電磁気学基礎論

http://www.scimuseum.kita.osaka.jp/~saito/job/writing/rep/2001/seidenki.htm
から画像をコピーしました。

ファラデーから、マクスウェルへの手紙

数学者が物理的な作用の研究にたずさわり、ある結論に到達したとき、それは

普通の言葉を使っても、数式に劣らず不足なく、表現できないものでしょうか。

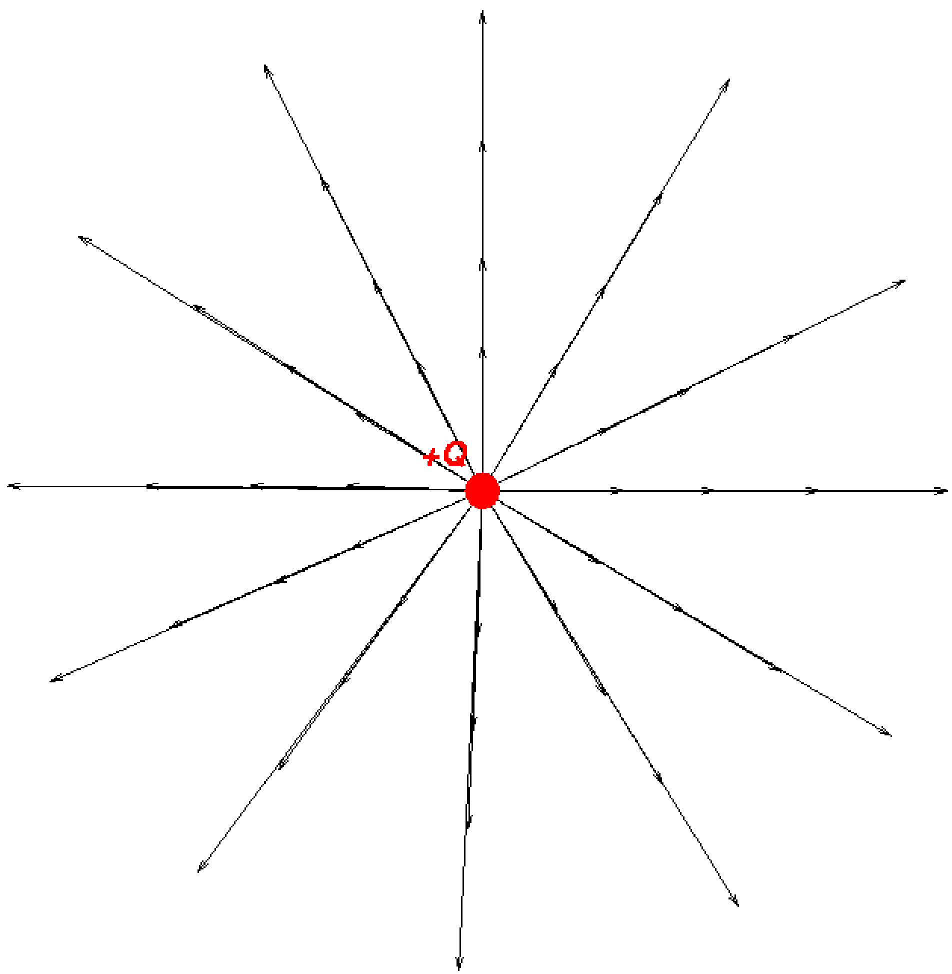
もし、そういう表現 つまり私たちも実験を通してその研究に参画できるように、

秘密の記号を翻訳した表現ができれば、私などには大変ありがたいのですが。

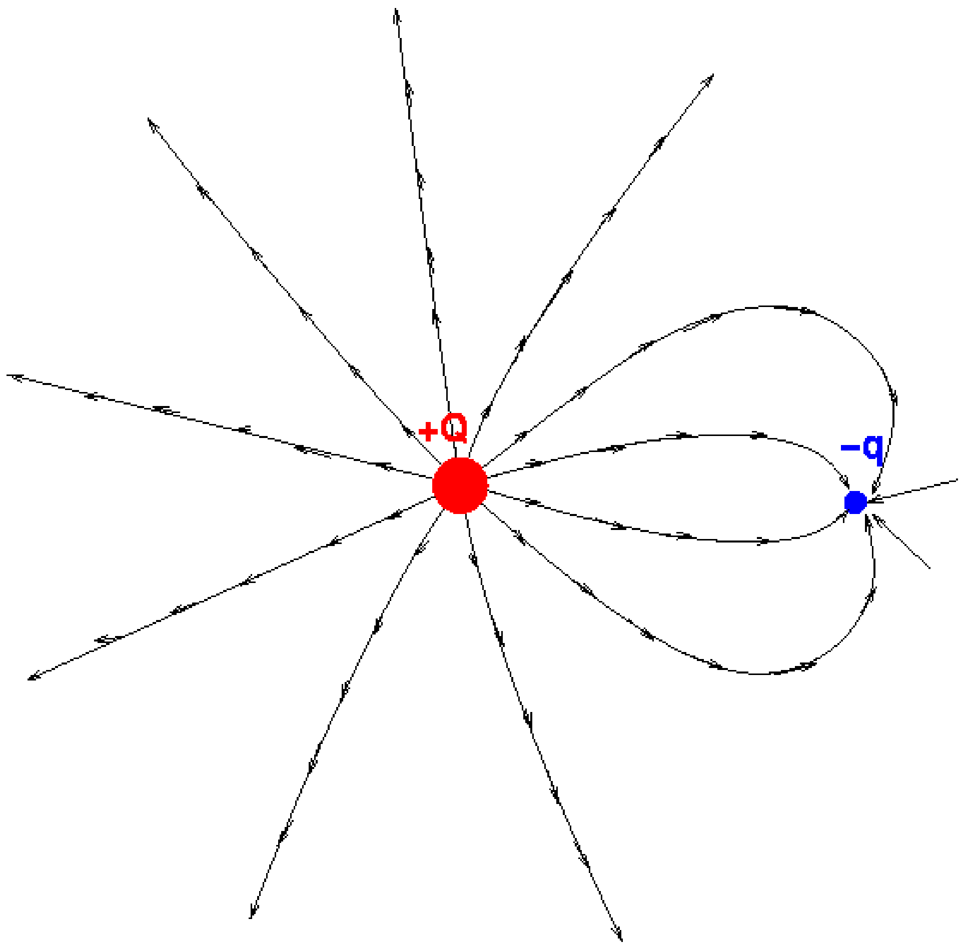
マクスウェルの答え＝電気力線と磁力線

この授業の出発点

電荷からは、電気力線が伸ている



単独の電荷の場合放射状に



複数の電場では配置によって曲線を描く

電気力線を用いて、電場を電気力線で表現する。

- 電気力線の密度は電場の強さに比例して、その比例定数は ε_0

電気力線の密度 = ε_0 × 電場の強さ

