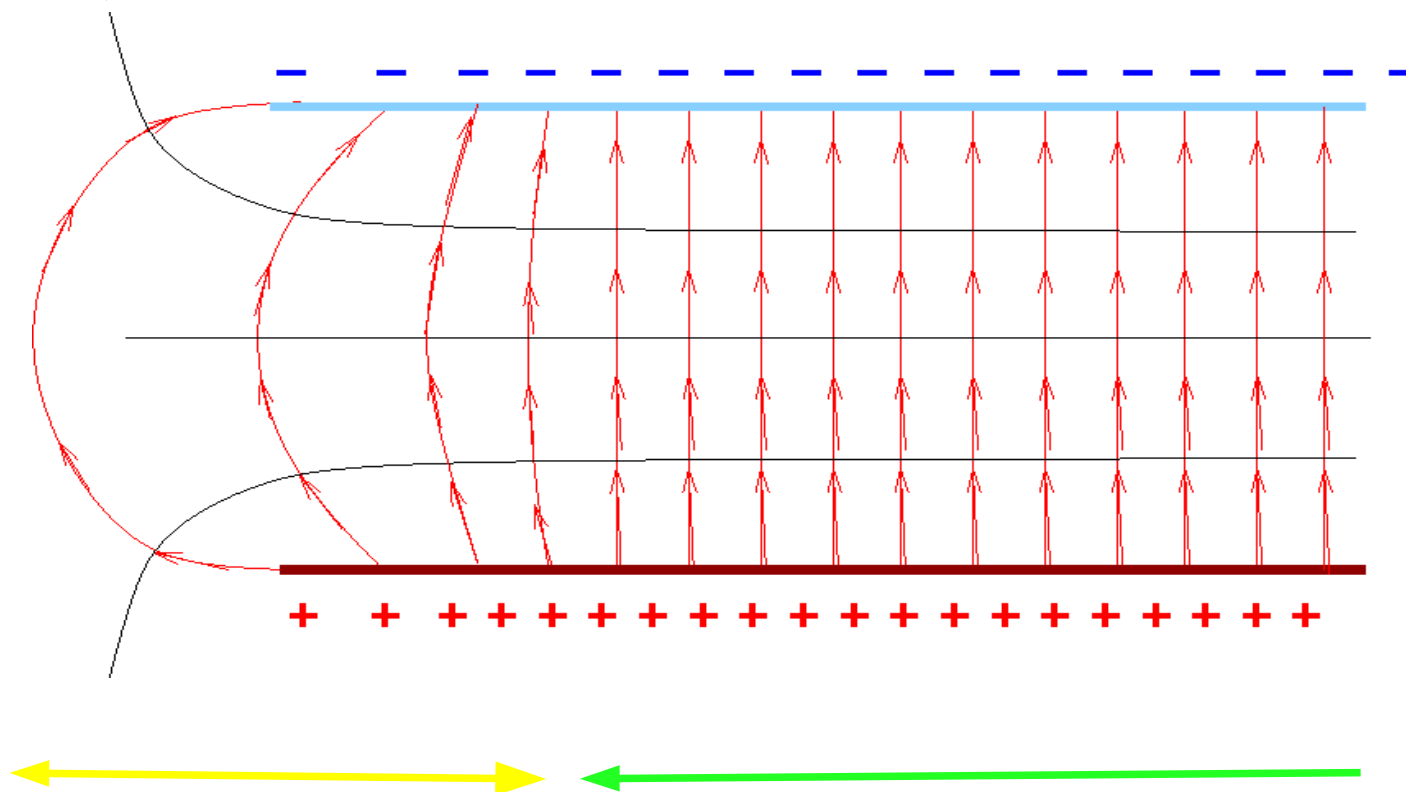


コンデンサー = 一様な電場を作る道具

実際のコンデンサー(の縁)



電荷分布
電場が不均一

ほとんど均一な電荷分布と電場
で、局番が無限に広い場合
と、同様。

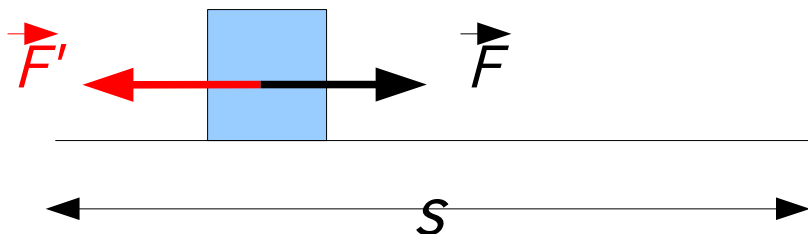
縁近くの面積が、全体に比べ小さい時、真ん中付近では、無限に広い極板が良い近似になる。

電場による仕事

力と仕事の復習

仕事の定義: $U = F \cdot s$

[仕事] = [移動をなすための力] · [移動した距離]
= - [移動を妨げる力] · [移動した距離]



