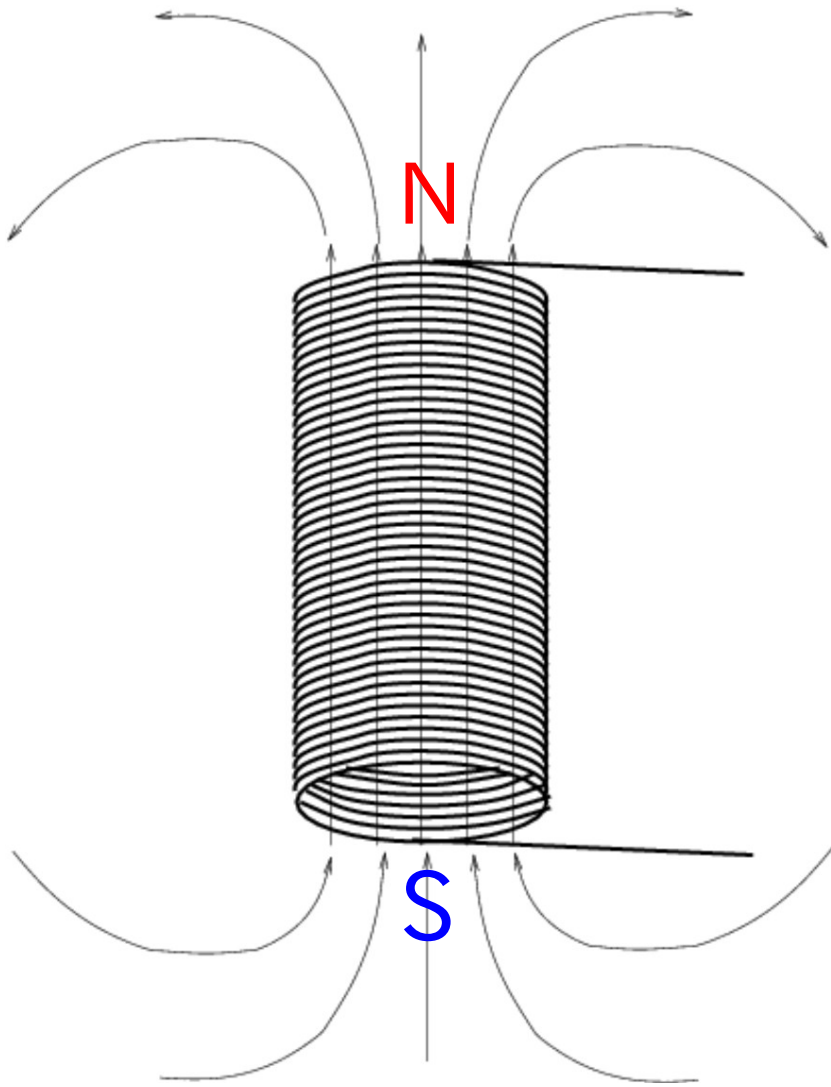
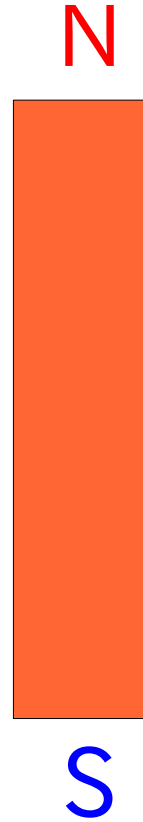


磁気双極子

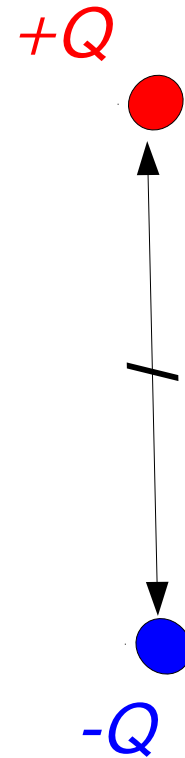
有限の長さのソレノイドは、両端から磁場が漏れ出して、磁石の様に見える。



ソレノイド



棒磁石



電気双極子

ソレノイド(空芯電磁石)

実際のソレノイド



アンペールの法則

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{ABCD \text{の中}} I$$

$$= \mu_0 n_1 l \cdot L$$

n_1 : 巻き線密度 = 単位長さに巻かれた線の数

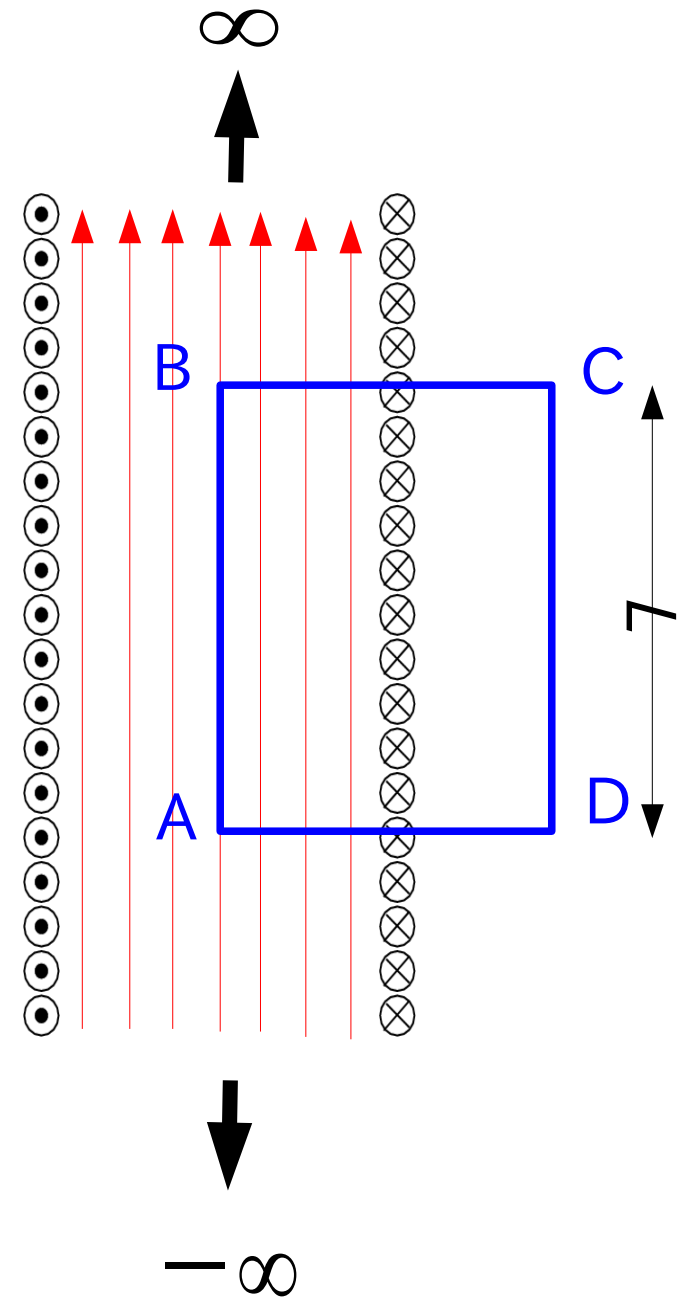
$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$+ \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$+ \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

