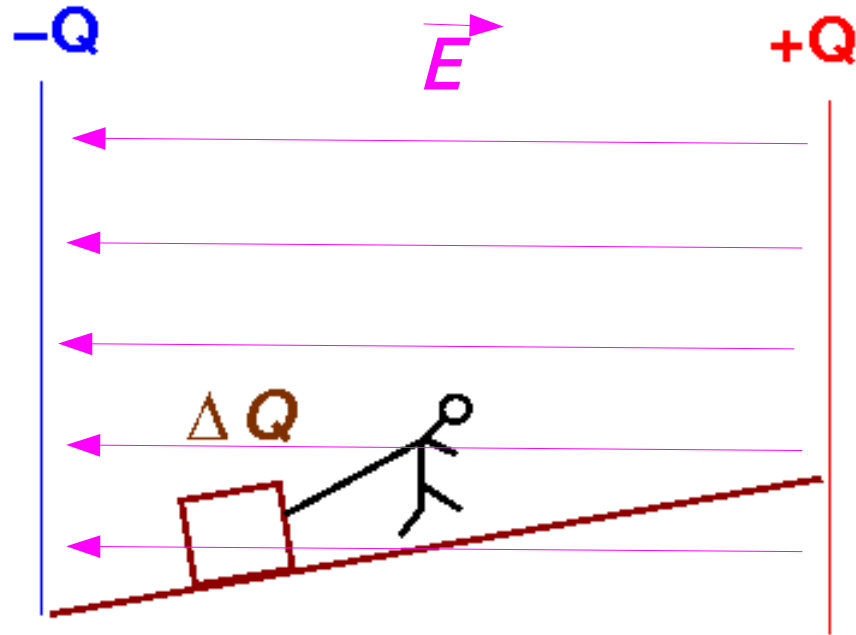


電場の持つエネルギー

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験

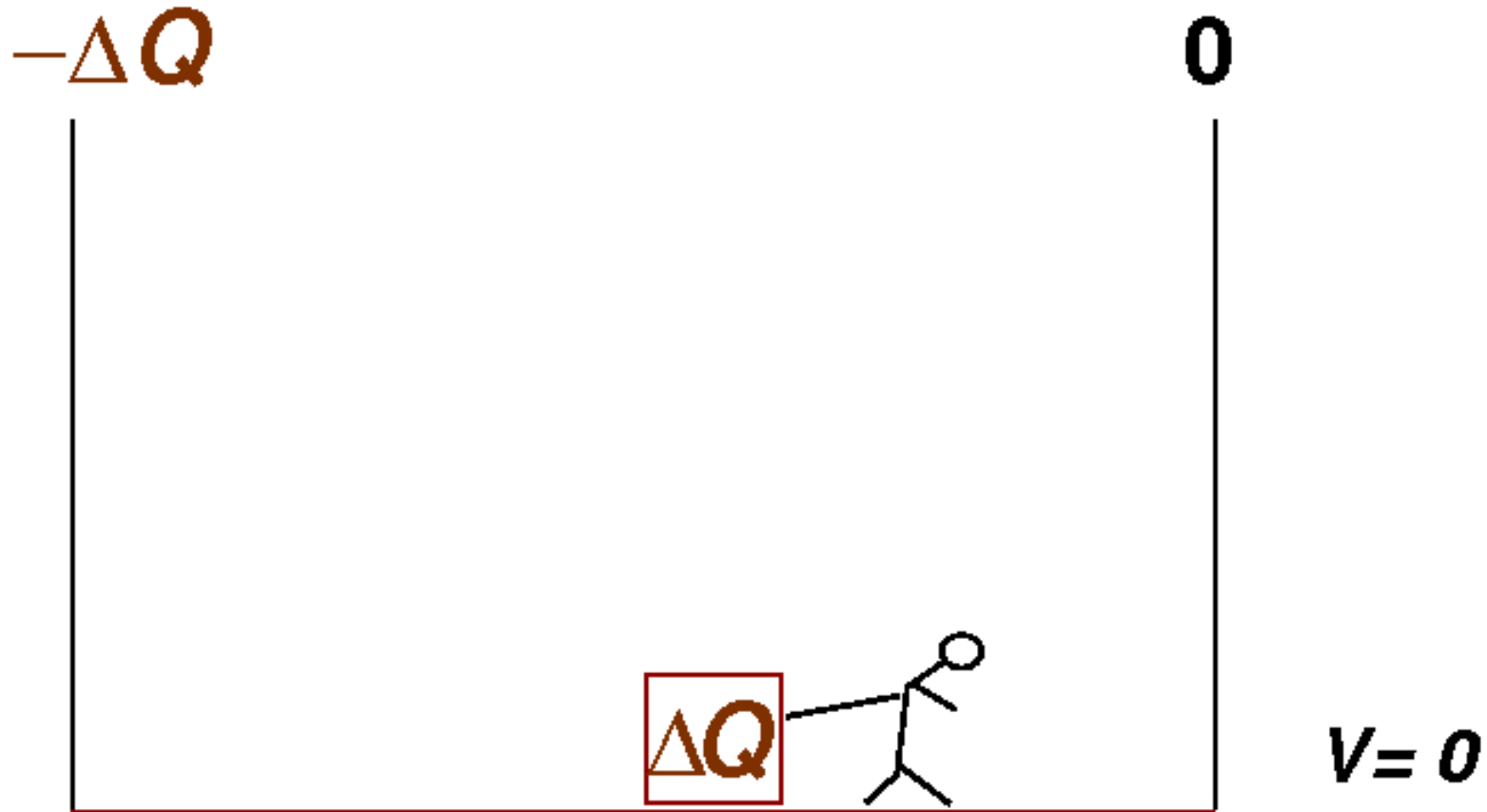


$$V \cdot \Delta Q$$

