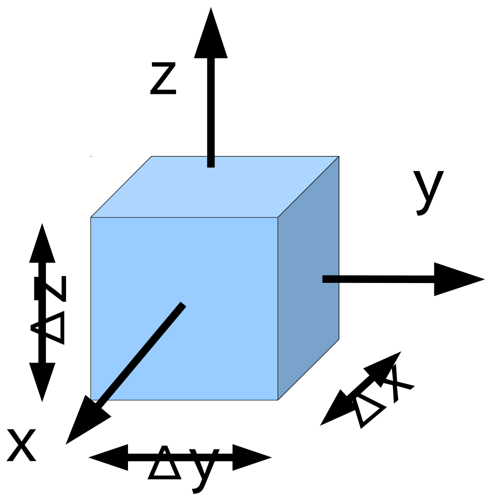
# ガウスの法則

$$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$$ を微分形に書き変える。

座標(x,y,z)を中心に持つ直方体の表面を、この閉曲面と考える。




$$左辺 = [\Delta y \Delta z]\cdot[\vec{E}\cdot\hat{i}]_{x+\Delta x/2} + [\Delta y \Delta z]\cdot[\vec{E}\cdot(-\hat{i})]_{x-\Delta x/2}$$

$$+ [\Delta z \Delta x]\cdot[\vec{E}\cdot\hat{j}]_{y+\Delta y/2} + [\Delta z \Delta x]\cdot[\vec{E}\cdot(-\hat{j})]_{y-\Delta y/2}$$

$$+ [\Delta x \Delta y]\cdot[\vec{E}\cdot\hat{k}]_{z+\Delta z/2} + [\Delta x \Delta y]\cdot[\vec{E}\cdot(-\hat{k})]_{z-\Delta z/2}$$

$$= [\Delta x \Delta y \Delta z]\cdot\frac{[\vec{E}\cdot\hat{i}]_{x+\Delta x/2} - [\vec{E}\cdot\hat{i}]_{x-\Delta x/2}}{\Delta x}$$

$$+ [\Delta x \Delta y \Delta z]\cdot\frac{[\vec{E}\cdot\hat{j}]_{y+\Delta y/2} - [\vec{E}\cdot\hat{j}]_{y-\Delta y/2}}{\Delta y}$$

$$+ [\Delta x \Delta y \Delta z]\cdot\frac{[\vec{E}\cdot\hat{k}]_{z+\Delta z/2} - [\vec{E}\cdot\hat{k}]_{z-\Delta z/2}}{\Delta z}$$

(続き)　　$\Delta x, \Delta y, \Delta z$が非常に小さいとき

$$\text{左辺} \quad = [\Delta x \Delta y \Delta z] \cdot \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

したがって、電場に対するガウスの法則、

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q / \varepsilon_0$$

は、次の様に書き換えられる。

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \quad \left( = \frac{\sum_{[\text{内部}]} Q}{[\Delta x \Delta y \Delta z]} / \varepsilon_0 \right)$$

$\rho_c$　:電荷密度

この関係はベクトル演算子を用いると、簡単に書け
記憶しやすい。

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \qquad \text{または} \qquad \nabla \vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

いずれも左辺は

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

を、まとめた書き方。特に後者は、形式的に

$$\nabla \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{と} \quad \vec{E} = \left( E_x, E_y, E_z, \right)$$

の内積と考えたものである。

# マクスウエルの方程式の積分型

電場の
面積分 $$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q/\varepsilon_0$$ （電場のガウスの法則）

線積分 $$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$ （電磁誘導の法則）

磁場の
面積分 $$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$$ （磁場のガウスの法則）

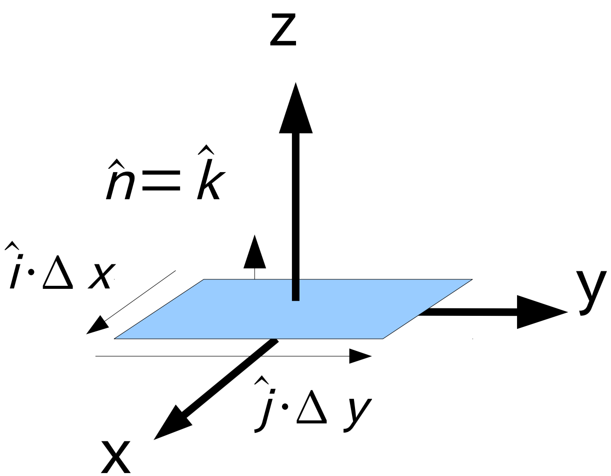
線積分 $$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I \ \boxed{+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$$
（アンペール・マクスウエルの法則）