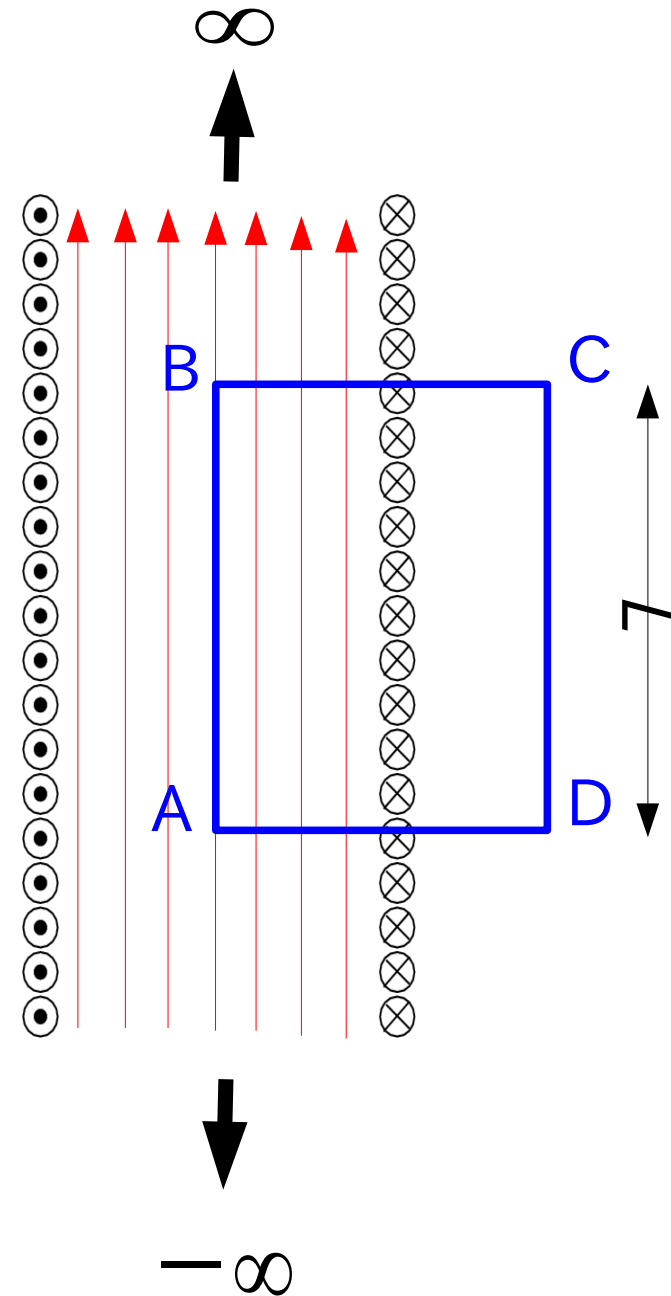
$$+ \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

無限に長いソレノイド



ソレノイド(続き)