の仕事が電場に逆らってなされる。

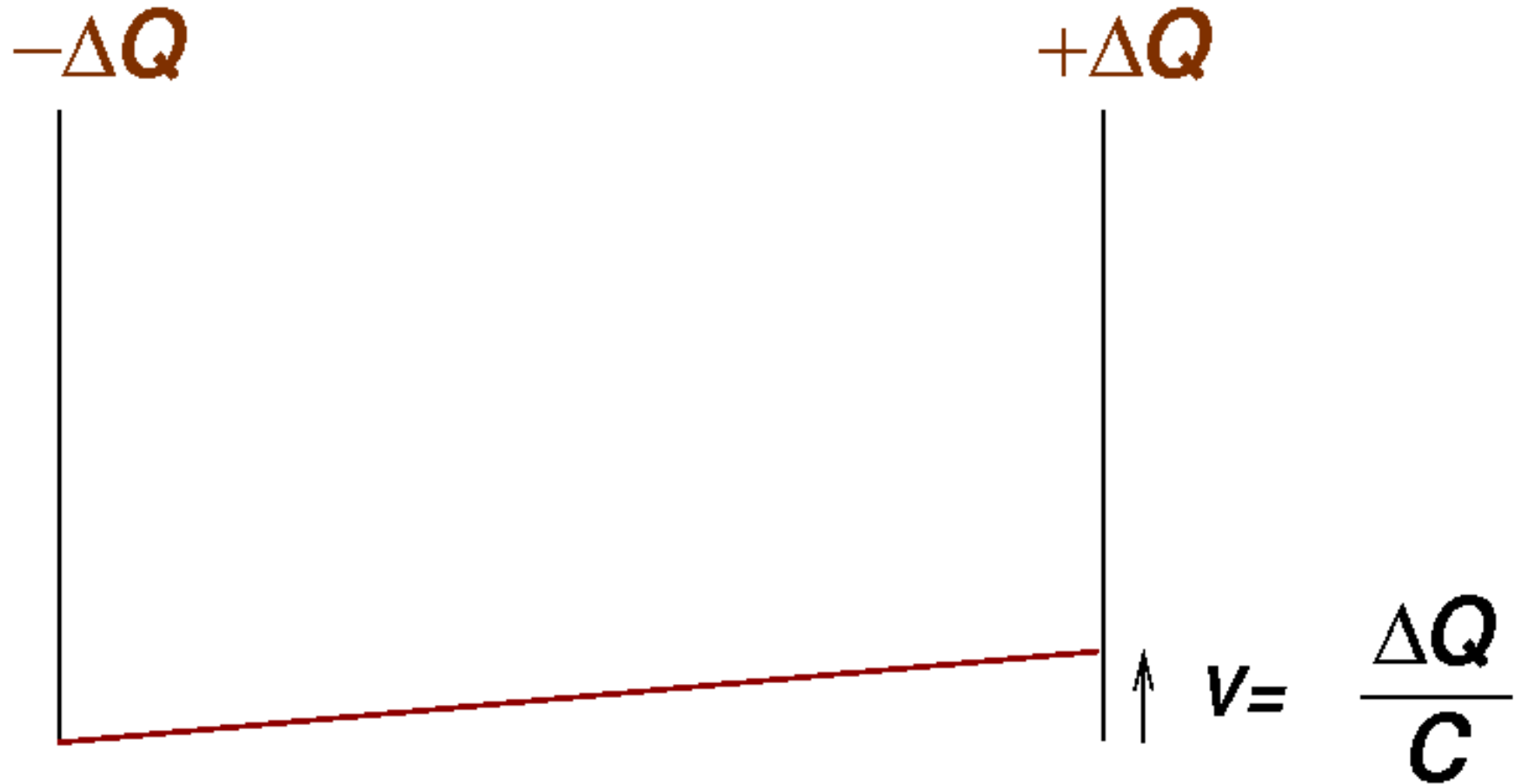
ただし、**実際のコンデンサー**では、
極板間の電位差が ΔQ の移動とともに変化する。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



