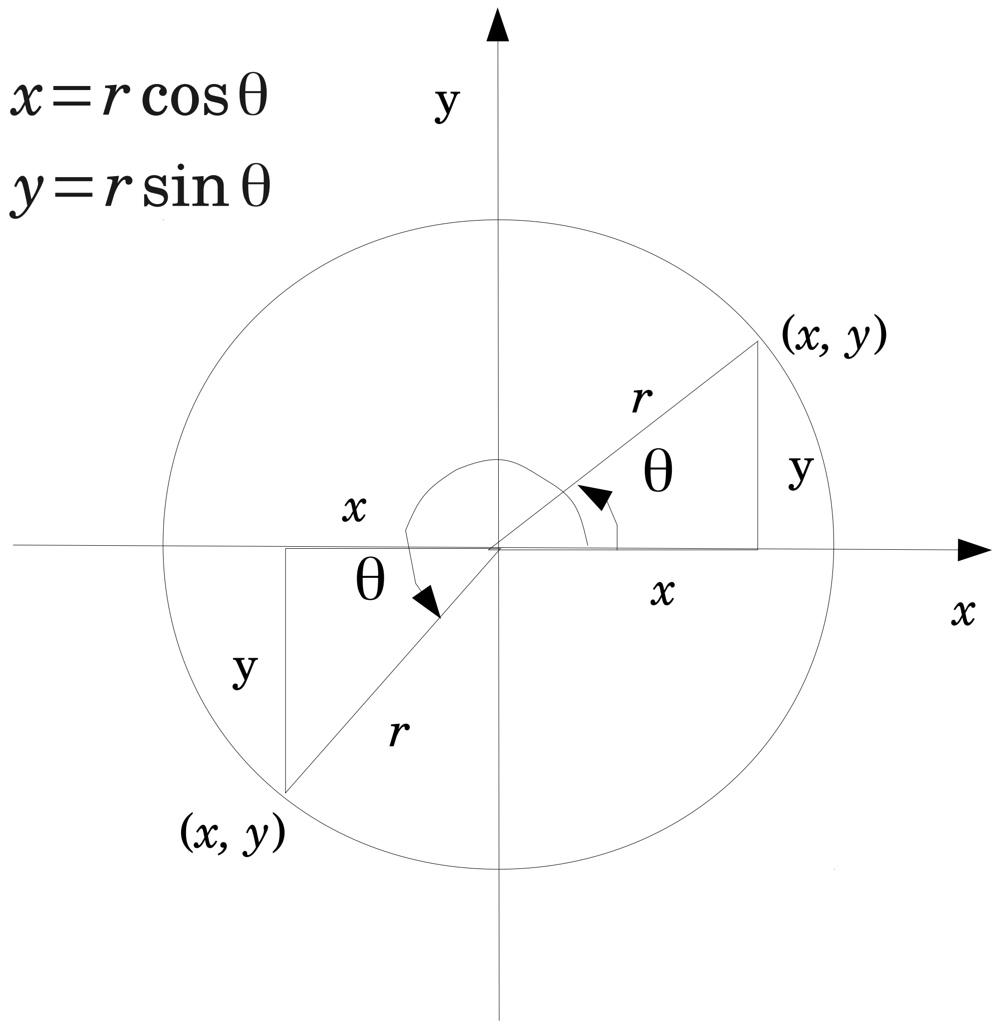

$$\sin\theta=\frac{c}{a}\quad \cos\theta=\frac{b}{a}$$

$$\tan\theta=\frac{c}{b}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

半径 $r$ の円を考え、座標軸と関連させると便利

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

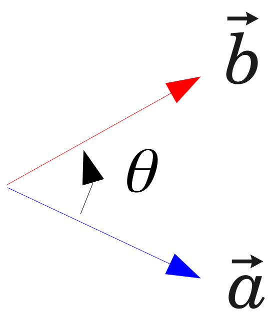



つまり、下のように書ける。

$$(x, y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ベクトル：方向と大きさを持った概念。

i、角度と長さで表す。ベクトルが２つある時、両者の成す角は内積と関係する。




$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos\theta$$

($a=|\vec{a}|, b=|\vec{b}|$　を、暗黙の了解とする。)