無限に長いソレノイド



磁場はソレノイドの中心線と並行と考えて、

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot L$$

$$\int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

CD を無限遠に持っていけば、 $B=0$ だろう。従って、

$$\int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

つまり、

$$B \cdot L = \mu_0 n_1 l \cdot L$$

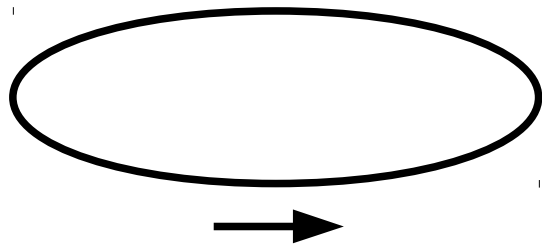
内部

$$B = \mu_0 n_1 l$$

外側

$$B = 0$$

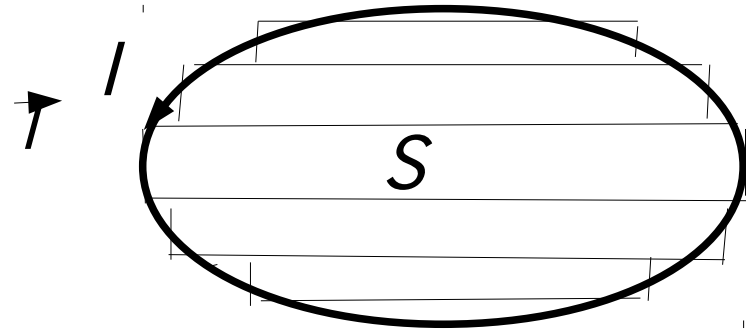
磁気双極子の最小単位



形は円形とは限らない。

磁気双極子モーメントの計算

$$m = I \cdot S$$

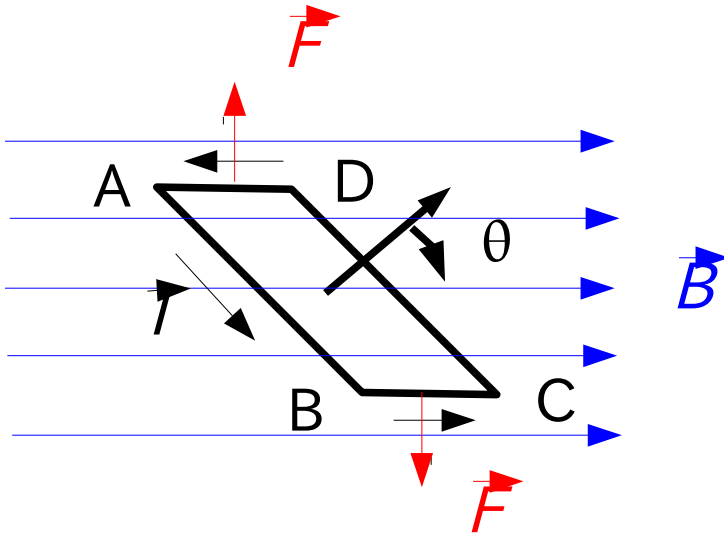


長方形を組み合わせて
任意の一周する電流を
近似する。==> 面積に比例

ベクトルとしての
方向は面に垂直、
電流と右ネジの関係

双極子モーメントと回転力

磁気双極子に働く力

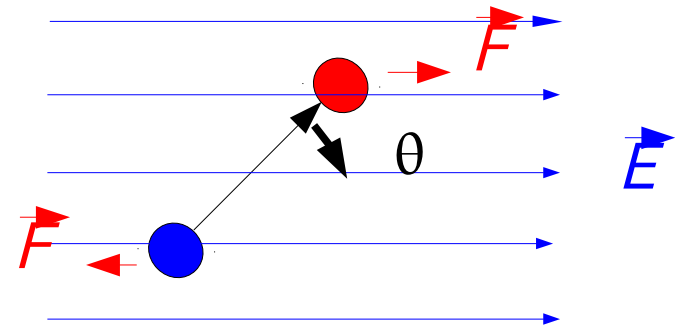


$$N = \sin \theta \cdot \bar{AB} \cdot F$$

$$= B \cdot [I \cdot \bar{AB} \cdot \bar{BC}] \cdot \sin \theta$$

$m \equiv I \cdot S$: 磁気双極子モーメント
ただし、 $S = \bar{AB} \cdot \bar{BC}$

電気双極子に働く力



$$N = \sin \theta \cdot l \cdot F$$

$$= E \cdot [lQ] \cdot \sin \theta$$

$p \equiv l \cdot Q$: 電気双極子モーメント

物質の磁性: 磁場中で物質の示す性質。 常磁性体、反磁性体、強磁性体

周期表

1 1 H	2												13 5 B	14 6 C	15 7 N	16 8 O	17 9 F	18 2 He
3 3 Li	4 4 Be												13 13 Al	14 14 Si	15 15 P	16 16 S	17 17 Cl	18 18 Ar
11 11 Na	12 12 Mg	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		13 13 Al	14 14 Si	15 15 P	16 16 S	17 17 Cl	18 18 Ar
19 19 K	20 20 Ca	21 21 Sc	22 22 Ti	23 23 V	24 24 Cr	25 25 Mn	26 26 Fe	27 27 Co	28 28 Ni	29 29 Cu	30 30 Zn	31 31 Ga	32 32 Ge	33 33 As	34 34 Se	35 35 Br	36 36 Kr	
37 37 Rb	38 38 Sr	39 39 Y	40 40 Zr	41 41 Nb	42 42 Mo	43 43 Tc	44 44 Ru	45 45 Rh	46 46 Pd	47 47 Ag	48 48 Cd	49 49 In	50 50 Sn	51 51 Sb	52 52 Te	53 53 I	54 54 Xe	
55 55 Cs	56 56 Ba	*1	72 72 Hf	73 73 Ta	74 74 W	75 75 Re	76 76 Os	77 77 Ir	78 78 Pt	79 79 Au	80 80 Hg	81 81 Tl	82 82 Pb	83 83 Bi	84 84 Po	85 85 At	86 86 Rn	
87 87 Fr	88 88 Ra	*2	104 104 Rf	105 105 Db	106 106 Sg	107 107 Bh	108 108 Hs	109 109 Mt	110 110 Ds	111 111 Rg	112 112 Uub	113 113 Uut	114 114 Uuq	115 115 Uup	116 116 Uuh	117 117 Uus	118 118 Uuo	

*1 ランタノイド:

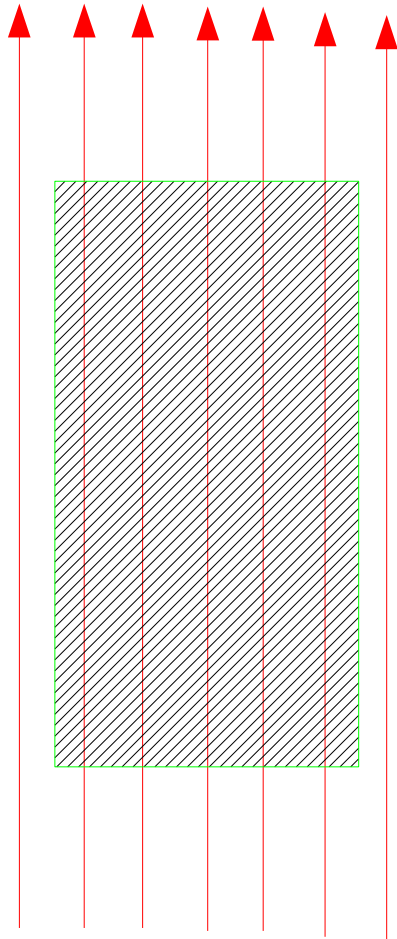
57 57 La	58 58 Ce	59 59 Pr	60 60 Nd	61 61 Pm	62 62 Sm	63 63 Eu	64 64 Gd	65 65 Tb	66 66 Dy	67 67 Ho	68 68 Er	69 69 Tm	70 70 Yb	71 71 Lu
----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

*2 アクチノイド:

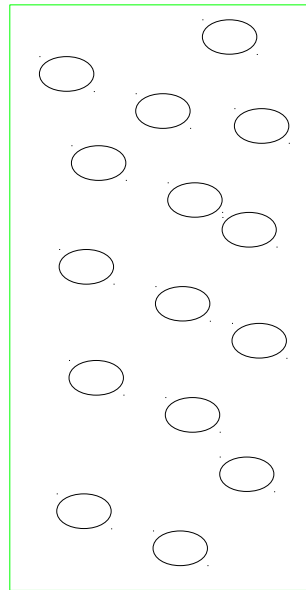
89 89 Ac	90 90 Th	91 91 Pa	92 92 U	93 93 Np	94 94 Pu	95 95 Am	96 96 Cm	97 97 Bk	98 98 Cf	99 99 Es	100 100 Fm	101 101 Md	102 102 No	103 103 Lr
----------------	----------------	----------------	---------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	------------------	------------------	------------------	------------------

- 1 常温で固体
- 金属元素
- アルカリ金属
- 1 常温で液体
- 半金属元素
- アルカリ土類金属
- 1 常温で気体
- 非金属元素
- ハロゲン
- 人工元素
- 希ガス
- 遷移元素