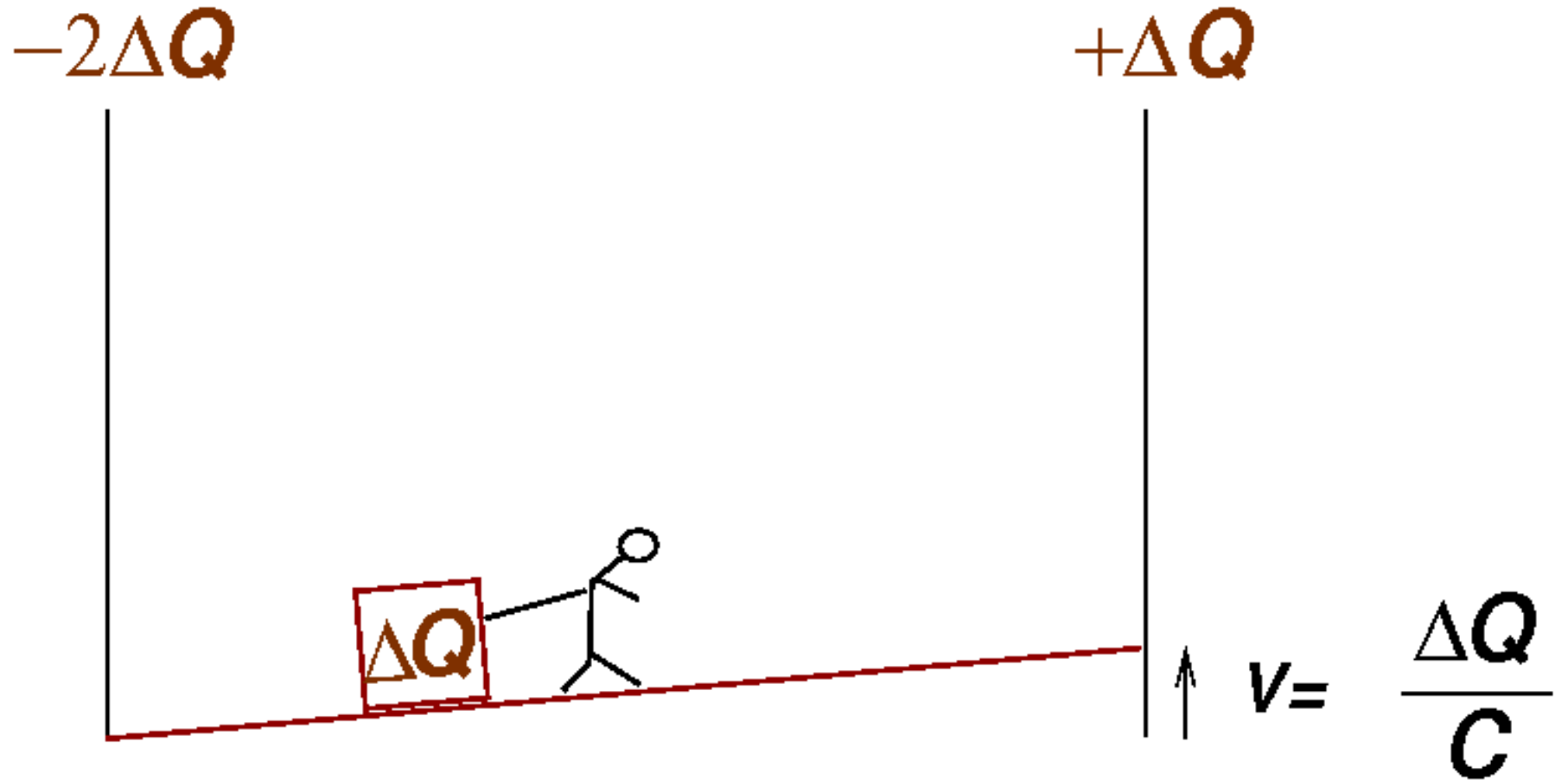
一方の極板の電荷が、 ΔQ だけ減少して、もう一方の極板へ。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