力の方向と移動する方向が一直線上に無い時は、ベクトルで

$$U = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

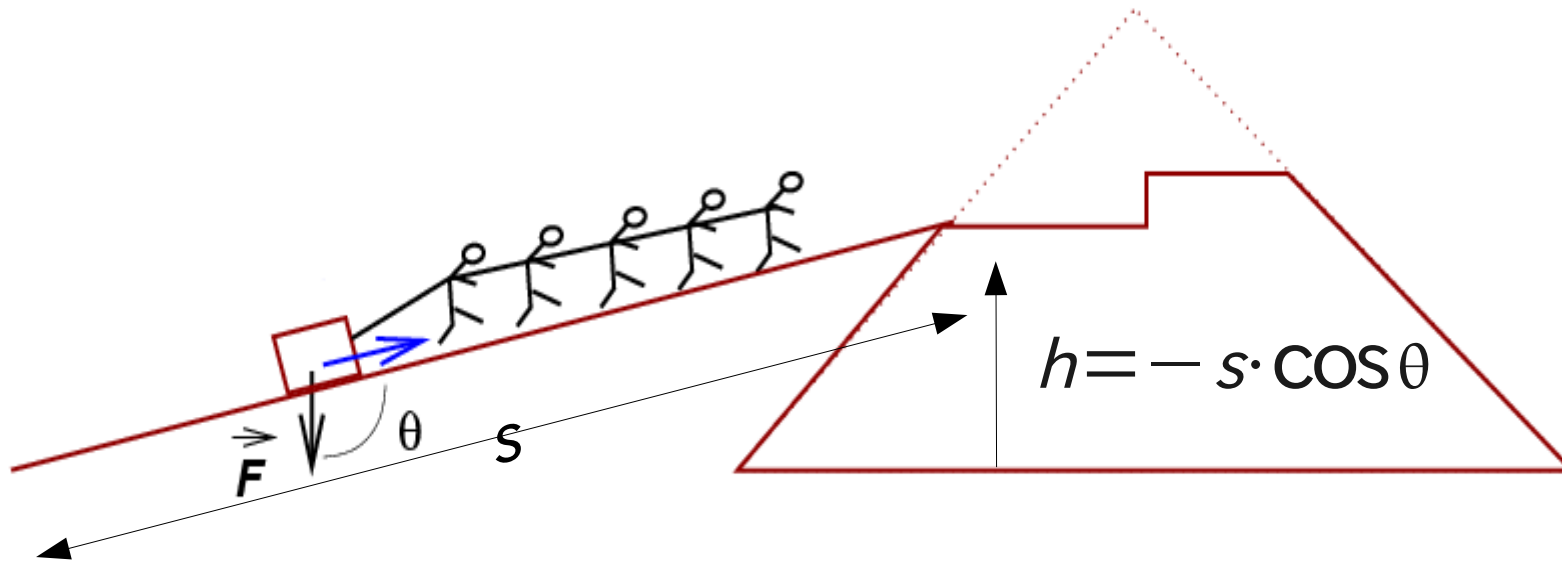
$$U = -\vec{F} \cdot \vec{S} \quad (\vec{F} \text{ が移動を妨げる力の場合})$$

重力による力と仕事

物を持ち上げるために必要な仕事は、持ち上げる高さに比例する

$$U = -F_g \cdot s \cdot \cos\theta = -\vec{F}_g \cdot \vec{s}$$

重力は下向き、かつ θ は重力と力のなす角



注意、内積で書く時は、符号に注意。

必要な力は重力と反対向き \Rightarrow 重力に“-”符号が付く。

コンデンサーの極板間の電位差

2つの平面が距離 d 離れて平行に置かれ、コンデンサーの電極を成している。

それぞれ電荷密度 $+\sigma, -\sigma$ が与えられている時、その平面の間の空間には、

2つの平面に垂直で、+の電極から-の電極へ向かい

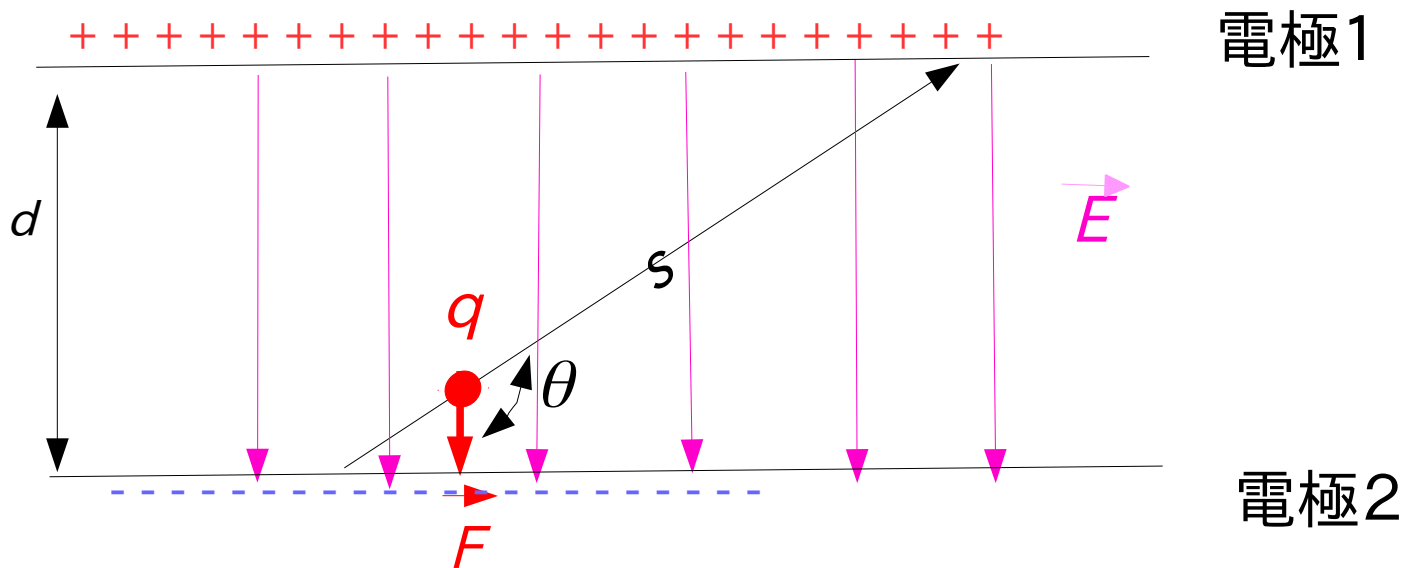
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