物質と磁場

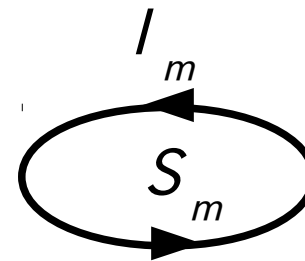


磁性は磁場中の物質のなかで
作られる磁気双極子により決まる。



物質の中の電気双極子は、原子のスピンの関係すると考えられている。

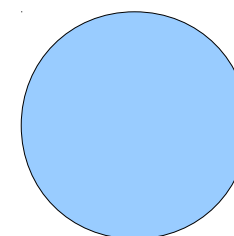
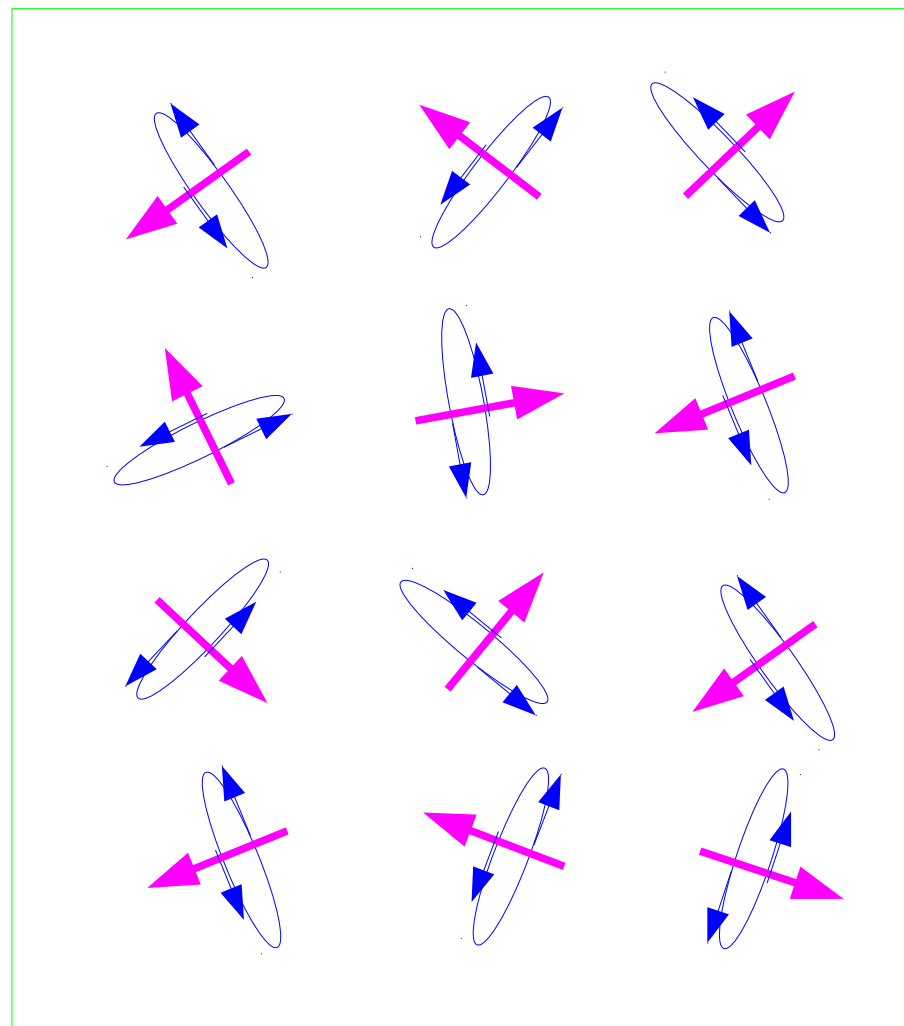
磁気双極子のモデルとして、



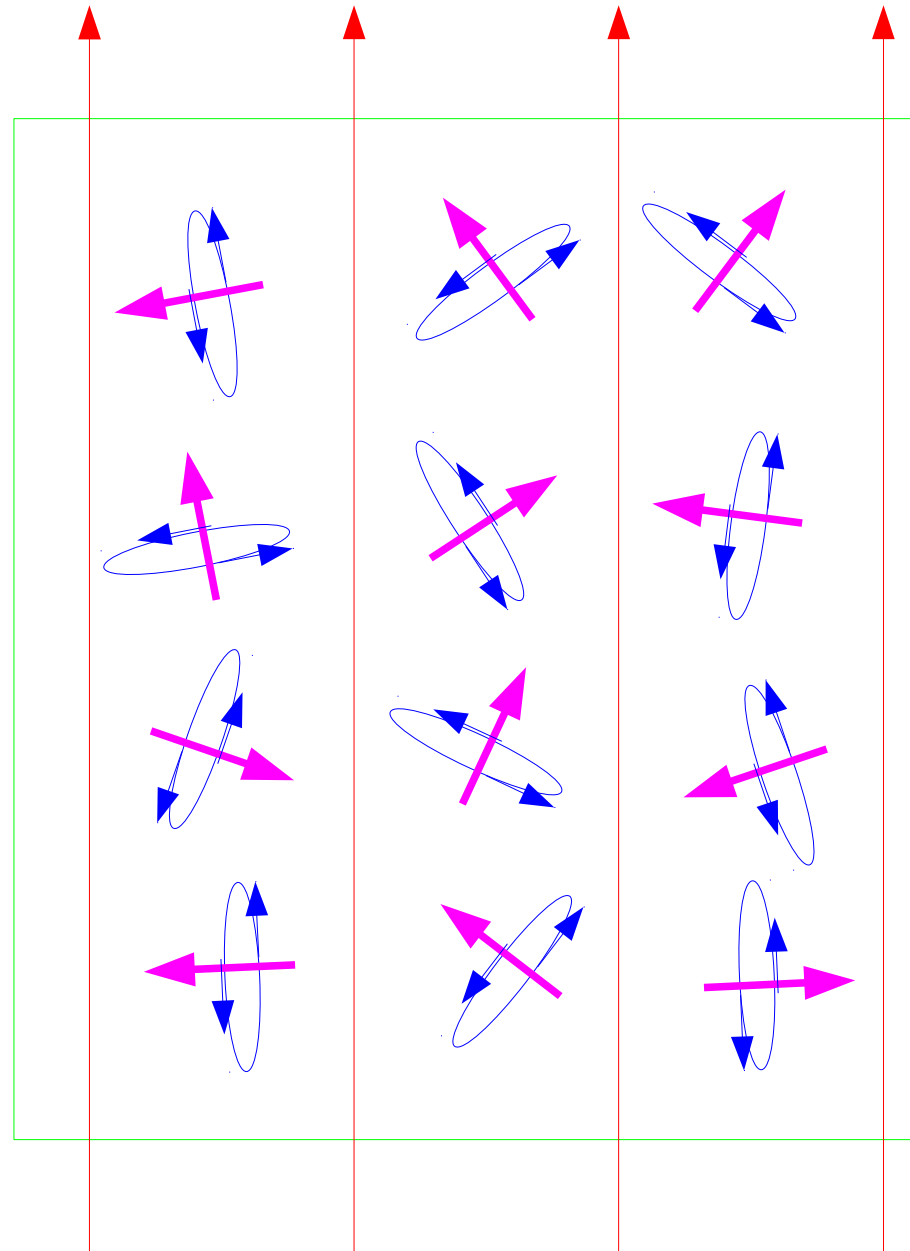
半径 r ($S_m = \pi r^2$) の円と、
そこを流れる電流 I_m を
考えると便利。