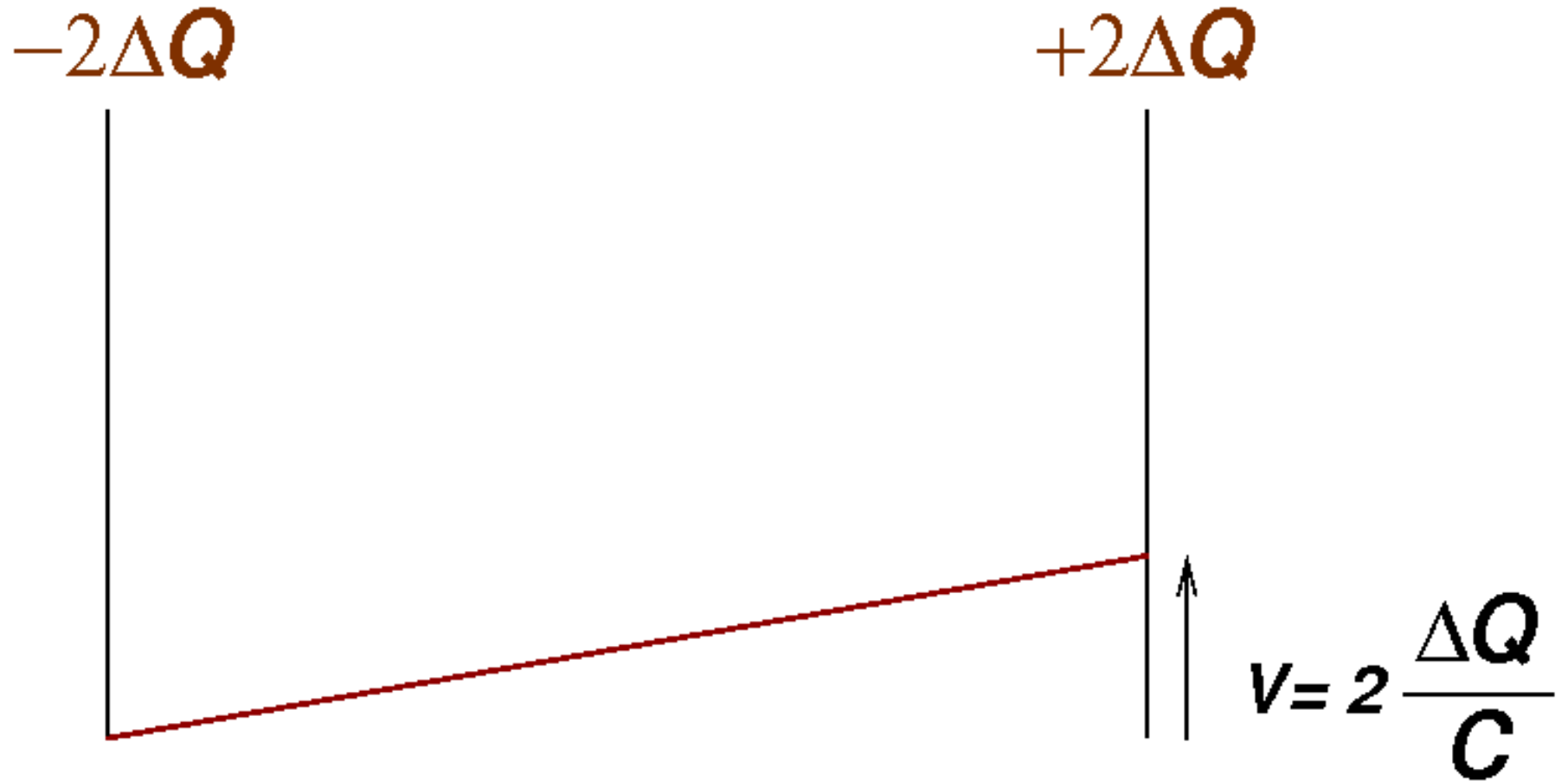
極板間の電位差が、 $\frac{\Delta Q}{C}$ だけ増加する。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



