マクスウエルの方程式の積分型

電場の面積分

$$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$$

（電場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

（電磁誘導の法則）

磁場の面積分

$$\int_{[閉曲面上]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$$

（磁場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I \quad \boxed{+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$$

（アンペール・マクスウエルの法則）

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。

ベクトルとしてまとめると、

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\mu_0\left(I_x, I_y, I_z\right)$$

$$+\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{\partial E_y}{\partial t}, \frac{\partial E_z}{\partial t}\right)$$

ベクトル演算子を導入して、

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

または

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

マクスウエルの方程式　(通常はこの微分形を意味する)

電場のガウスの法則

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

または

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

電磁誘導の法則

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

磁場のガウスの法則

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

アンペール・マクスウエルの法則

$$\mathrm{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{I} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{I} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

マクスウェルの方程式(群)は波動方程式を含む

電磁誘導の法則　$\mathrm{rot}\ \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$　を具体的に書き出して、

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

アンペール・マクスウェルの法則　$\mathrm{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{I} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$　も同様に

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \mu_0 (I_x, I_y, I_z)$$

$$+ \varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial t}, \frac{\partial E_y}{\partial t}, \frac{\partial E_z}{\partial t}\right)$$

$$\vec{B} = (0, B_y, 0)$$

簡単のため、$\vec{I} = 0$　$\vec{E} = (0, 0, E_z)$　と置くと生き残るのは、

アンペールの法則

$$\frac{\partial B_y}{\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

両辺をtで偏微分

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t\partial x}}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

電磁誘導の法則

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

両辺をxで偏微分

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial x\partial t}}$$

$\boxed{\quad}$ で囲まれた部分は、「微分の順番が交換できる」とすると等しい。したがって、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\qquad :波動方程式$$

が得られた。

$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\quad \mathrm{H/m=N/A^2}$

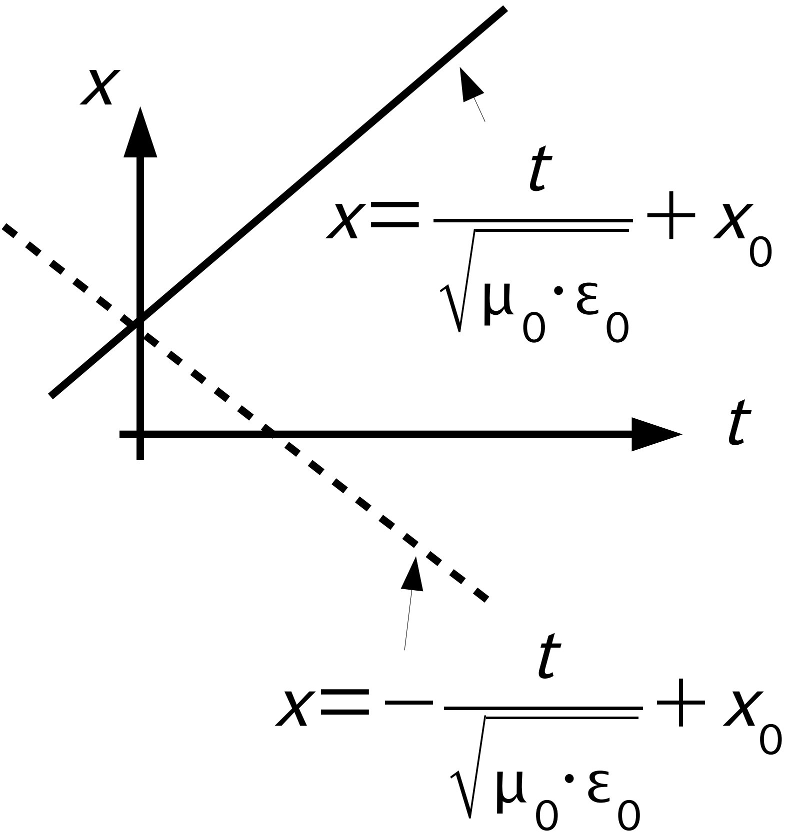
$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\quad \mathrm{F/m}$

電磁波

この解は、

$$E_z = f\left(x \pm \frac{t}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}\right)$$

の形なら何でも良い。
この意味で一般解と呼ぶ。



－符号に注目する。左のグラフの実線上で、電場は一定の値をもつ。言い替えると、この一定の値は時間と共に、速度 $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ で進行している。このような波動を進行波と呼ぶ。

＋符号に注目すると、時間と共に一定の値をもつ電場は時間と共に後退している。このような波動を後退波と呼ぶ。

なお、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \equiv 299792458\ \mathrm{m/s} \approx 3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

は光の速度に等しい。

今日の問題

1.マクスウエルの方程式の積分型、微分型を対応させて示せ。

2.マクスウエルの方程式が波動方程式を含むことを示せ。