物質と磁場 1、常磁性体

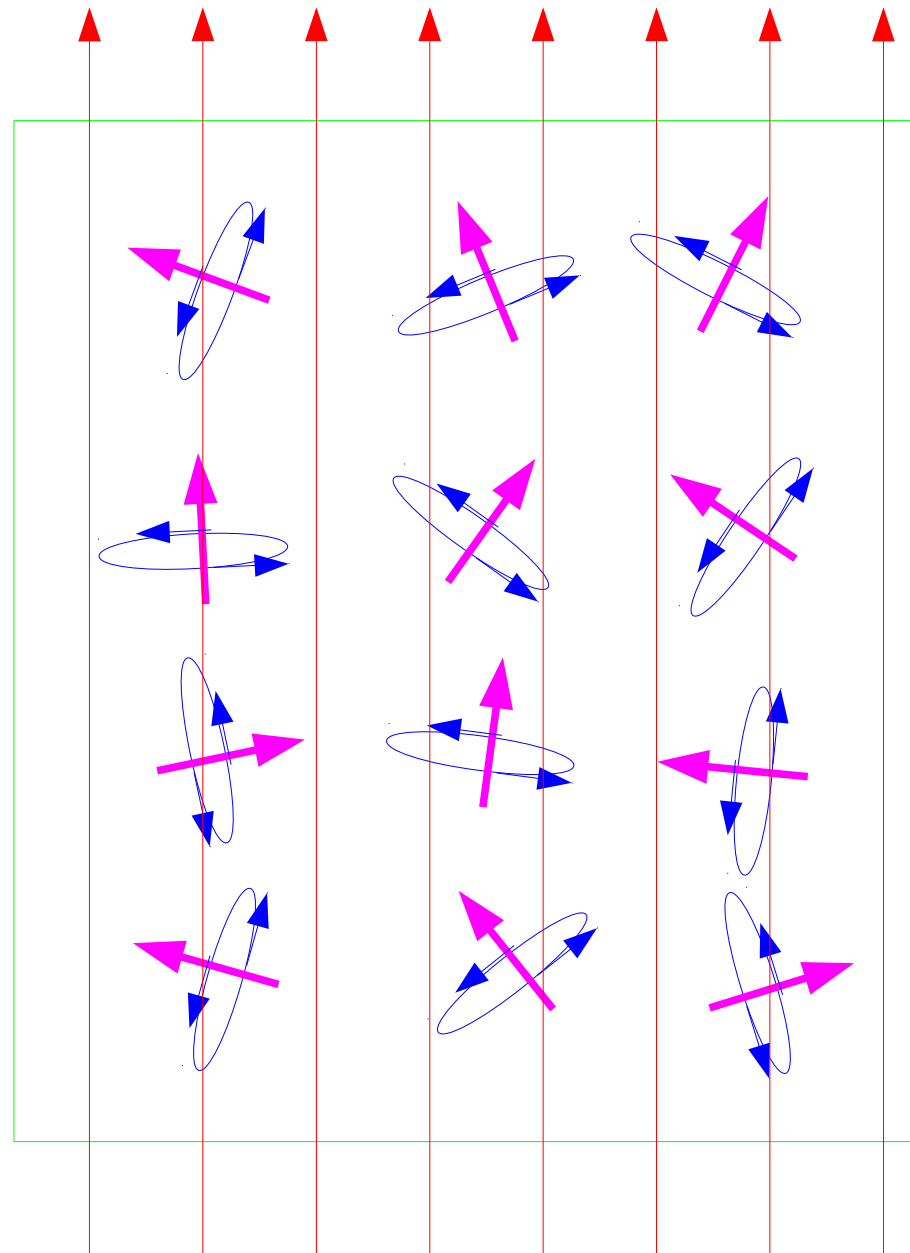
真上から見た
磁気双極子の断面積



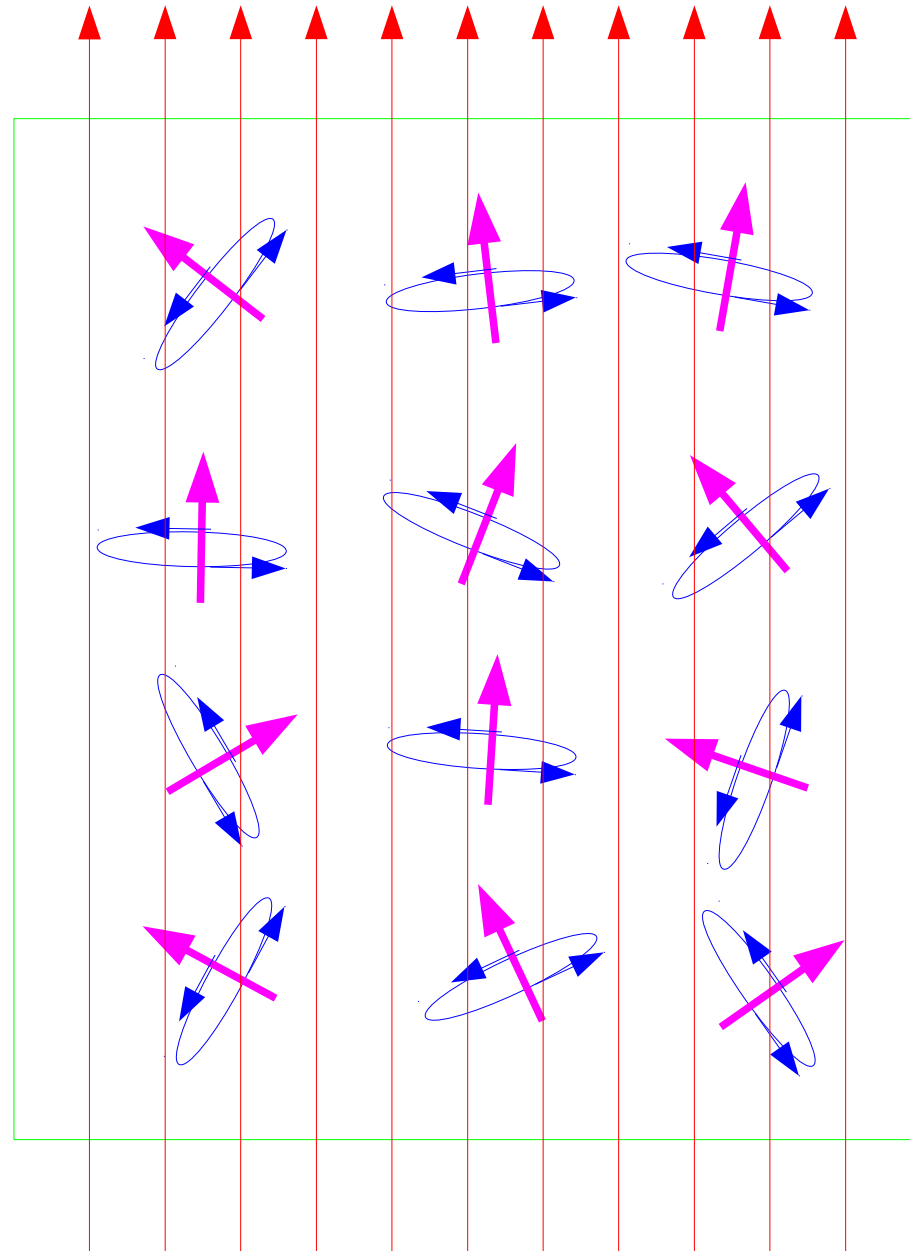
物質と磁場 1、常磁性体



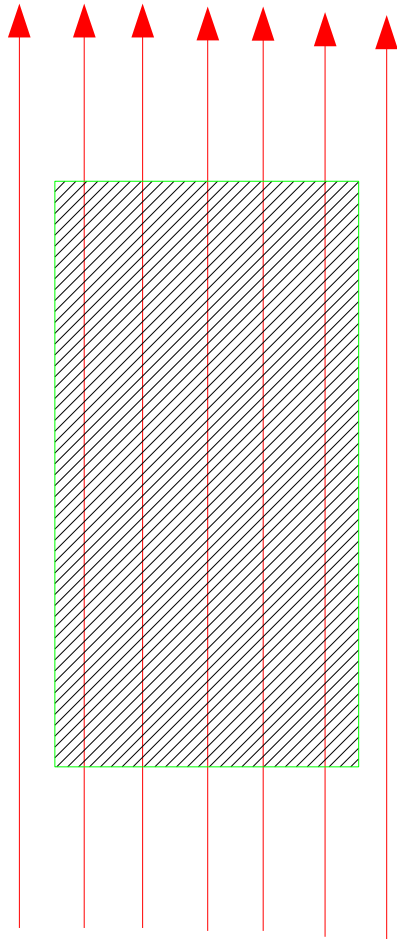
物質と磁場 1、常磁性体



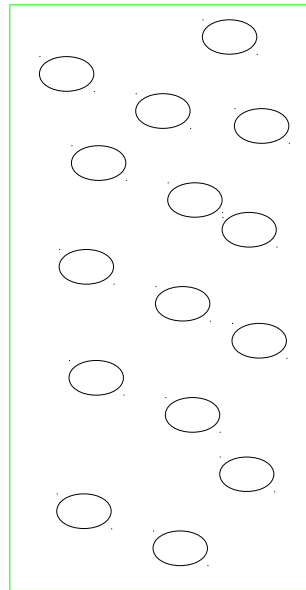
物質と磁場 1、常磁性体



物質と磁場

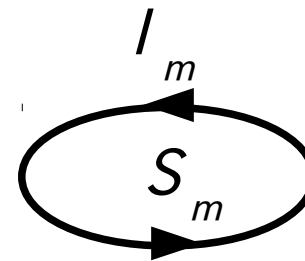


磁性は磁場中の物質のなかで
作られる磁気双極子により決まる。



物質の中の電気双極子は、原子のスピンの関係すると考えられている。

磁気双極子のモデルとして、



半径 r ($S_m = \pi r^2$) の円と、