- 電気力線の伸びる方向は、電場ベクトルの方向と一致する。
- 電気力線は+の電荷から－の電荷まで、または無限遠まで伸びる。

（言い換えると電気力線は、+の電荷と－の電荷をつなぐ。）

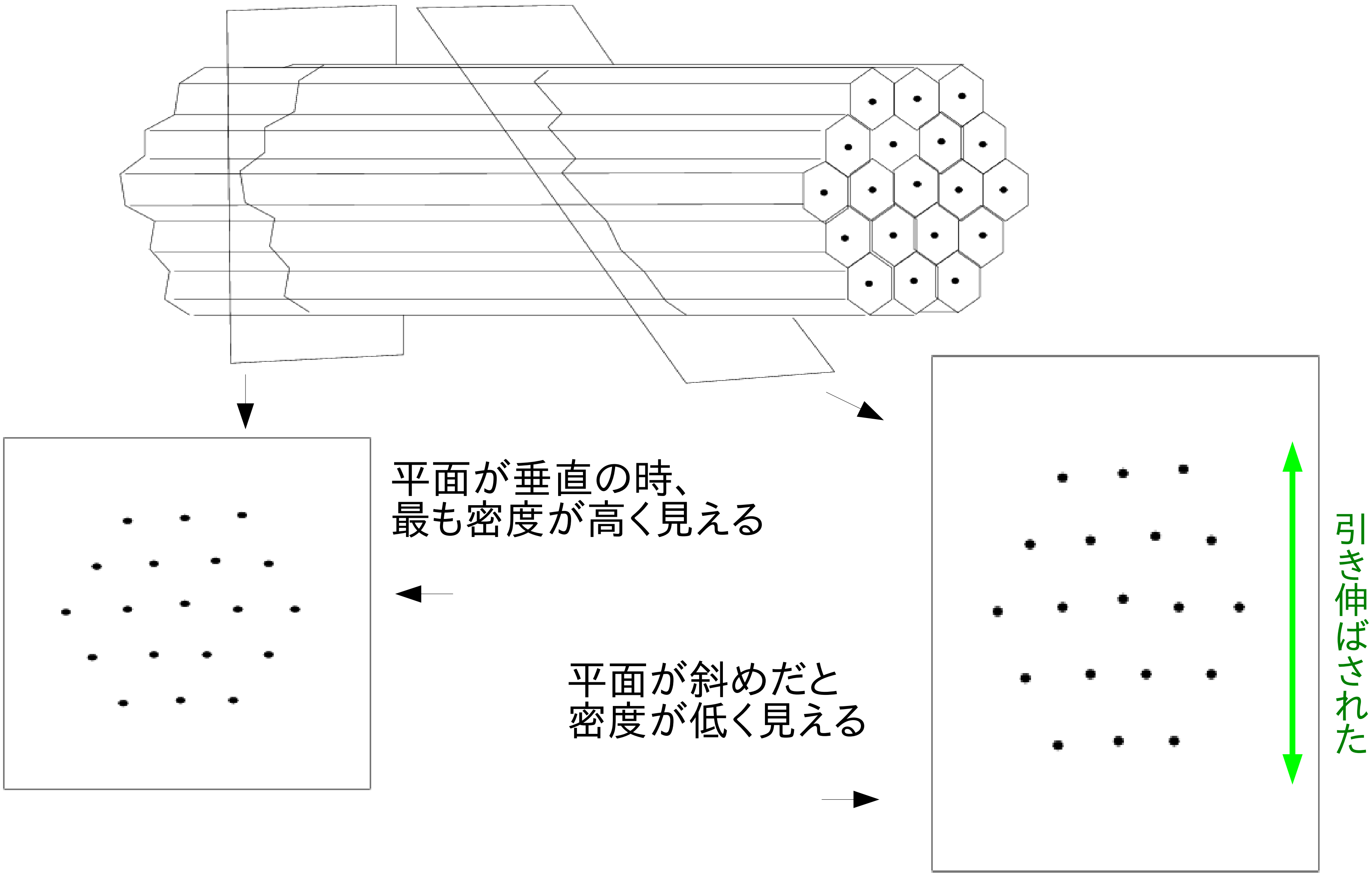
定量化のため

- 大きさ　$+Q$　の電荷からは　Q 本の電気力線が伸びている。

（線の数だから、整数のはずだが、実数で考える。その理由は、授業で）

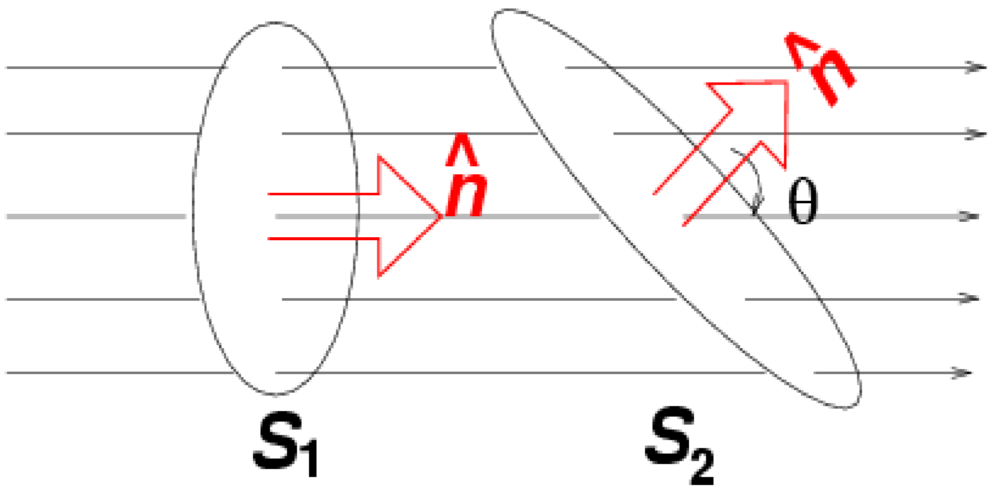
を用いて、電（磁）気学を始めよう。

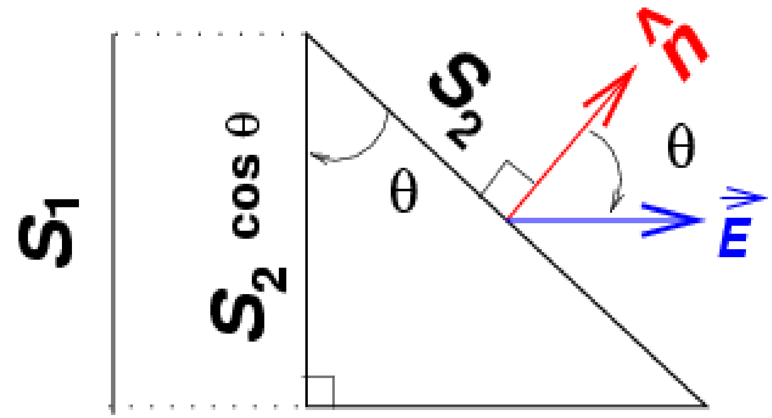
電気力線の数　＜==＞　電場の強さ



「電場の強さ」は切断面を通る本数と角度による補正で決まる

切る角度による補正 <=面積に cosθ を掛ける





$$\frac{N}{S_1}=\frac{N}{S_2\cos\theta}=\frac{N}{S_2\,\hat{n}\cdot\frac{\vec{E}}{E}}=\varepsilon_0 E$$ (電場の強さ)