次の ΔQ の移動は、増加した電位に逆らった移動。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験

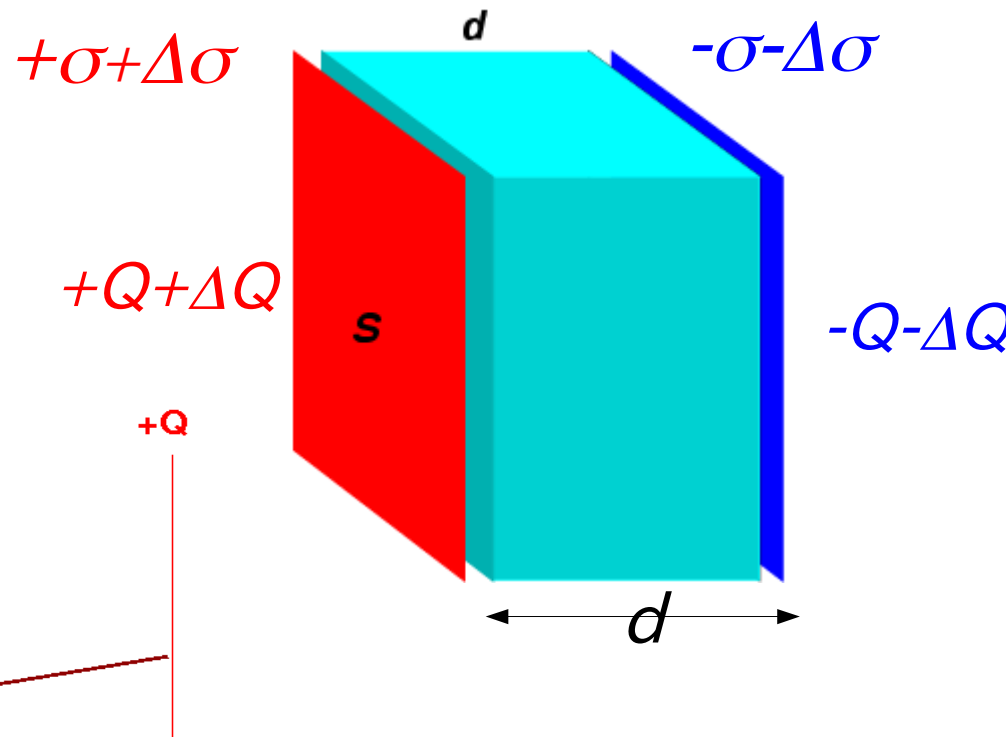
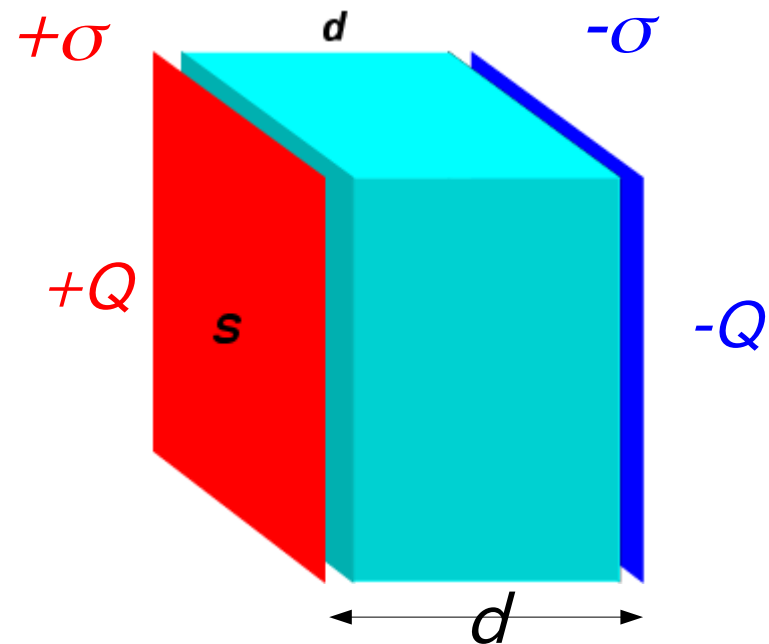