そこを流れる電流 I_m を
考えると便利。

物質を考えた、アンペールの法則

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{ABCD \text{の中}} I$$

$$= \mu_0 n_1 I \cdot L + \text{磁気双極子の寄与}$$

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

$$+ \int_{BC} \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (= 0)$$

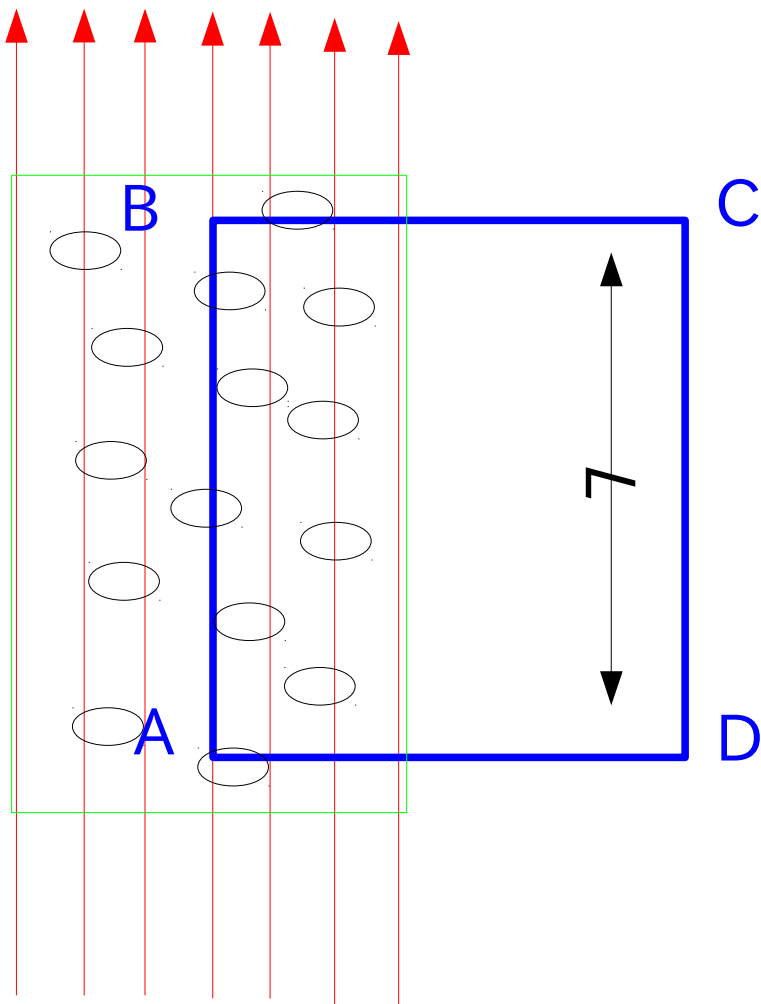
$$+ \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (= 0)$$