内積で cosθ を作る

$$N=\varepsilon_0(\vec{E}\cdot\hat{n})S$$ 電場から、電気力線の数を求める方法

とりあえず、**電場に垂直な平面**に対し

$$N = \varepsilon_0 (\vec{E} \cdot \hat{n}) S$$

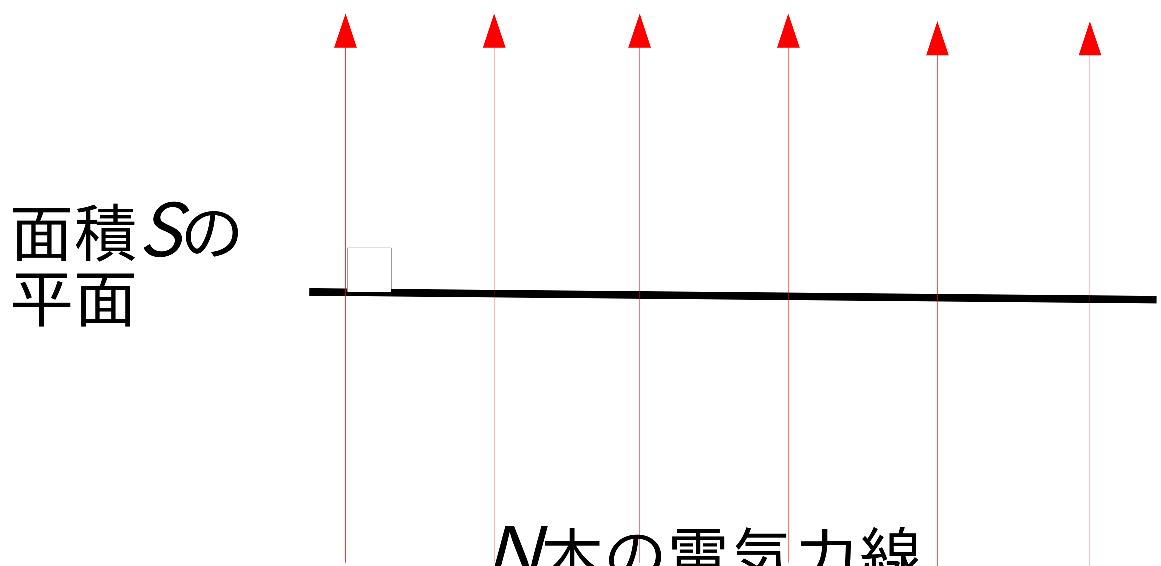
を、

$$\boxed{\cos\theta = 1 \rightarrow \hat{n} \cdot \vec{E} = E}$$

なので、

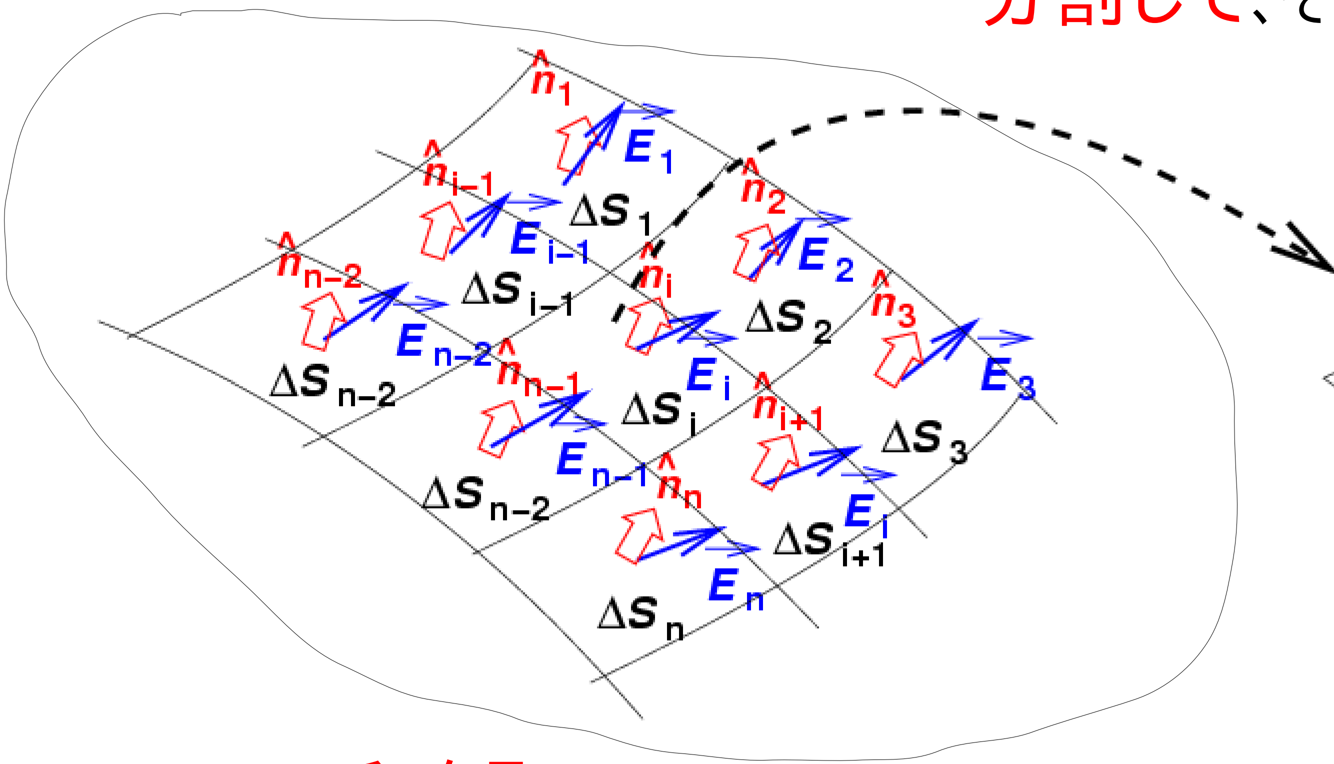
$$\boxed{N(\text{電気力線の数}) = \varepsilon_0(\text{定数}) \times E(\text{電場の強さ}) \times S(\text{面積})}$$

横から見ると、



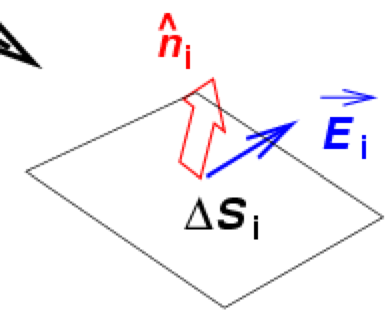