2回 ΔQ が移動した後の電位差

コンデンサーの中の微小電荷の移動前後の比較

ΔQ の電荷の移動の前

ΔQ の電荷の移動の後



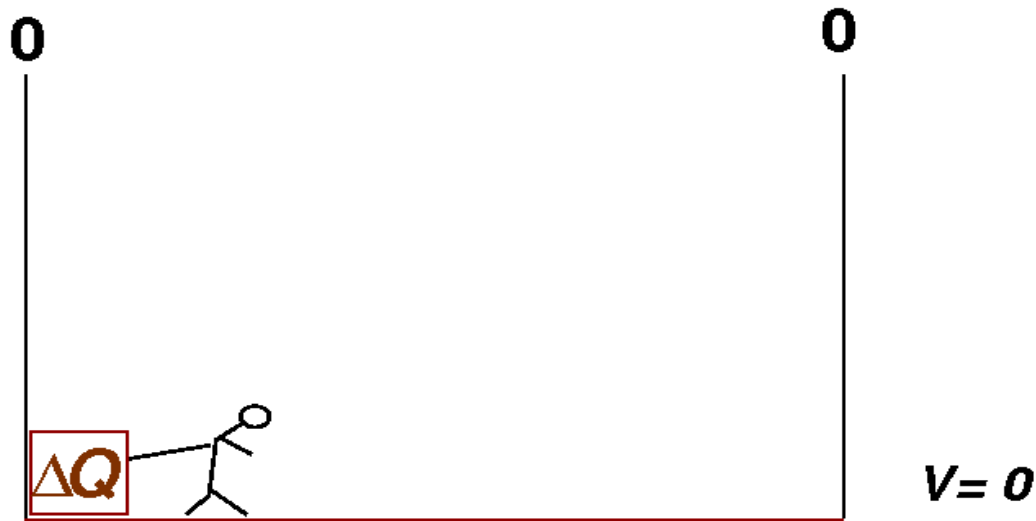
- 極板の電荷密度の変化
- 極板間の電場の変化
- 極板間の電位差の変化

$$\sigma \left(= \frac{Q}{S} \right) \rightarrow \sigma + \frac{\Delta Q}{S}$$

$$E \left(= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) \rightarrow E + \frac{\Delta Q}{\epsilon_0 S}$$

$$V \left(= E \cdot d \right) \rightarrow V + \frac{d}{\epsilon_0 S} \Delta Q = V + \frac{\Delta Q}{C}$$

コンデンサーの中の微小電荷の移動(まとめ)



両極板の電荷 0 の状態から
 n 回 ΔQ の移動が繰り返された状態

•極板の電荷密度

$$\sigma (= \frac{Q}{S}) = n \frac{\Delta Q}{S}$$

•極板間の電場

$$E (= \frac{\sigma}{\epsilon_0}) = n \frac{\Delta Q}{\epsilon_0 S}$$

•極板間の電位差

$$V (= E \cdot d) = n \frac{d}{\epsilon_0 S} \Delta Q = n \frac{\Delta Q}{C}$$

コンデンサーになされた仕事の合計

(電荷を蓄えるのに必要な仕事)

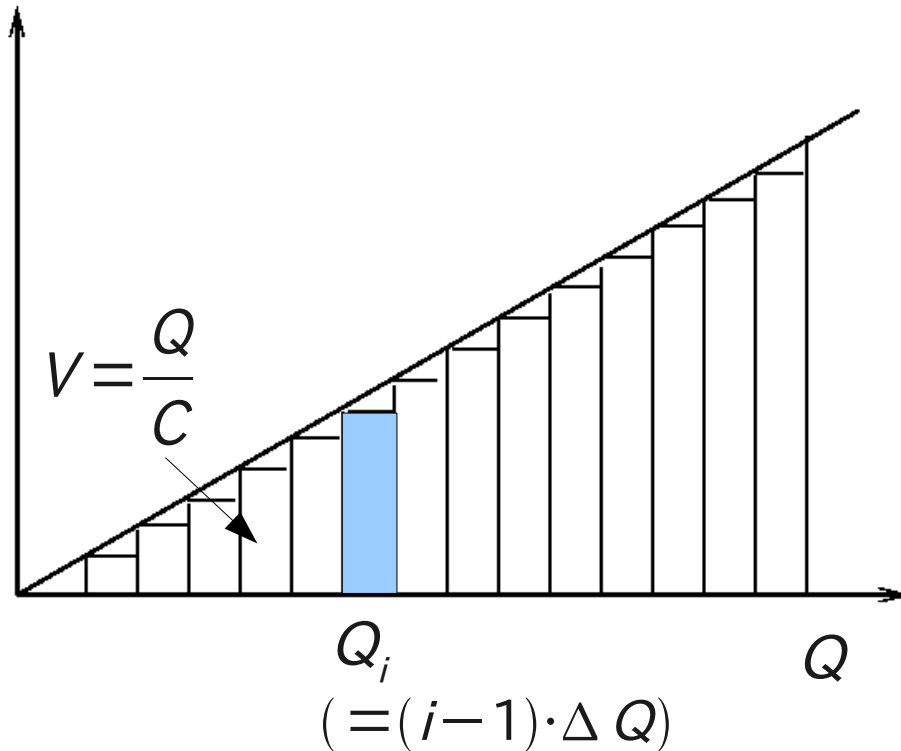
i 回めに ΔQ を、運ぶための仕事は $V_i \cdot \Delta Q$

両極板の電荷が0の状態から、最終的に電荷 $\pm Q$ になったとして、

仕事の合計の計算は、

$$U = \sum_{i=1}^n V_i \Delta Q = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{C} \Delta Q \approx \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ$$

したがって、この合計は
の極限で、



$$\Delta Q \rightarrow 0$$

となる。

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

コンデンサーになされた仕事の合計 (2)

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \text{および} \quad C \equiv \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{より、}$$

$$U = \frac{d}{2\epsilon_0 S} (S\sigma)^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \boxed{S \cdot d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \boxed{S \cdot d}$$