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。

電磁誘導の法則

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS$$ を微分形に書き変える。

XY平面の長方形の面積と、その周囲を考える。




$$
\begin{aligned}
左辺 &= [\vec{E}\cdot\hat{i}\cdot\Delta x]_{y-\Delta y/2} + [\vec{E}\cdot\hat{j}\cdot\Delta y]_{x+\Delta x/2} \\
&\quad + [\vec{E}\cdot(-\hat{i}\cdot\Delta x)]_{y+\Delta y/2} + [\vec{E}\cdot(-\hat{j}\cdot\Delta y)]_{x-\Delta x/2} \\
&= \left([\vec{E}\cdot\hat{i}]_{y-\Delta y/2} - [\vec{E}\cdot\hat{i}]_{y+\Delta y/2}\right)\cdot\Delta x \\
&\quad + \left(-[\vec{E}\cdot\hat{j}]_{x-\Delta x/2} + [\vec{E}\cdot\hat{j}]_{x+\Delta x/2}\right)\cdot\Delta y \\
&= [\Delta x\Delta y]\frac{[\vec{E}\cdot\hat{i}]_{y-\Delta y/2} - [\vec{E}\cdot\hat{i}]_{y+\Delta y/2}}{\Delta y} \\
&\quad + [\Delta x\Delta y]\frac{[\vec{E}\cdot\hat{j}]_{x+\Delta x/2} - [\vec{E}\cdot\hat{j}]_{x-\Delta x/2}}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

続き

$$=[\Delta x\Delta y]\frac{E_x(x, y-\Delta y/2, z)-E_x(x, y+\Delta y/2, z)}{\Delta y}$$

$$+[\Delta x\Delta y]\frac{E_y(x+\Delta x/2, y, z)-E_y(x-\Delta x/2, y, z)}{\Delta x}$$

$$\sim[\Delta x\Delta y]\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

右辺 $$=-\frac{d}{dt}\int_{面積}\vec{B}\cdot\hat{n}\,dS=-\int_{面積}\frac{\partial(\vec{B}\cdot\hat{k})}{\partial t}dS$$

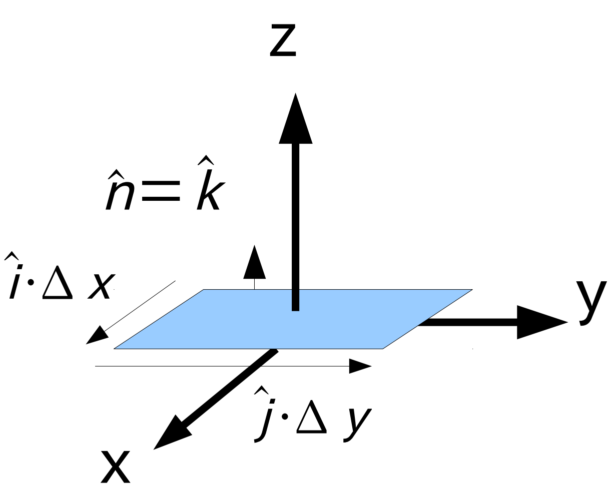
$$\sim-\frac{\partial B_z}{\partial t}[\Delta x\Delta y]$$

続き2,

$\Delta x, \Delta y$ が非常に小さいとき

$$左辺 = [\Delta x \Delta y]\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$右辺 \quad = -\frac{\partial B_z}{\partial t}[\Delta x \Delta y]$$




したがって、電磁誘導の法則は、
XY平面上で、

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

となる。

続き3,　まず、XY平面(Z軸に垂直)を考えたが、YZ平面(X軸に垂直)、ZX平面(Y軸に垂直)でも同様な考察が可能。したがって、電磁誘導の法則の微分形は、次の3つの式のセットになる。

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)=-\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

ベクトルとしてまとめると、

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x},\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial B_x}{\partial t},\frac{\partial B_y}{\partial t},\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

この関係も、ベクトル演算子を導入すると覚えやすい。

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ または $$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

後者は、形式的に

$$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$ と $$\vec{E}=\left(E_x,E_y,E_z\right)$$

の外積と考えたもの。

アンペール・マクスウェルの法則

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I \quad + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{E}\cdot \hat{n}\, dS$$

の微分形

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \mu_0 I_z + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = \mu_0 I_x + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \mu_0 I_y + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

ベクトルとしてまとめると、

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\mu_0\left(I_x,I_y,I_z\right)$$

$$+\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial t},\frac{\partial E_y}{\partial t},\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)$$

ベクトル演算子を導入して、

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

または

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$