こんな感じ

一般的な曲面を通る電気力線を数える方法



分割して、それぞれの微小面積の上で

$$N_i = \varepsilon_0 \left(\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \right) \Delta S_i \text{（本）}$$



全体の和を取る

$$N = N_1 + \ldots + N_i + \ldots = \sum_i N_i = \varepsilon_0 \sum_i \left(\vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \right) \Delta S_i$$

形式的な積分の形に

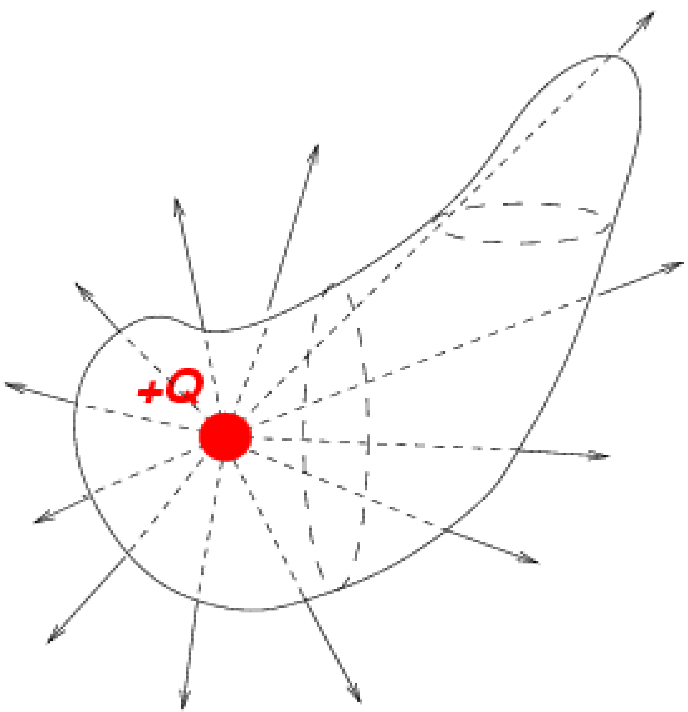
$$N = \varepsilon_0 \int_S \left(\vec{E} \cdot \hat{n} \right) dS$$