の大きさの電場ができる。その中で、 $+q$ の電荷を一の極板から、+の極板まで移動させるのに必要な仕事は、

$$U = -\vec{F} \cdot \vec{s} = -q(\vec{E} \cdot \vec{s}) = q \cdot E \cdot d$$

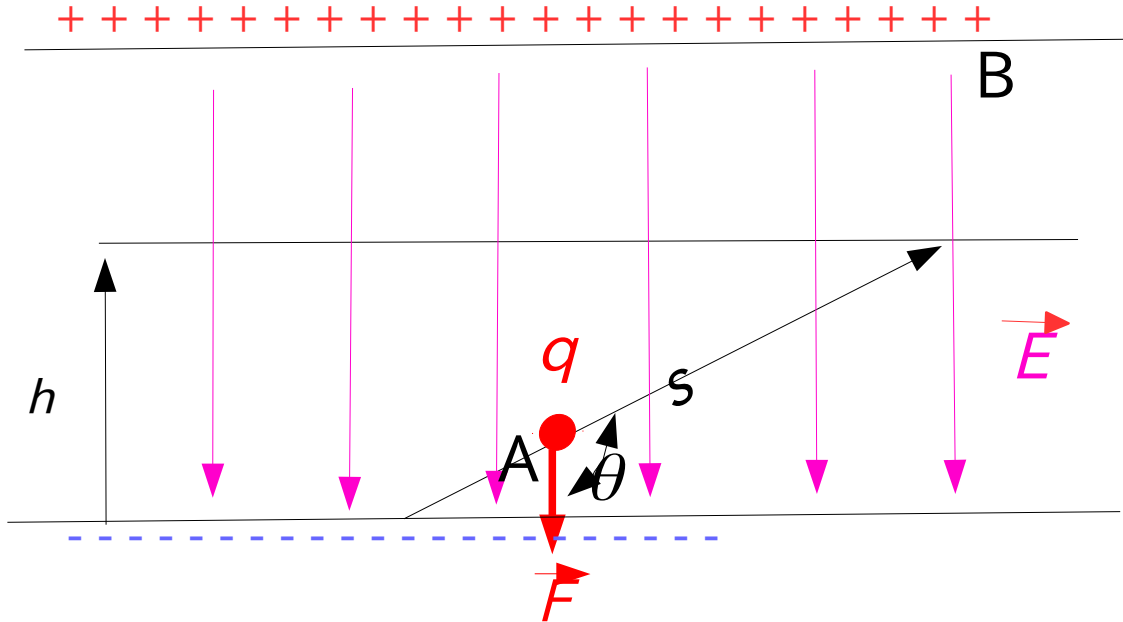
つまり、仕事は、動かす電荷の大きさと、 $E \cdot d (= V)$ の積で決まる。

$V \equiv E \cdot d$ を、二つの電極の電位差と呼ぶ。



等電位面

ある点からの電位差が一定である平面。コンデンサーの極板も等電位面である。



平行板コンデンサーの場合極板に平行な平面も等電位面

一の極板から、平行な平面へ電荷を移動させる時も、必要な仕事は、この平面までの距離 h を使って、

$$U = -\vec{F} \cdot \vec{s} = -q(\vec{E} \cdot \vec{s}) = q \cdot E \cdot h$$

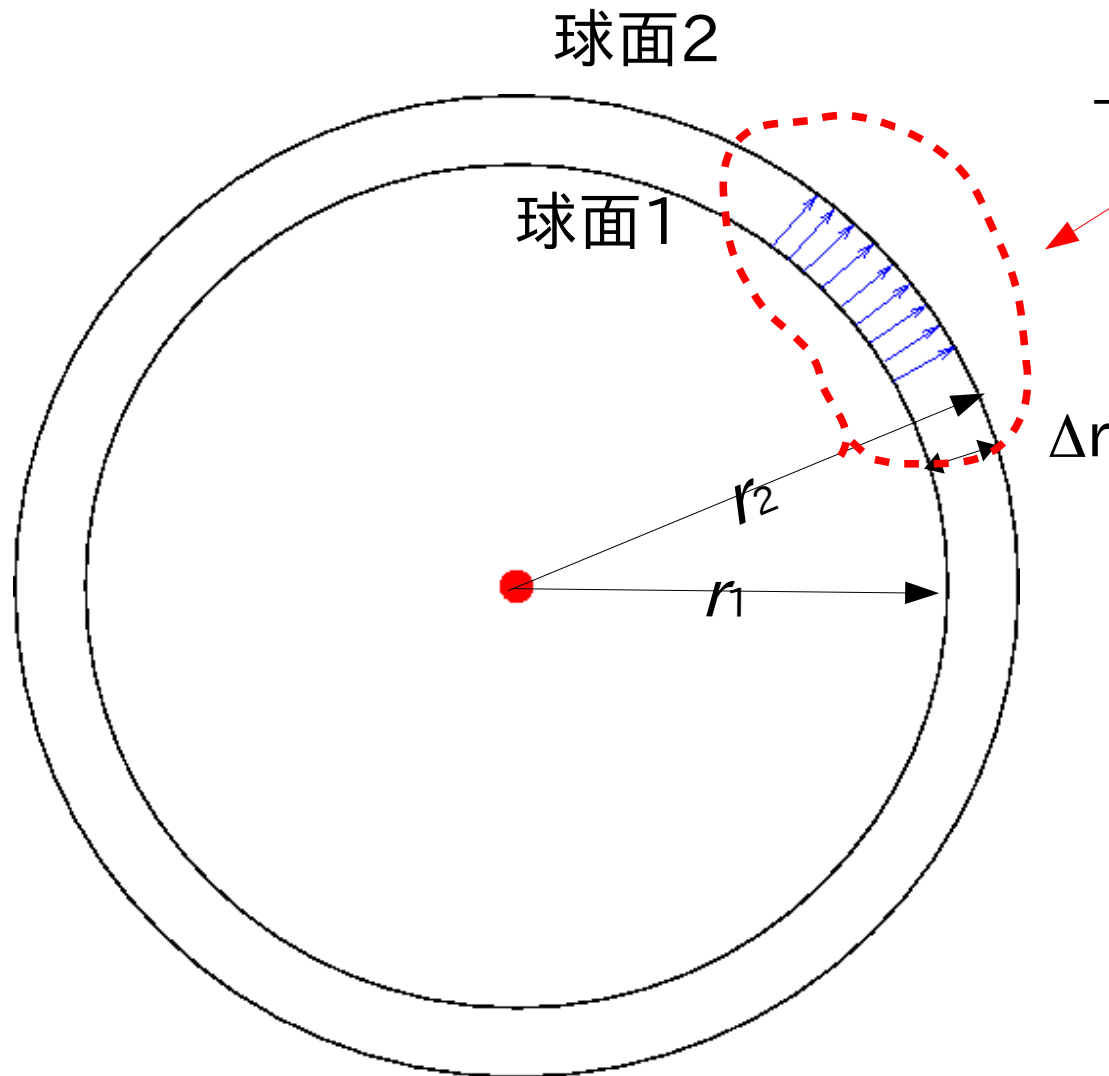
と書け、この平面の一極板からの電位差は $V = E \cdot h$ である。