ここで、

$$S \cdot d = [\text{極板間の体積}]$$

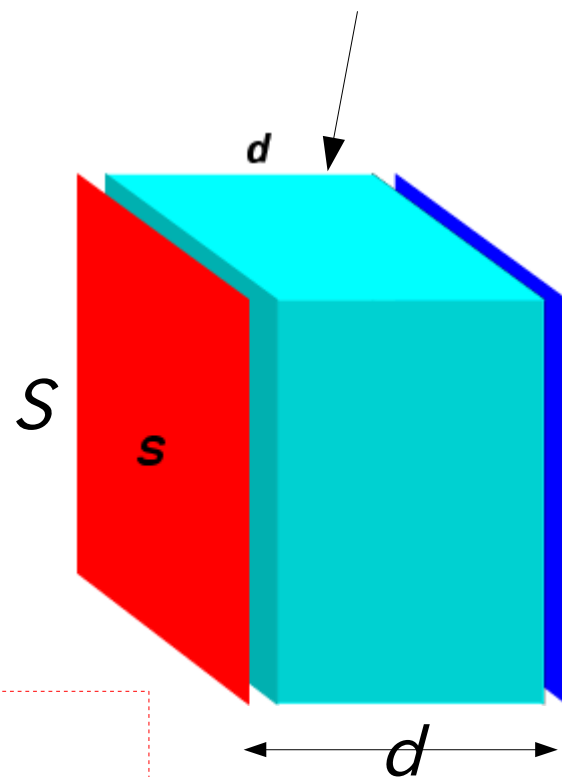
に注意。

つまり、コンデンサーになされた仕事は、
電場の存在する空間に分布するエネルギー

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (\text{電場の持つエネルギー密度})$$

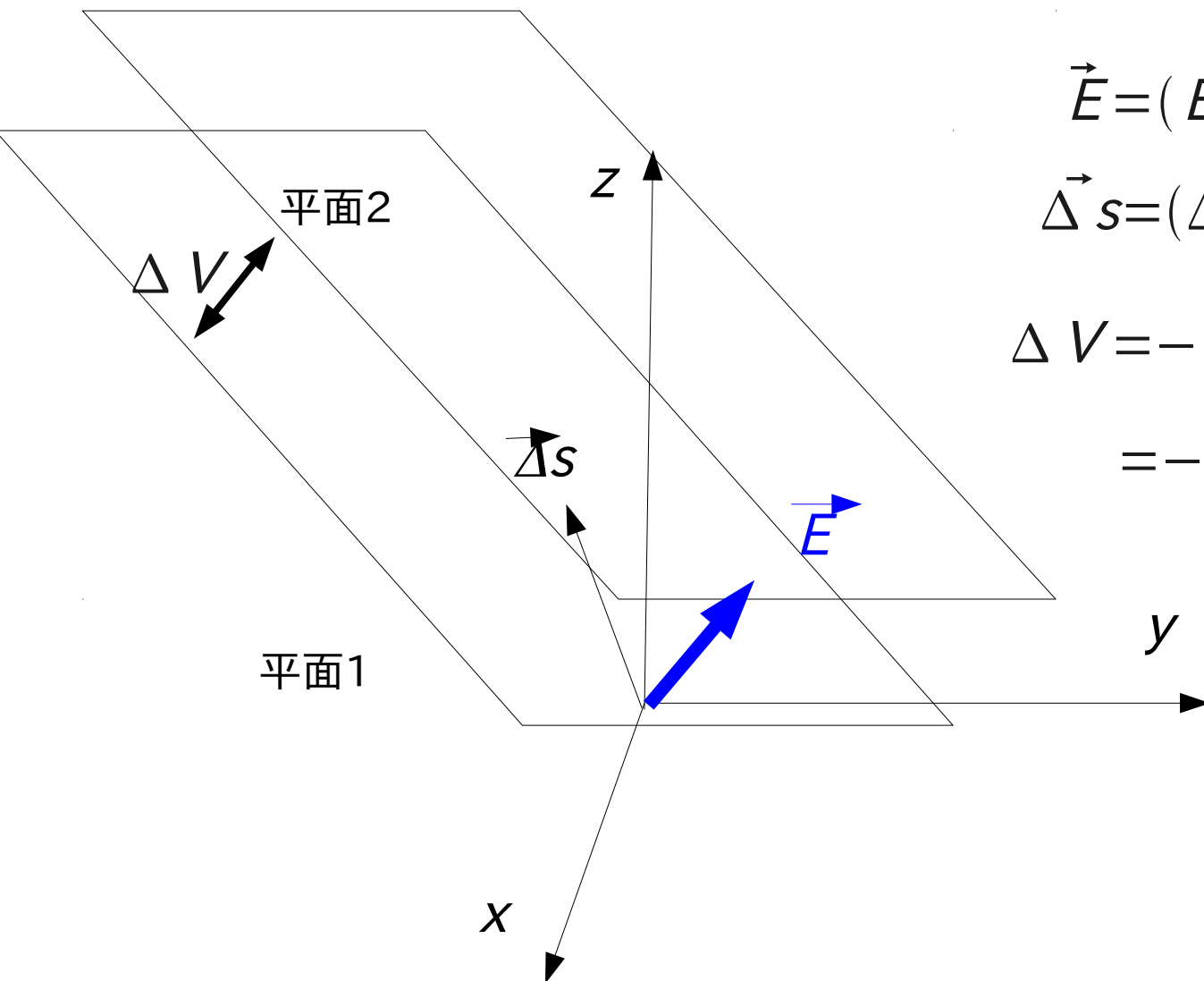
となって、蓄えられる。

ここにあるのは電場のみ!



電位から電場を求める。
電位差の2つの計算の比較

A. 電場と距離ベクトルの内積 (座表を用いた、3次元イメージ)



$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$$

$$\Delta \vec{s} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

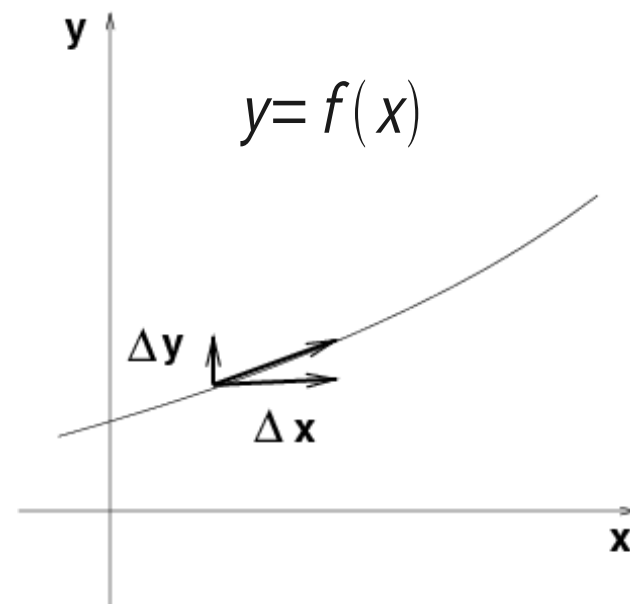
$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{s}$$

$$= -(E_x \cdot \Delta x + E_y \cdot \Delta y + E_z \cdot \Delta z)$$

微分: 物理では、小さい量の比(割り算)。

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \simeq \frac{\Delta f}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \simeq \frac{df}{dx} \cdot \Delta x \quad (= f'(x) \cdot \Delta x)$$



偏微分は、他の変数を定数の様に扱う。

$$\frac{\partial V}{\partial x} \simeq \frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

xによる偏微分

$$\Delta V = V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z) \simeq \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \Delta x$$

B, 電位が位置の関数として与えられているとして、

x, y, z それぞれ $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ だけ変化するとき、 $V(x, y, z)$ の変化は、

$$\Delta V = V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - V(x, y, z)$$

$$= V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - V(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$$

$$+ V(x + \Delta x, y + \Delta y, z) - V(x + \Delta x, y, z)$$

$$+ V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

変化する変数が一つだけになるよう、分解して差をとる。