面でこの操作=＞面積分

電荷を中心とする球面を、任意の閉曲面に変えたら、

$\longrightarrow$ ガウスの法則

電荷が閉曲面の内側の場合、



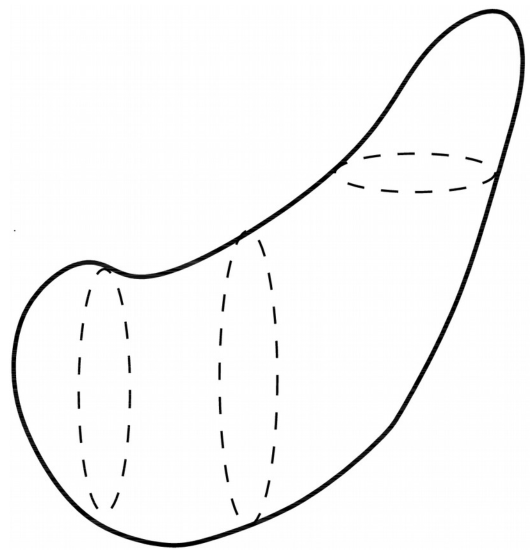
$$\varepsilon_0 \int_S \left(\vec{E} \cdot \hat{n}\right) dS = Q \ \left(= N\right)$$

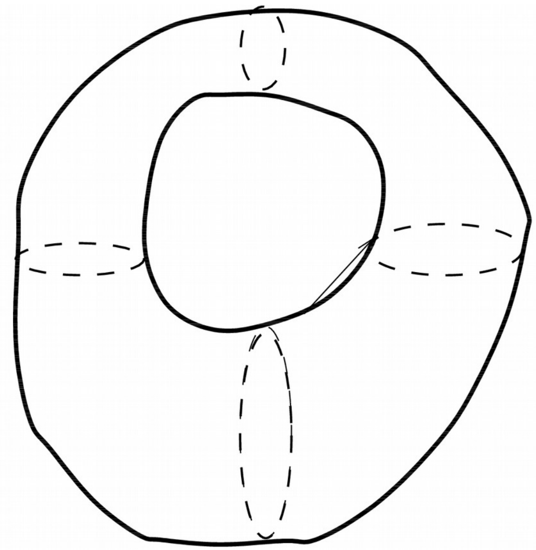
電荷から伸びる
電気力線の総数

注1、閉曲面とは、縁の無い閉じた曲面の事。

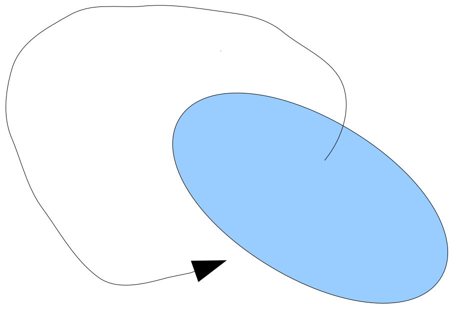
注2、$\hat{n}$:通常外向き、つまり、内から外の方向

もう少し、閉曲面について



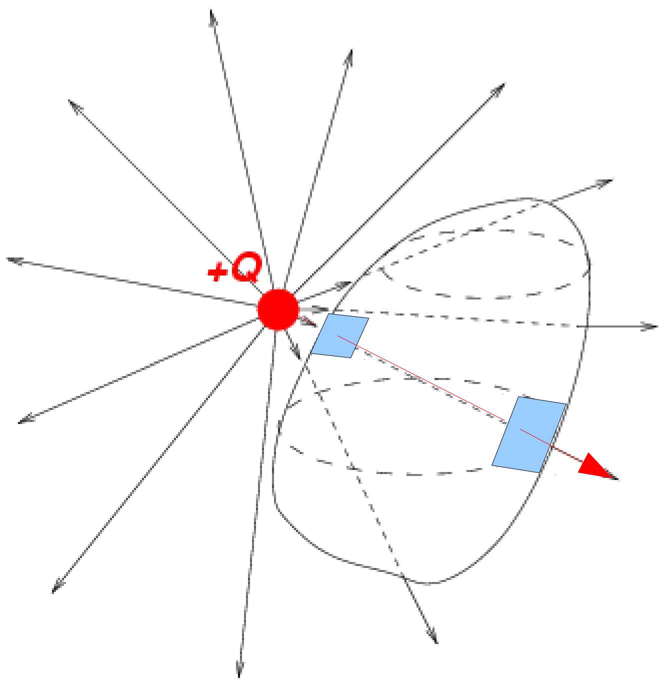


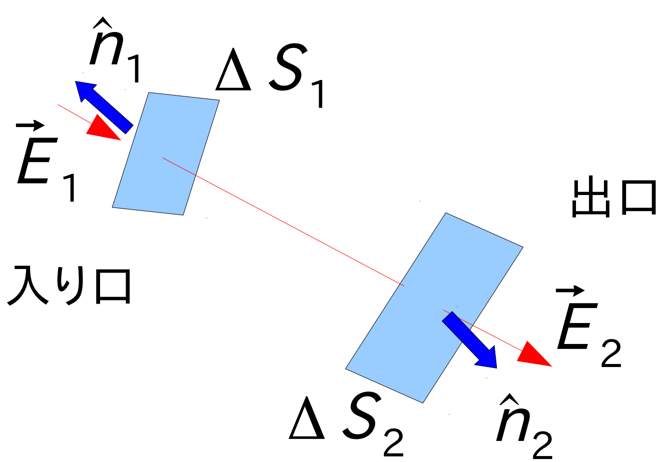
1. この面には、縁(へり)が無い。
2. この面は、内側と外側を区別する。
3. 物体(3次元の)の表面は閉曲面である。



反対語は、開曲面
1. 縁のある曲面。
2. 曲面を通らず、曲面の両側を結ぶことができる。
3. 閉曲面の一部分を取り出すと、開曲面。

電荷が閉曲面の外側の場合





一本の電気力線が、閉曲面に入る点と出る点に注目。
それぞれ大きさは1(本)だが、計算するときは、

$$\left(\vec{E}_1\cdot\hat{n}_i\right)\Delta S_{1,}\quad\left(\vec{E}_2\cdot\hat{n}_2\right)\Delta S_2 \qquad \ldots(1)$$