$$+ \int_{DA} \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (= 0)$$

したがってアンペールの法則の左辺は

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

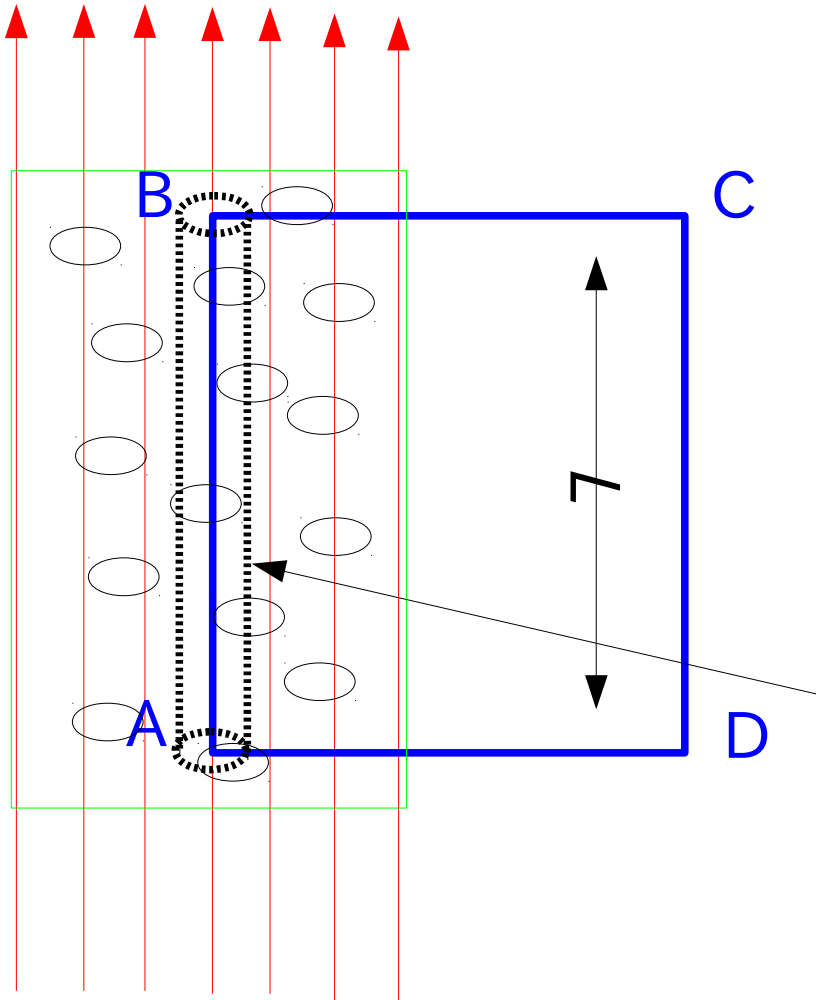
$$= \langle B \rangle L$$



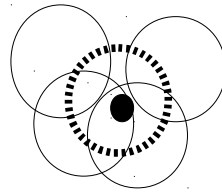
右辺=ソレノイドの電流+磁気双極子の寄与

磁気双極子として、
半径 r の円と、そこを流れる電流
を考える。

I_m



ABを真上から見た図。



点線の半径 r 円の中に
中心が入る磁気双極子が
寄与する。

左の図では点線で書いた円柱の中に
中心のある電気双極子が寄与する。

したがって、
磁気双極子の(数)密度を ρ_m とすると、

$$\text{磁気双極子の寄与} = \mu_0 \rho_m S_m L \cdot I_m$$

($S_m L$ は長さ L , 断面積 S_m の棒の体積)

磁気双極子の寄与(続き)