qV : [電荷]x[電位差]は、電場の[位置エネルギー]

一個の電荷の作る電場(クーロン場)の電位

電荷を中心とした球対称性=>電荷を中心とする球面が等電位面

間隔の狭い2つの電荷を中心とする球面(等電位面)の電位差



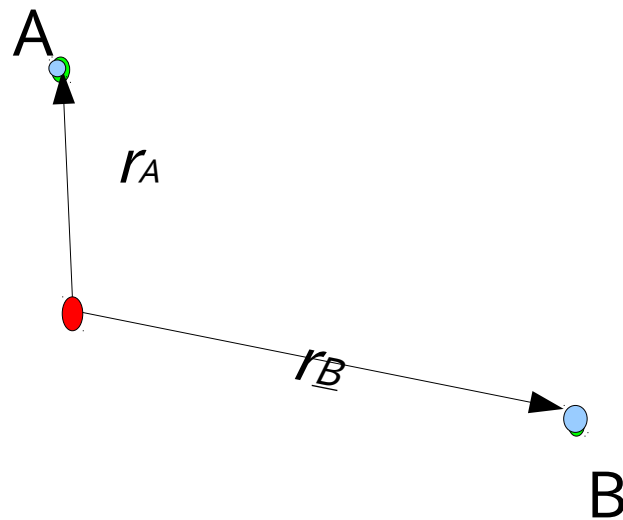
一様な電場を適用

球面1と球面2の電位差

$$\Delta V = -E \cdot \Delta r$$

$$\simeq -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \Delta r$$

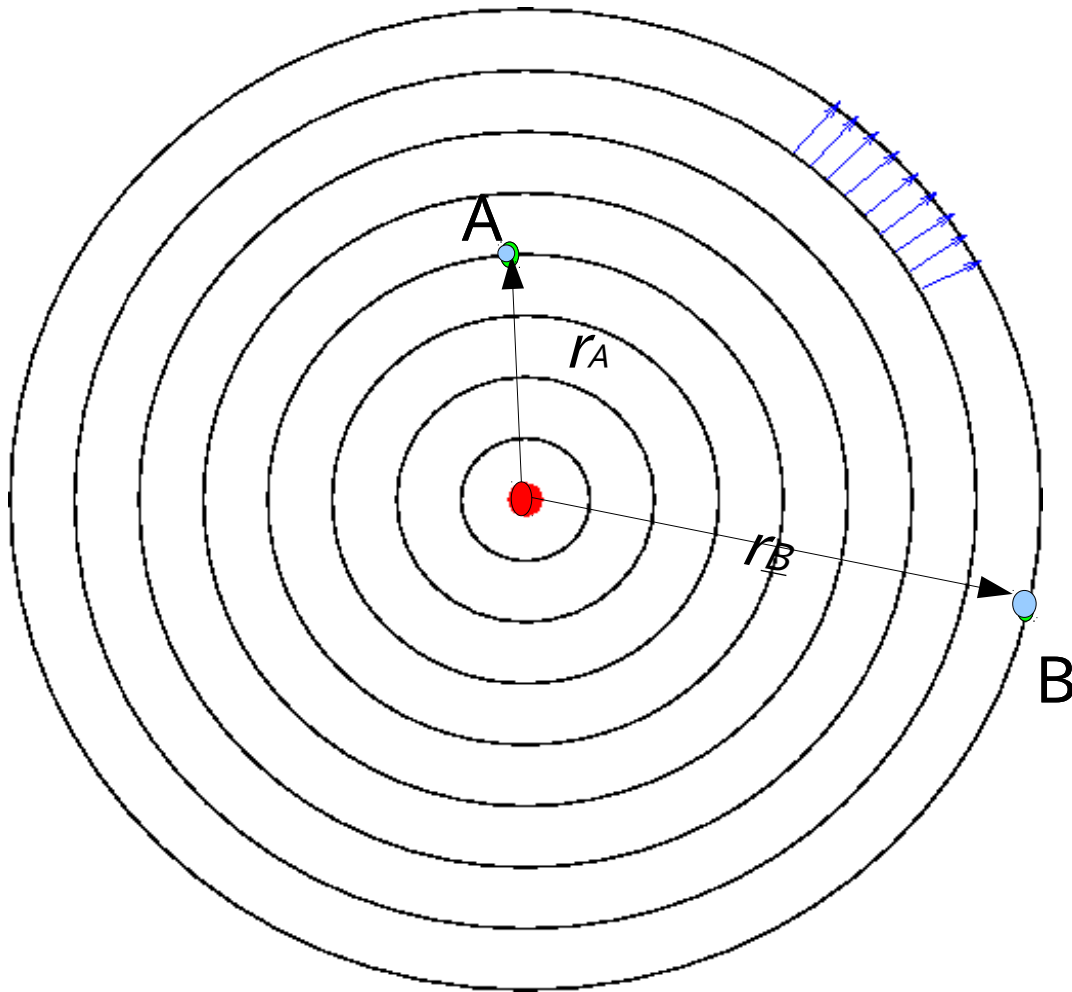
一個の電荷の作る電場(クーロン場)の電位差
任意の2点間(AとB)の電位差 ΔV