しかし、$\hat{n}$ の向きを考えると

$$\vec{E}_1\cdot\hat{n}_1<0,\quad \vec{E}_2\cdot\hat{n}_2>0$$

$\Delta S_{1,}\ \Delta S_2$ は面積なので、負にはならない。

つまり、計算式のそれぞれの**大きさは1**に等しいが、
負と正であり、**電気力線が面を通過する方向により、**
+、ーの符号がつく。加えれば、

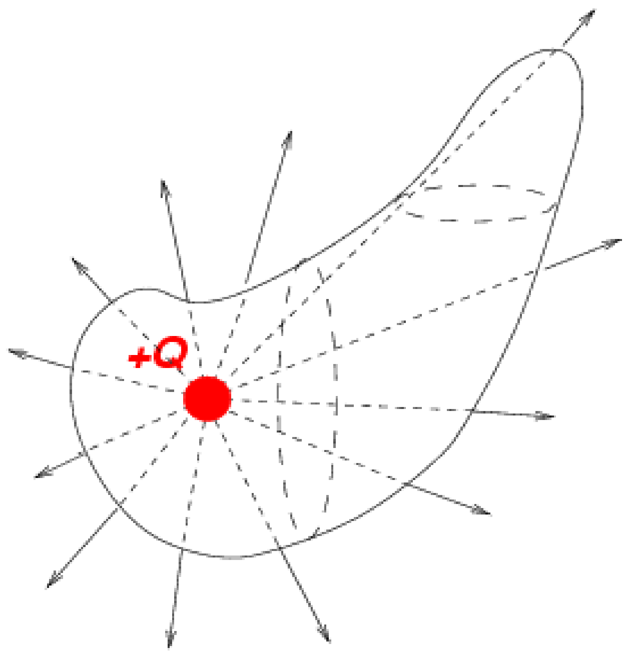
閉曲面全体で合計しても、

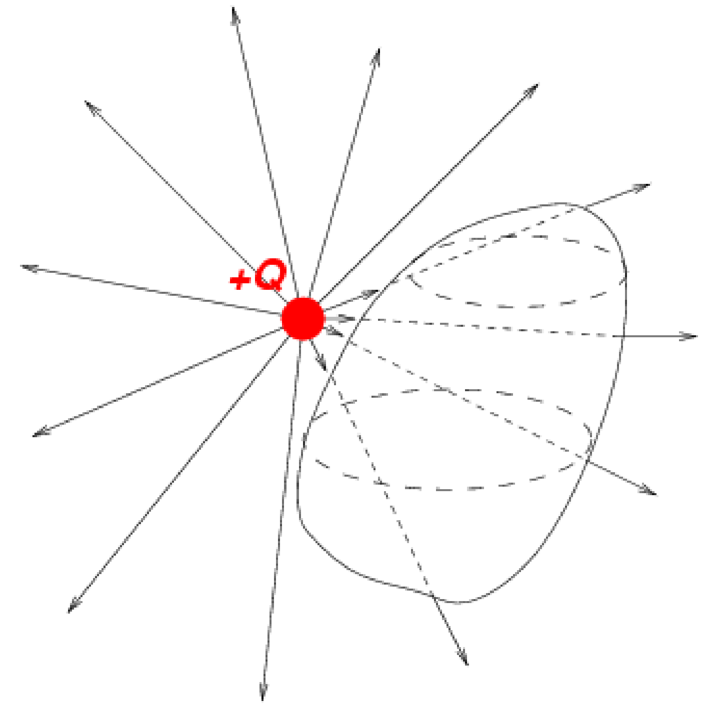
$$\left(\vec{E}_1\cdot\hat{n}_i\right)\Delta S_1+\left(\vec{E}_2\cdot\hat{n}_2\right)\Delta S_2=0$$

となる。

$$\int_S\left(\vec{E}\cdot\hat{n}\right)dS=0$$

ガウスの法則まとめ





電荷が閉曲面の内側の場合、

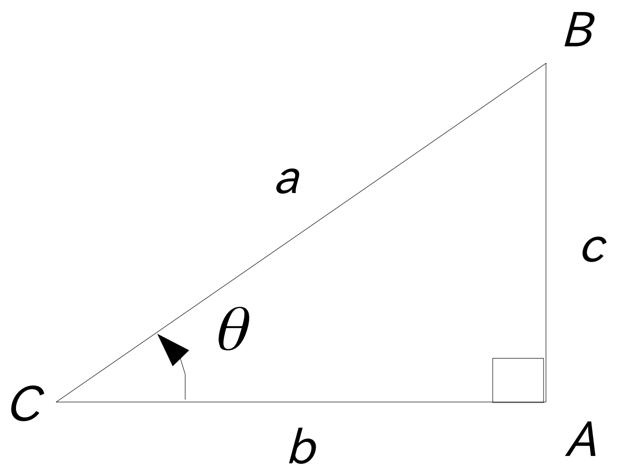
$$\varepsilon_0 \int_S \left(\vec{E} \cdot \hat{n} \right) dS = Q$$