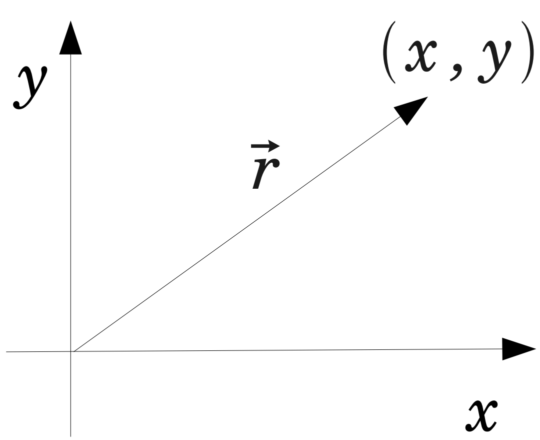
特に、$a\neq 0, b\neq 0$ の時、

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であれば、　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ $\left(\theta=\pm\frac{\pi}{2}\right)$

平行であれば、　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b$ $(\theta=0)$

ii、座標軸を仮定し、成分で $\vec{r}=(x,y)$ のように表すこともある。(例：位置ベクトル)

$\vec{a}=(a_x, a_y)$　$\vec{b}=(b_x, b_y)$ とすると、




内積は、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y$$

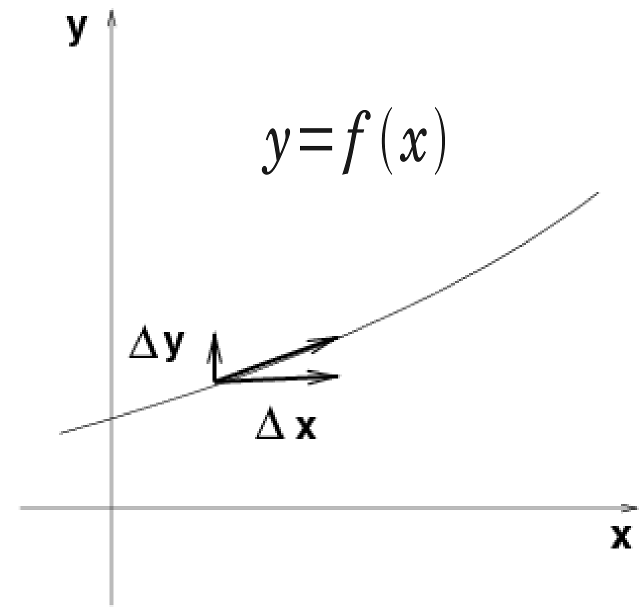
と計算できる。

# 物理でつかう微分と積分

## 微分

数学的には極限操作

$$f'(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad(\Delta x\to 0)$$

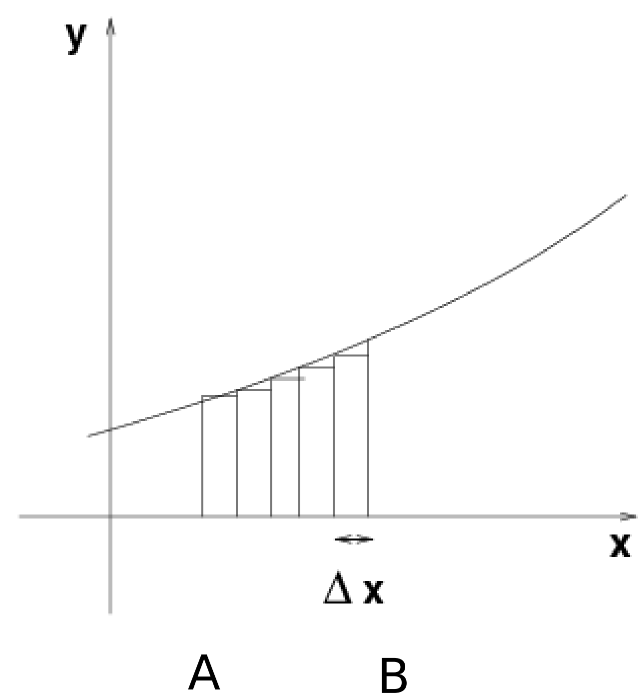



$$\frac{dy}{dx}\simeq\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

物理では、小い量の比(割り算)