点A から 点B まで、

一個の電荷の作る電場(クーロン場)の電位差

任意の2点間(AとB)の電位差 ΔV



$r=r_A$ から $r=r_B$ まで、

$$\Delta V_i = -E_i \cdot \Delta r_i$$

$$\simeq -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \Delta r_i$$

を足し合わせる。

$$\Delta V_{AB} = \sum_i \Delta V_i \simeq -\sum_i \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_i^2} \Delta r_i \simeq -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr$$

結局 r_a と r_b の電位差は、

$$V_{A,B} = - \left[-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

と書ける。

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} + C(\text{定数}) \quad \text{と置くと、}$$

$$V_A(\vec{r}) = V(\vec{r}) - V(\vec{r}_A)$$

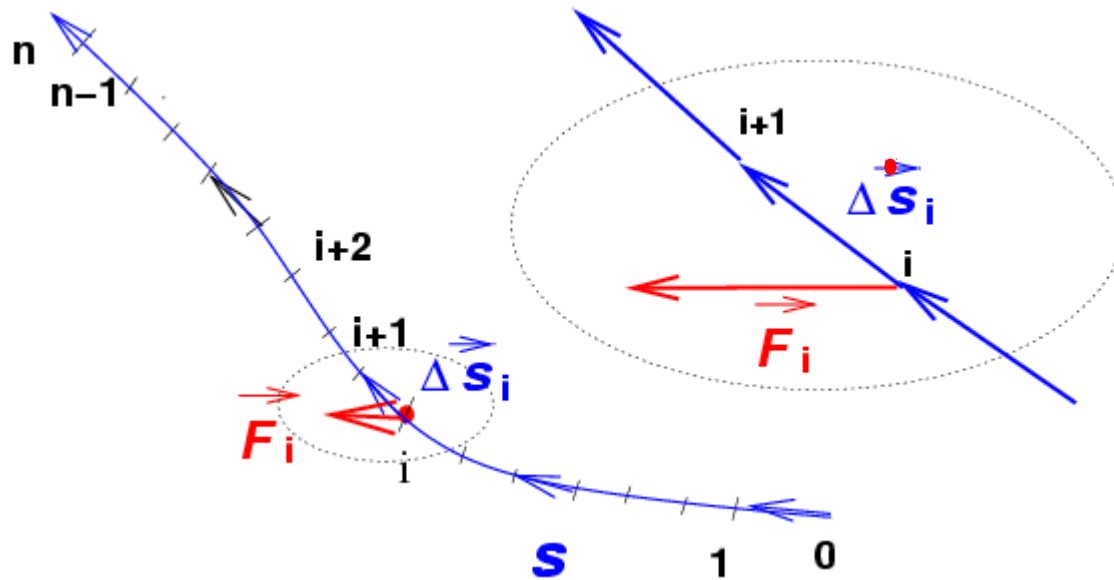
と、基準点をAとした、**電位**が定義できる。
なお、クーロン場では、無限遠を基準点として、

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

を、電位とすることができる。

注意、クーロン場以外では、いつも無限遠を基準と取れるわけでは無い

一般的な曲線にそって結ばれる2点の電位差
 => 分割して個々の電位差の和



$$V \simeq -(\vec{E}_0 \cdot \Delta \vec{s}_0 + \dots + \boxed{\vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i} + \dots + \vec{E}_n \cdot \Delta \vec{s}_n)$$

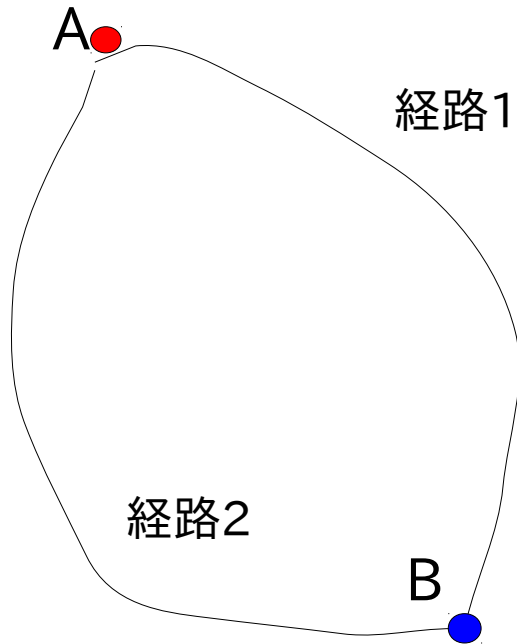
$$= -\sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i \simeq -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