電荷が閉曲面の外側の場合

$$\varepsilon_0 \int_S \left(\vec{E} \cdot \hat{n} \right) dS = 0$$

必要になる、高校で学んだ**数学的基礎**。ともかく覚えて使ってしまおう。

三角関数

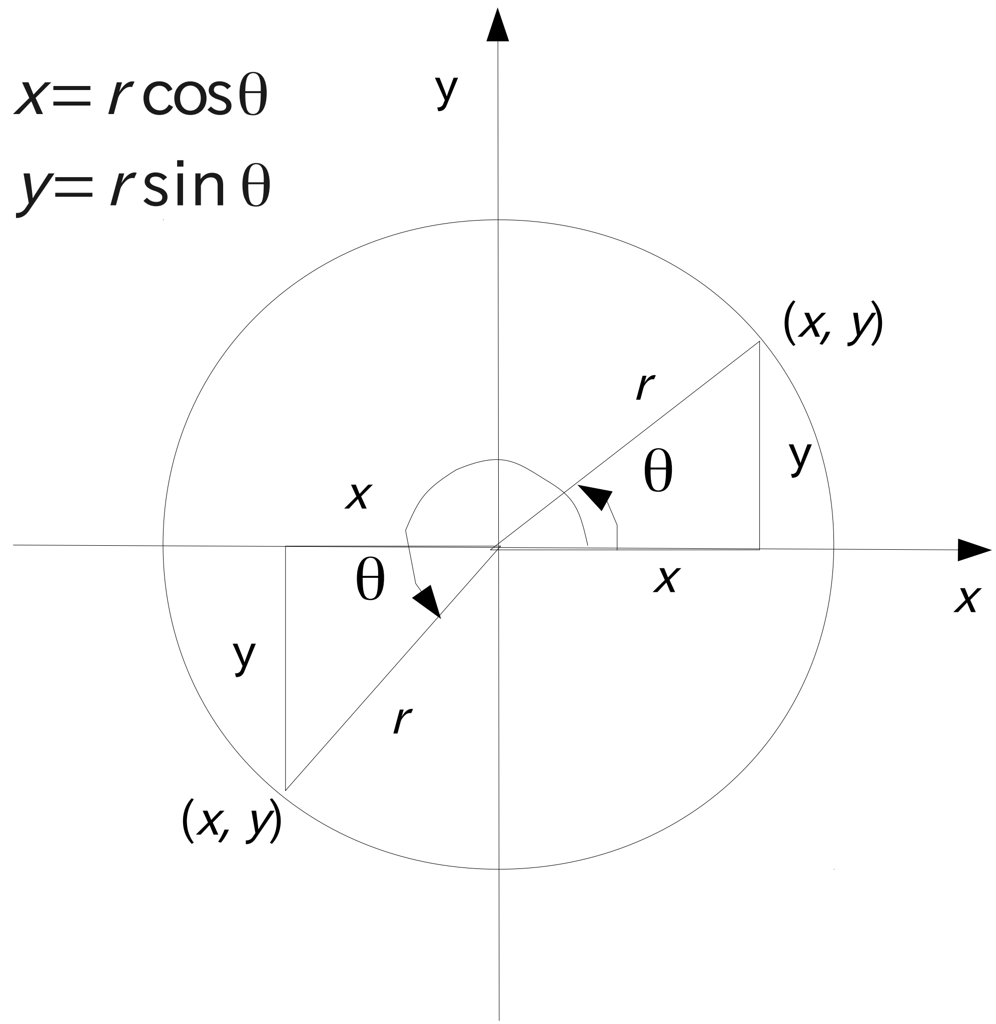


$$\sin\theta = \frac{c}{a} \quad \cos\theta = \frac{b}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{c}{b} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

半径*r*の円を考え、座標軸と関連させると便利

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

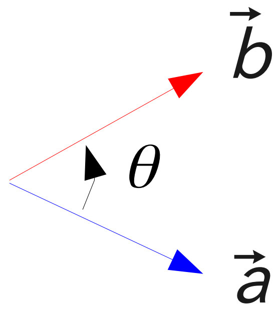


つまり、下のように書ける。

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

ベクトル：方向と大きさを持った概念。

i、角度と長さで表す。
ベクトルが2つある時、両者の成す角は内積と関係する。



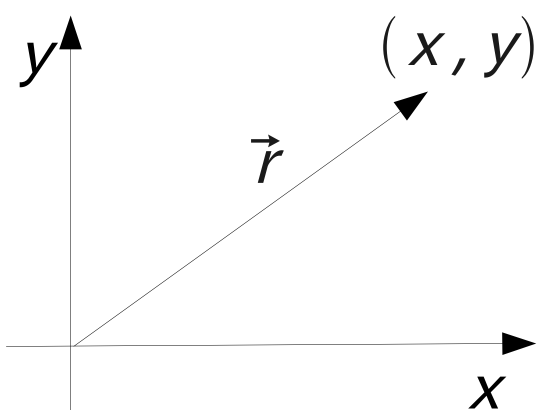
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos\theta$$

($a=|\vec{a}|,\ b=|\vec{b}|$ を、暗黙の了解とする。)

特に、$a\neq 0,\ b\neq 0$ の時、
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であれば、 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\quad\left(\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}\right)$
が平行であれば、 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\quad(\theta=0)$

ii、座標軸を仮定し、成分で $\vec{r}=(x,y)$ のように表すこともある。 (例：位置ベクトル)

$\vec{a}=(a_x,a_y)$ 、 $\vec{b}=(b_x,b_y)$ とすると、



内積は、

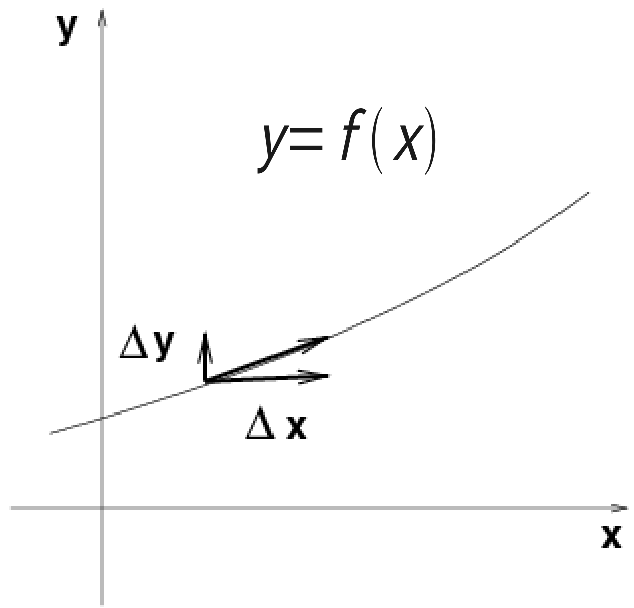
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y$$