従って、アンペールの法則は、

$$\langle B \rangle L = \mu_0 n_1 I \cdot L + \mu_0 \rho_m S_m L \cdot I_m$$

$\mu_0 n_1 I$ は、真空でのソレノイドの磁場である。
電場の場合と同じく、**真空中の磁場**を別の形、

C $\mu_0 H$ で書いておくと便利。すなわち、

$$\langle B \rangle = \mu_0 H + \mu_0 \rho_m S_m I_m$$

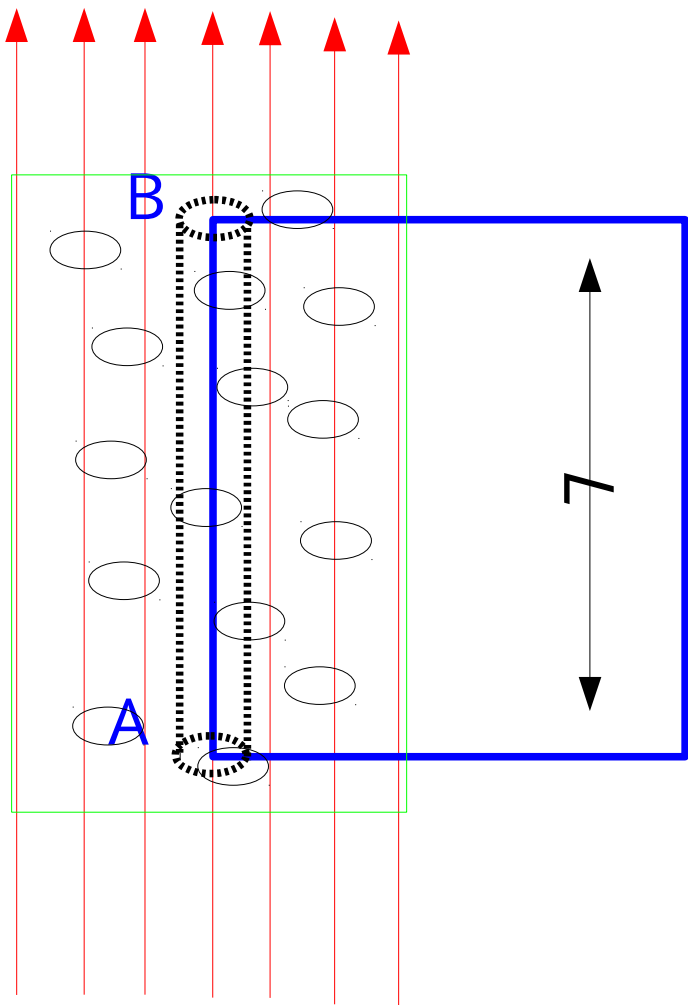
また、 $[I_m S_m]$ は物質の磁気双極子モーメント
なので、

$$M \equiv \mu_0 \rho_m [I_m S_m]$$

D とおくと、 M は磁気双極子モーメント密度に
 μ_0 をかけたもの。平均磁場をただ B と書き、
方向も考えると、

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$$

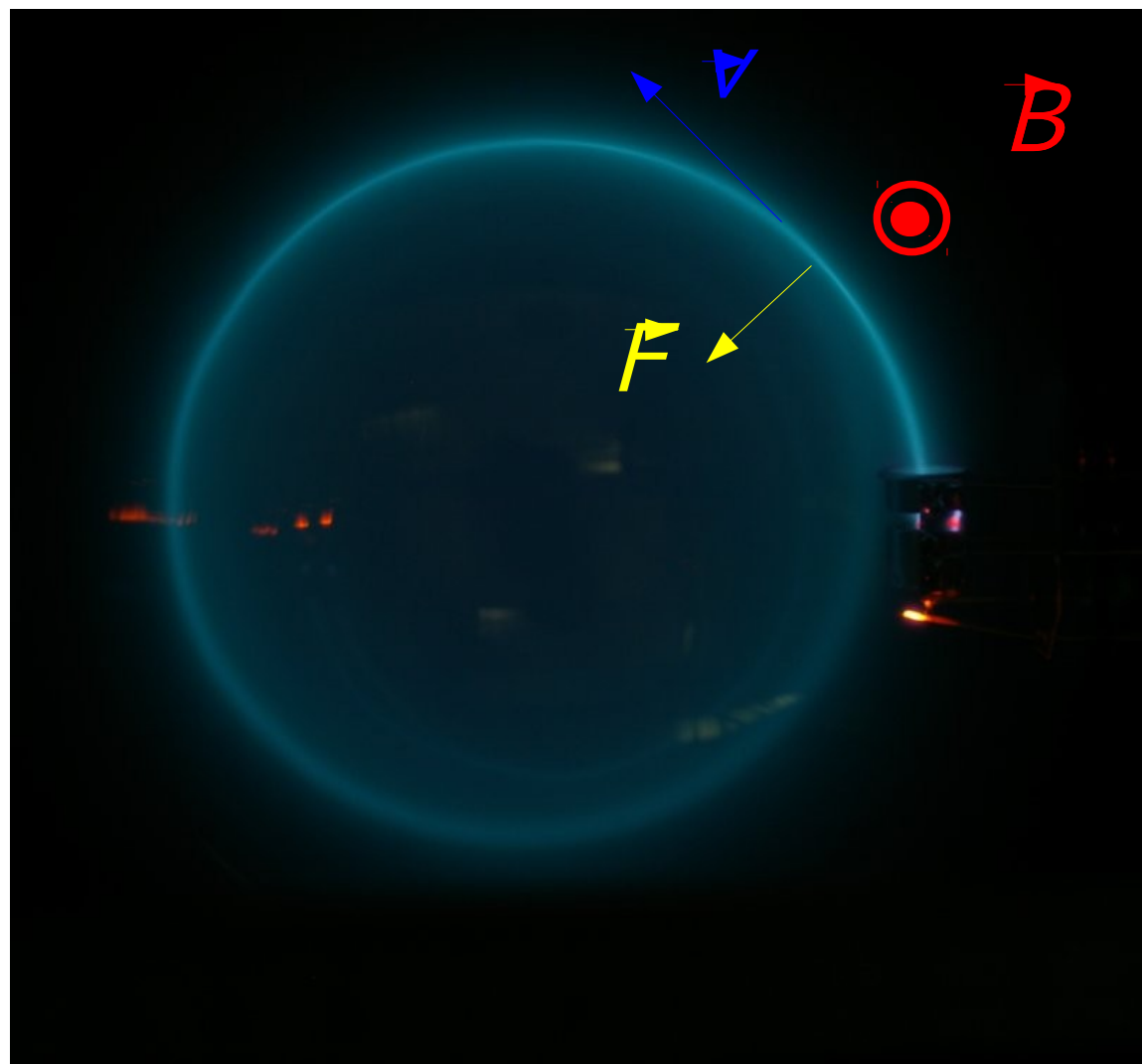
が得られる。



今日の問題、一様で、静止している磁場中の荷電粒子

磁場中で、動いている電子がある。
どのような運動をするか、知ることを述べよ。

磁場中の電子の運動



一様な磁場中の荷電粒子の運動方程式は、

荷電粒子の速度を

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

一様な磁場ベクトルを

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

とおくと、

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

特に、運動エネルギーは、

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \quad \text{だから、}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \vec{v} \cdot \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

だが、運動方程式を代入すると、

$$\frac{dE}{dt} = \vec{v} \cdot \left(q(\vec{v} \times \vec{B}) \right) = q[\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B})] = \boxed{0} \quad (\vec{v} \perp (\vec{v} \times \vec{B}))$$

つまり、磁場中では(加速度は受けるが)運動エネルギーは変化しない。

一様な磁場中の荷電粒子の運動

運動方程式 $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ を、

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

とおいて解く。ここで磁場はz軸に平行と考えると、

$$\vec{B} \parallel \hat{k} \quad \longrightarrow \quad \vec{B} = B_z \hat{k} = B \cdot \hat{k}$$

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt} (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) &= q(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \times (B \cdot \hat{k}) \\ &= q(v_x B(\hat{i} \times \hat{k}) + v_y B(\hat{j} \times \hat{k})) \\ &= q(-v_x B \hat{j} + v_y B \hat{i}) \end{aligned}$$

つまり、

$$m \frac{dv_x}{dt} = q \cdot v_y \cdot B \quad \dots(a)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -q \cdot v_x \cdot B \quad \dots(b)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0$$

b を a に代入して

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} \cdot B = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x = 0$$

$$v_x = v_{\perp} \sin(\omega t)$$

$$v_y = v_{\perp} \cos(\omega t)$$

$$v_z = v_{\parallel}$$

ただし、 $\omega = \frac{qB}{m}$

$$v_x = v_{\perp} \sin(\omega t)$$

$$\rightarrow x = \int v_x dt + x_0 = \int v_{\perp} \sin(\omega t) dt + x_0 = -r_0 \cos(\omega t) + x_0$$

$$v_y = v_{\perp} \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow y = \int v_y dt + y_0 = \int v_{\perp} \cos(\omega t) dt + y_0 = r_0 \sin(\omega t) + y_0$$

$$v_z = v_{\parallel}$$

$$\rightarrow z = v_{\parallel} t + z_0$$

$$r_0 = \frac{v_{\perp}}{\omega} = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{p_{\perp}}{qB}$$

まとめると、

$$x = -r_0 \cos(\omega t) + x_0$$

$$y = r_0 \sin(\omega t) + y_0$$

$$z = v_{\parallel} t + z_0$$

Z 方向の螺旋運動

物質中の磁気双極子の解釈

磁気双極子モーメント密度 M は一般に**磁化**と呼ばれる。物理的には B に比例すると考えられるが、真空中の磁場 $\mu_0 H$ も、 B に比例するので、

$$M = \chi_m (\mu_0 H)$$

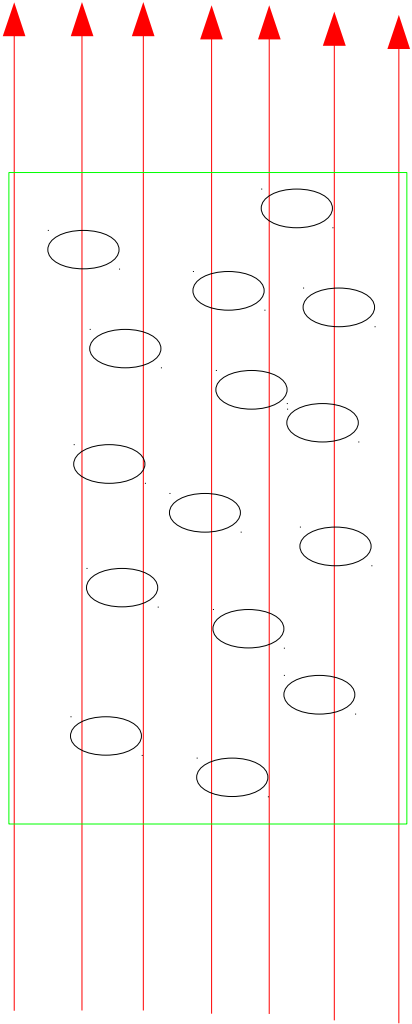
と仮定する。この比例定数 χ_m を磁化率と呼ぶ。
結局

$$B = \mu_0 H + M = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu H$$

磁化率 χ_m は実験的に求められるが、正の値を持つものを**磁性体**、負の値を持つものを**反磁性体**、大きな正の値を持つものを**強磁性体**と呼ぶ。

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

は(物質の)透磁率と呼ばれる。



結局、物質がある時の、磁場の法則は？

真空の透磁率を(物質の)透磁率に置き換える

$$\mu_0 \rightarrow \mu = \mu_0(1 + \chi_m)$$

本来真空の磁場を表す、 H では、物質の中でも、物質の磁気双極子の補正が不要。
アンペールの法則がそのまま成り立つ。

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum_{\text{積分に囲まれた}} I$$

(磁気双極子の補正は、表面に出て来ない)

注意、 H を**磁場**、 B を**磁束密度**と呼ぶほうが公式な用語とされる。