曲線の分割上の仕事
 線を分割するから、**線積分**

\vec{r}_0 から \vec{r}_n まで、電荷 q を移動させるときの仕事は

$$U \simeq -q \cdot \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i \simeq -q \cdot \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

V_{AB} が一意的に計算できるためには、



$$\left[\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \right]_{\text{経路1}} = \left[\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \right]_{\text{経路2}}$$

$$\left[\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \right]_{\text{経路1}} = - \left[\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \right]_{\text{経路2(逆向き)}}$$

$$\left[\oint_B^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \right]_{\text{経路1から経路2(逆向き)}} = 0$$

つまり、

$$\oint_B^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

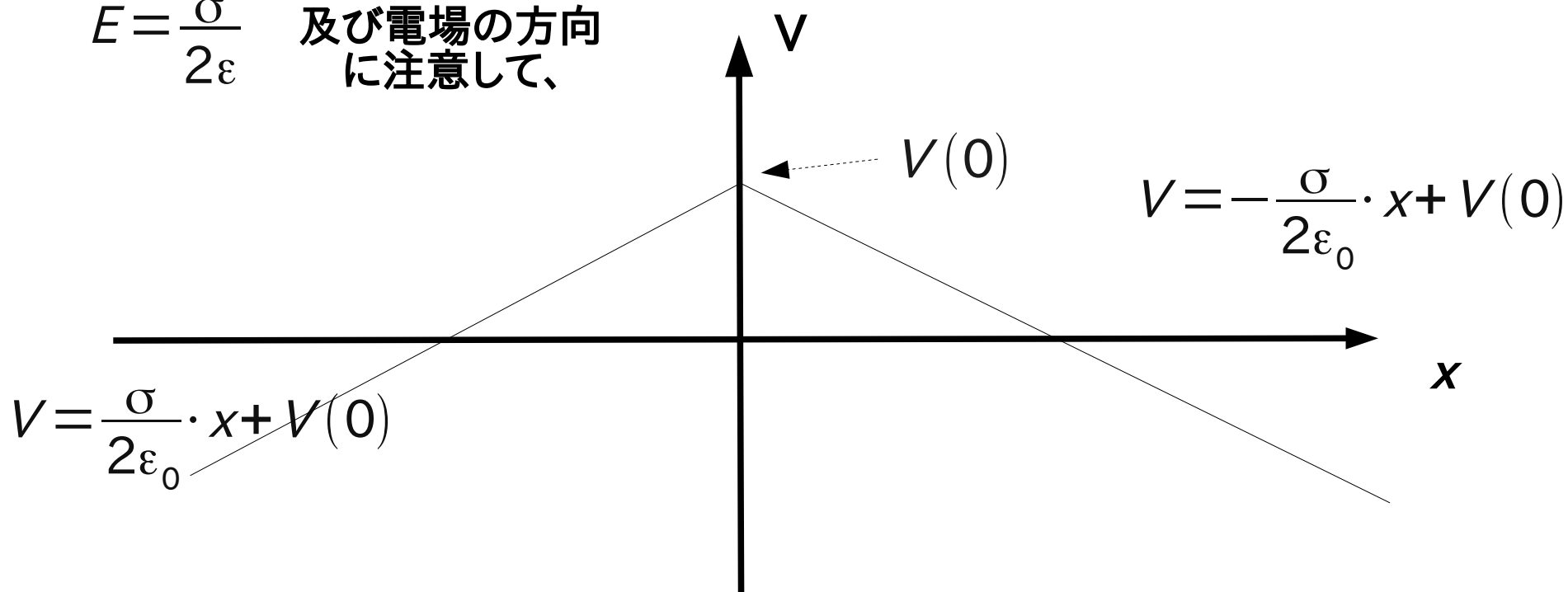
が必要十分条件

クーロン場はこれを満たしている。

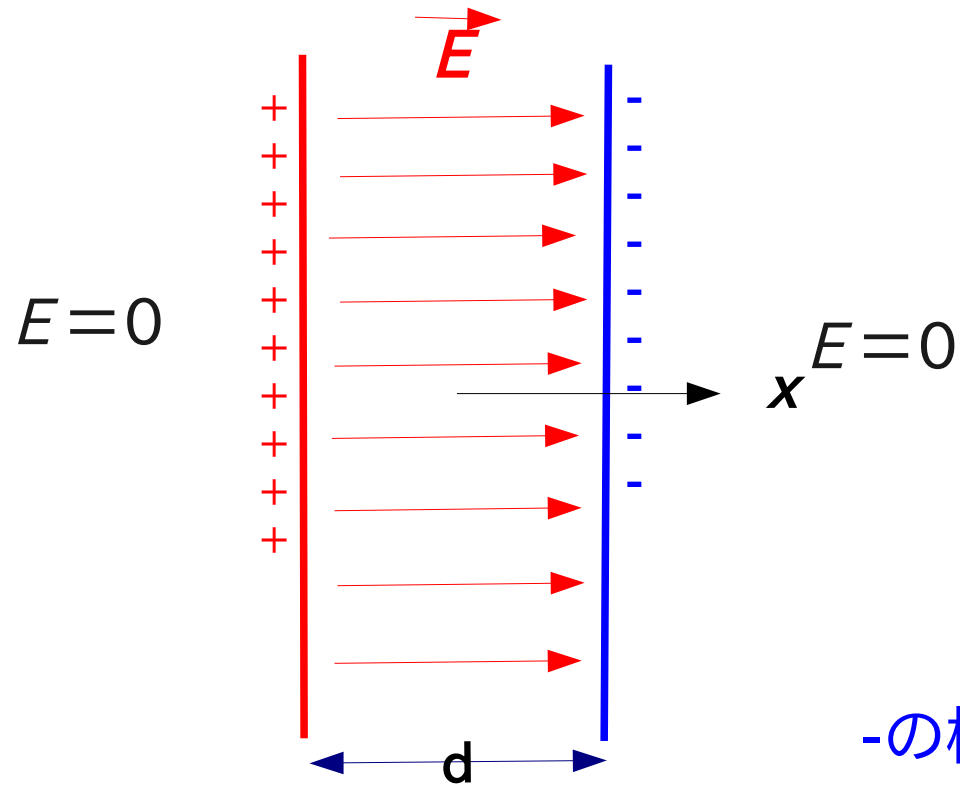
無限に広い平面に一様に電荷が分布する場合(電荷密度を σ とする)