## 積分

$$\int_A^B f(x)dx\simeq\boxed{\sum_i f(x_i)\Delta x_i}$$




物理では、小く分割した上で、足し合わせ

# 簡単な例で、分割した和と積分の比較

関数　$y = a \cdot x$ と、　$x$軸、$x = X$　で囲まれた面積を求める。

分割で、

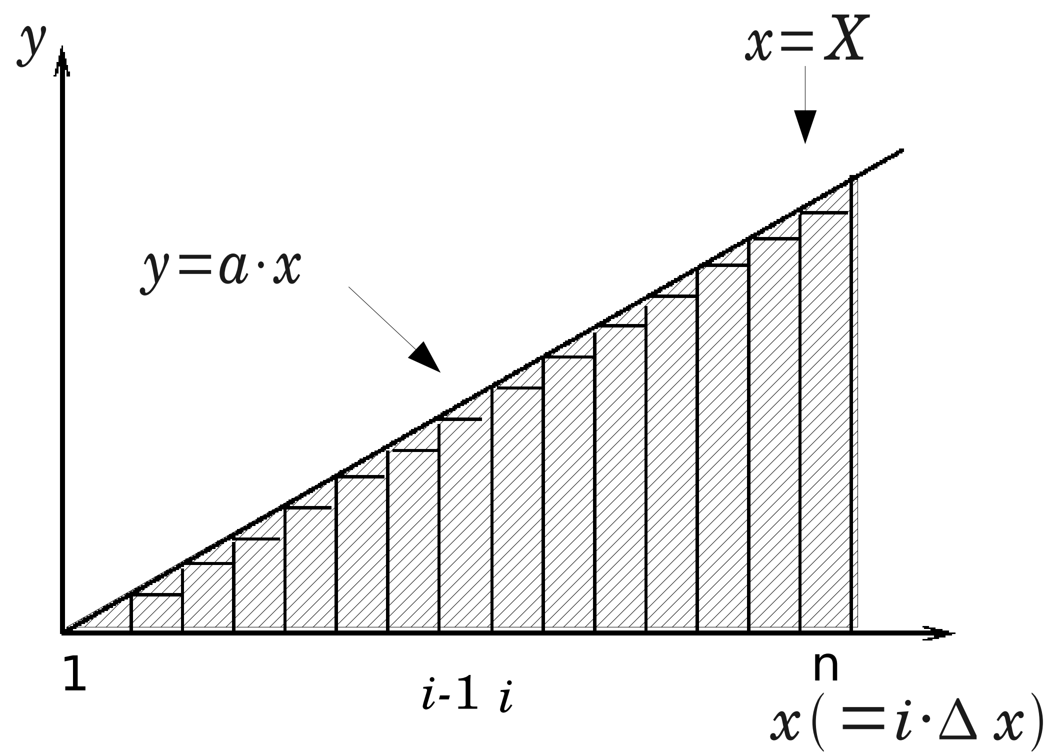
$$I_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1)\Delta x^2$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}\Delta x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{X}{n}\right)$$

ただし、$\Delta x = \dfrac{X}{n}$　とおいた。

積分では、

$$I = \int_0^X x\,dx = \frac{1}{2}x^2$$




両者の差は、$\dfrac{X}{n}$　であり、$n$を大きくとると**いくらでも**その差を小さくできる。

（これが数学の極限の意味）

初等関数の、微分、不定積分の例

$$\frac{d\,x^n}{dx} = n\,x^{n-1}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C \quad (n \neq 1)$$

$$\frac{d\sin(ax)}{dx} = a\cos(ax)$$

$$\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$$

$$\frac{d\cos(ax)}{dx} = -a\sin(ax)$$

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$$

$$\frac{d\,e^{ax}}{dx} = a\,e^{ax}$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\frac{d\log_e(x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log_e|x| + C$$

以上が基礎となる微分、積分の公式であり、このぐらい知っていれば十分

http://www.scat120.com/