と計算できる。

物理でつかう微分と積分

微分　　数学的には極限操作

$$f'(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0)$$



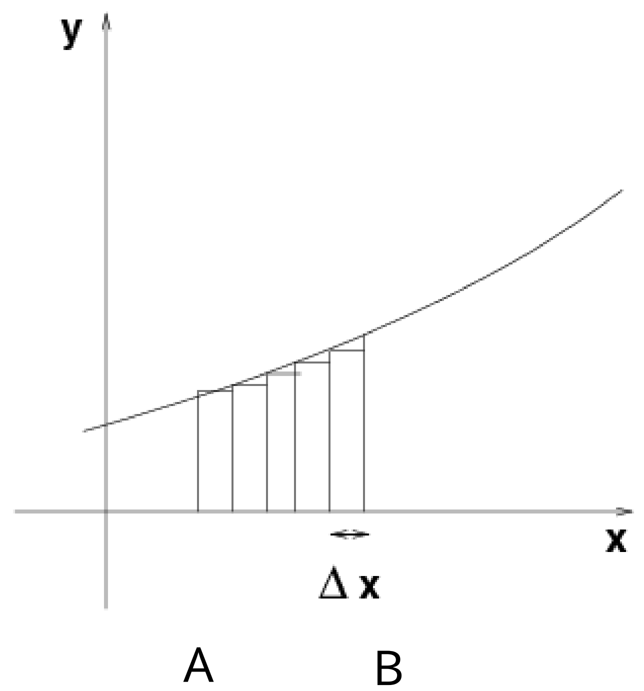
物理では、

$$\frac{dy}{dx} \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

小さい量の比(割り算)。

積分

$$\int_A^B f(x)\,dx \simeq \boxed{\sum_i f(x_i)\Delta x_i}$$



物理では、小さく分割した上で、足し合わす。

簡単な例で、分割した和と積分の比較

関数　$y = a \cdot x$ と、　x軸、　$x = X$　で囲まれた面積を求める。

分割で、

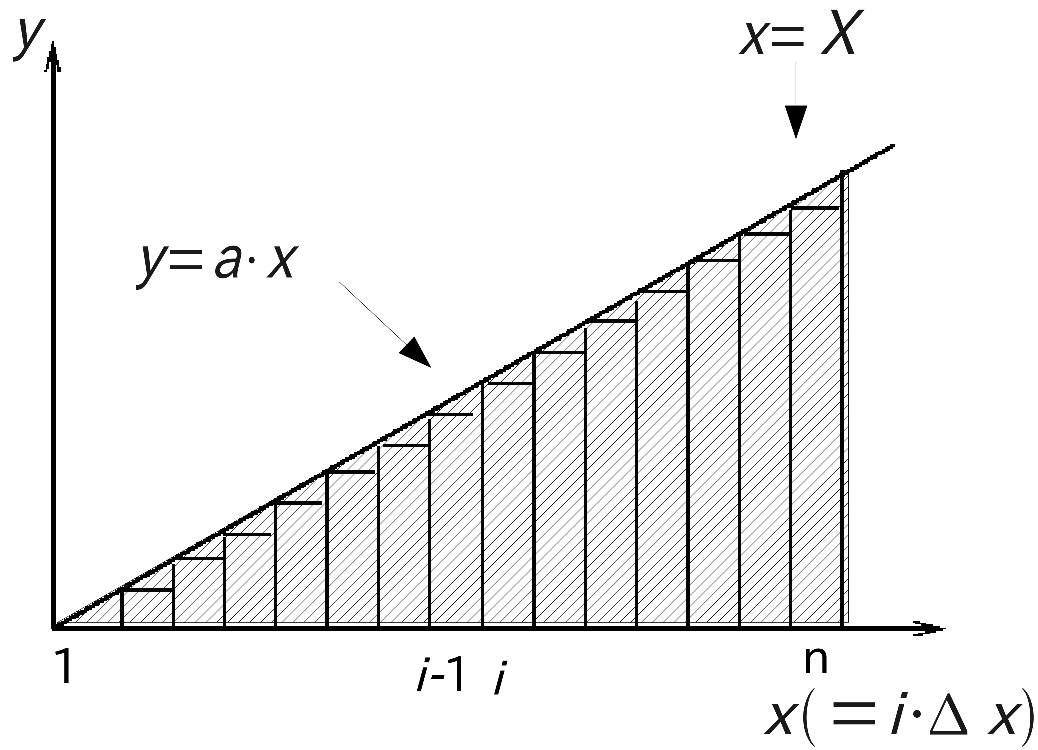
$$I_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \Delta x = \sum_{i=1}^{n} (i-1) \Delta x^2$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \Delta x^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{X}{n} \right)$$

ただし、$\Delta x = \dfrac{X}{n}$ とおいた。

積分では、

$$I = \int_0^X x\,dx = \frac{1}{2} x^2$$



両者の差は、$\dfrac{X}{n}$ であり、nを大きくとると**いくらでも**その差を小さくできる。
（これが数学の極限の意味）

初等関数の、微分、不定積分の例

$$\frac{d\,x^n}{dx}=n\,x^{n-1}$$

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}+C\quad(n\neq 1)$$

$$\frac{d\sin(ax)}{dx}=a\cos(ax)$$

$$\int \sin(ax)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax)+c$$

$$\frac{d\cos(ax)}{dx}=-a\sin(ax)$$

$$\int \cos(ax)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax)+c$$

$$\frac{d\,e^{ax}}{dx}=a\,e^{ax}$$

$$\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}\,e^{ax}+C$$

$$\frac{d\log_e(x)}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx=\log_e|x|+C$$

以上が基礎となる微分、積分の公式であり、このぐらい知っていれば十分

http://
www.scat120.com/