$E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$ 及び電場の方向
に注意して、

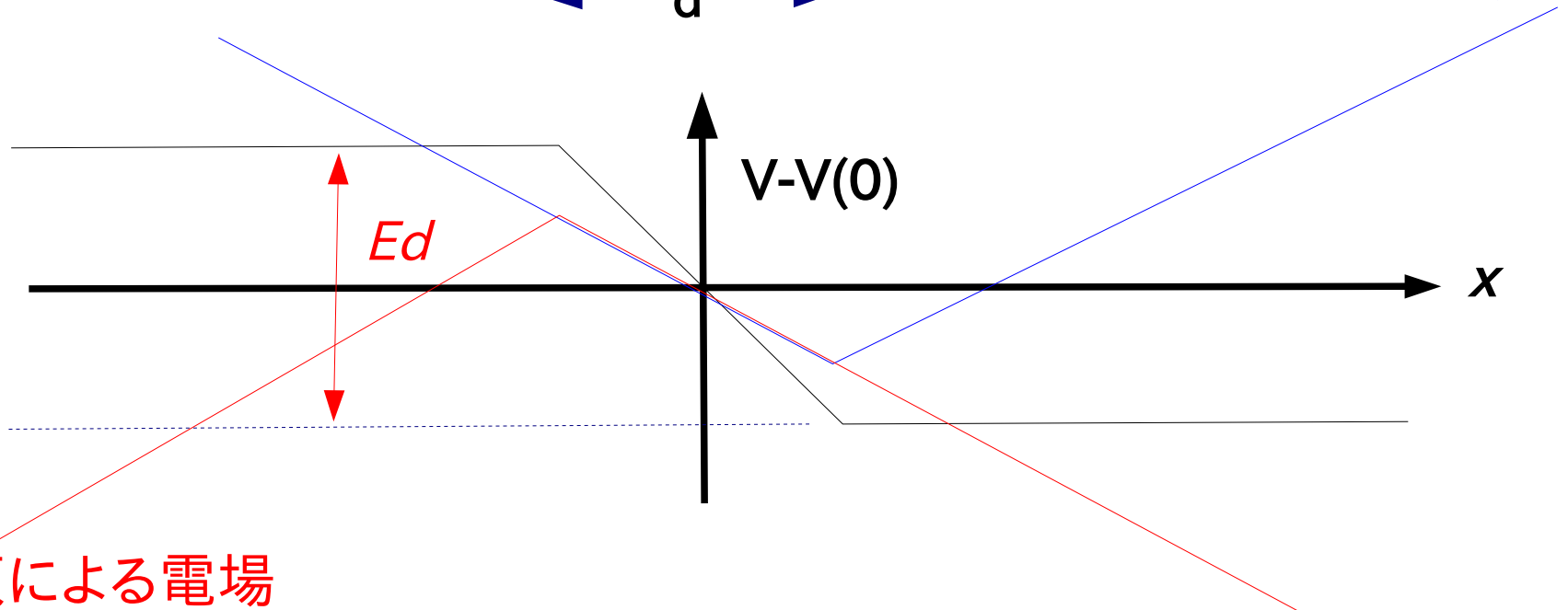


2枚の無限に広い平面に反対符号の電荷が一様に分布する場合
(それぞれの電荷密度を $\pm\sigma$ とする)