$$\simeq \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) \cdot \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}(x + \Delta x, y, z) \cdot \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}(x + \Delta x, y + \Delta y, z) \cdot \Delta z$$

$$\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z$$

A, B を比較

$$\Delta V = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{s}$$

$$= -(E_x \Delta x + E_y \Delta y + E_z \Delta z)$$

$$\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z$$

A, 電磁場のイメージ

B, 偏微分の性質

すなわち、

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \left(\simeq -\left(\frac{\Delta V}{\Delta x}, \frac{\Delta V}{\Delta y}, \frac{\Delta V}{\Delta z}\right)\right)$$

「ベクトル解析」で使われる記号

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \left(\approx -\left(\frac{\Delta V}{\Delta x}, \frac{\Delta V}{\Delta y}, \frac{\Delta V}{\Delta z}\right) \right)$$

$$\vec{E} = \mathbf{grad} \ V \quad (= -\vec{\nabla} V) \quad (V \text{の勾配})$$

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{ナブラと呼ばれるベクトル・微分演算子}$$

クーロン場の電位から、電場を求める。

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \leftarrow \text{定数と思って、普通に微分}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{-x}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{r^3}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \left(\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \text{ に注意}\right)$$

確かに、一個の電荷の作る電場、

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \text{ と、一致する。}$$

今日の問題、クーロン場の電位から、クーロン電場を求めよ。

考え方: クーロン電場を三次元座標で表現した式

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

から、

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

を用いて、

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

を導く