-の極板による電場

+と-の
合計



+の極板による電場

実際のコンデンサー

平行な二つの平面を極板と呼ぶ。面積 S 、極板上の電荷 Q それぞれが有限なので、極板の平均電荷密度 σ は、

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

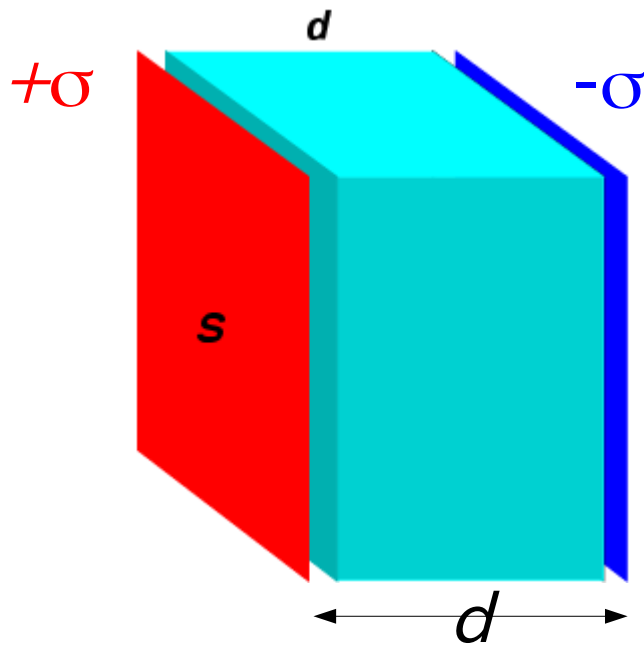
と計算できる。したがって、極板が無限に広い場合の関係式、

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

は、

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

と、実際のコンデンサーの場合の近似式として使える。



実際のコンデンサーで、電位差の近似式は、

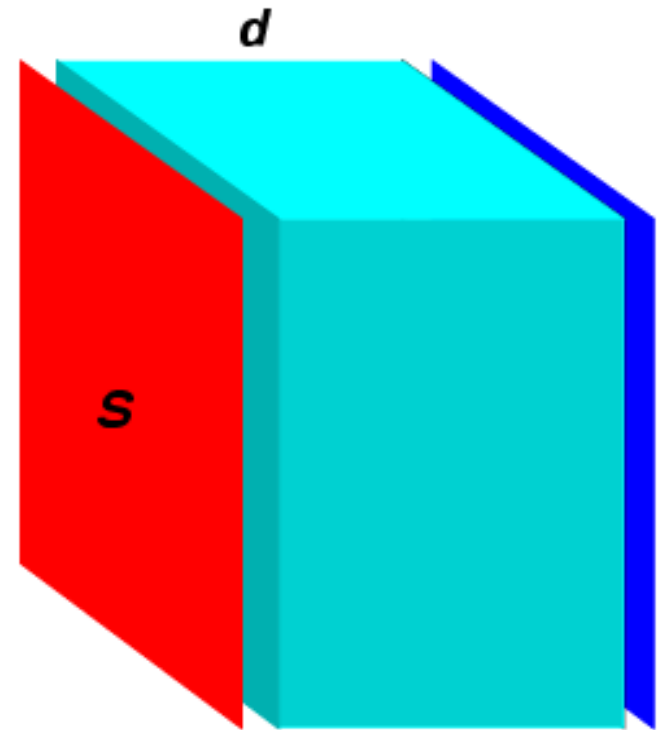
$$V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0 S} d \quad \text{となるが}$$

電荷と電位差の関係 $V = \frac{d}{\epsilon_0 S} Q$ を

$$Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} V \quad \text{と書いて、}$$

$$C \equiv \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{を、}$$

コンデンサーの容量と呼ぶ。



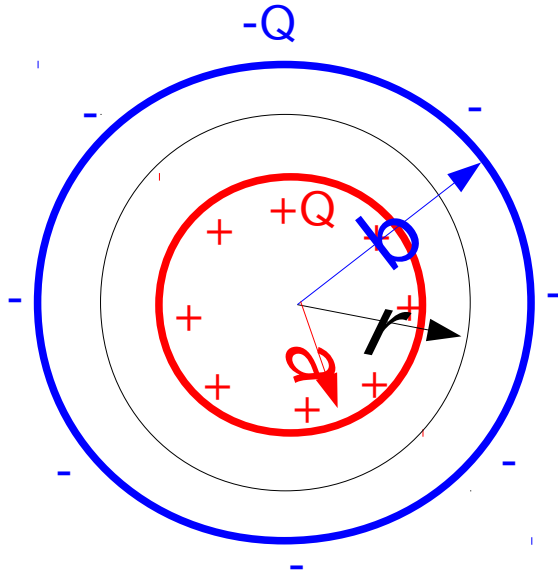
実際のコンデンサーは電荷を蓄える装置として利用される。
また、**思考実験**の装置としても、重要。

今日の問題。

球形コンデンサーの内側に+Q、外球に-Qを与えた場合、電場と電位は以下のようになる。コンデンサーの容量を求めよ。

球形コンデンサーの電場は、 r の関数として

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$



球形コンデンサーの電位は、 r の関数として

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} & (b < r) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & (a < r < b) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} & (r < a) \end{cases}$$

となる。

球形コンデンサー(理想的コンデンサー)

半径 a と b の球面を極板と考える。

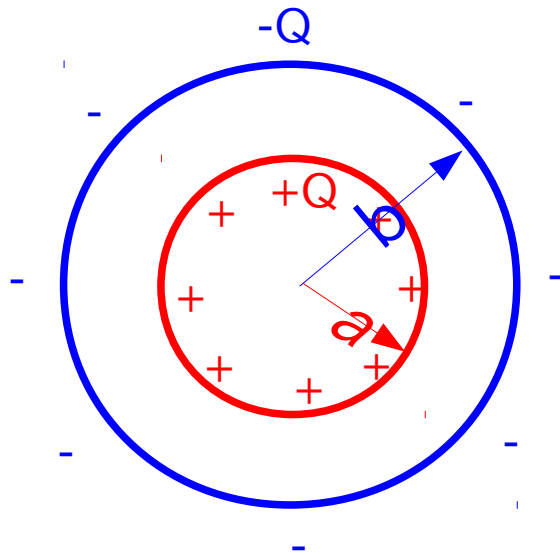
電場はこの極板の間 ($a < r < b$) に、だけ存在する。

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

極板間の電位差 (クーロン場の時と同様)

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

電気容量



$$Q = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} V \quad \text{より}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$