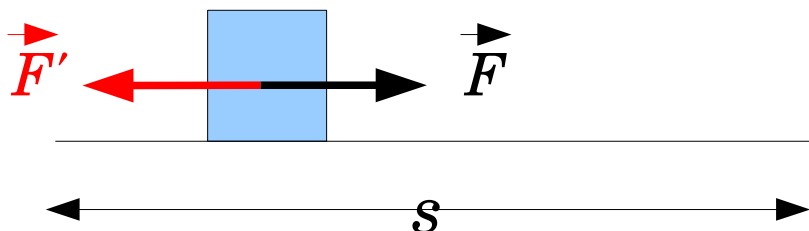


電場による仕事

力と仕事の復習

仕事の定義: $U = F \cdot s$

[仕事] = [移動をなすための力] · [移動した距離]
= - [移動を妨げる力] · [移動した距離]



力の方向と移動する方向が一直線上に無い時は、ベクトルで

$$U = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

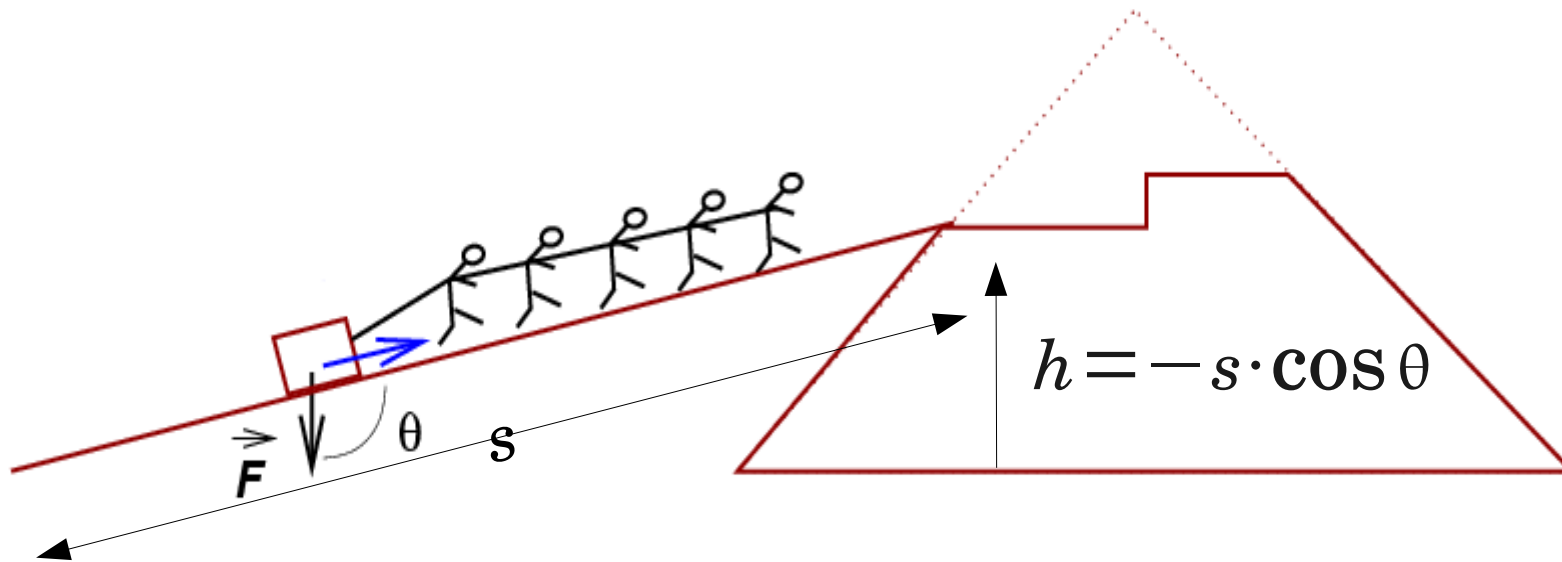
$$U = -\vec{F} \cdot \vec{S} \quad (\vec{F} \text{ が移動を妨げる力の場合})$$

重力による力と仕事

物を持ち上げるために必要な仕事は、持ち上げる高さに比例する

$$U = -F_g \cdot s \cdot \cos \theta = -\vec{F}_g \cdot \vec{s}$$

重力は下向き、かつ θ は重力と力のなす角



注意、内積で書く時は、符号に注意。

必要な力は重力と反対向き \Rightarrow 重力に“-”符号が付く。

コンデンサーの極板間の電位差

2つの平面が距離 d 離れて平行に置かれ、コンデンサーの電極を成している。

それぞれ電荷密度 $+\sigma, -\sigma$ が与えられている時、その平面の間の空間には、2つの平面に垂直で、+の電極から-の電極へ向かい

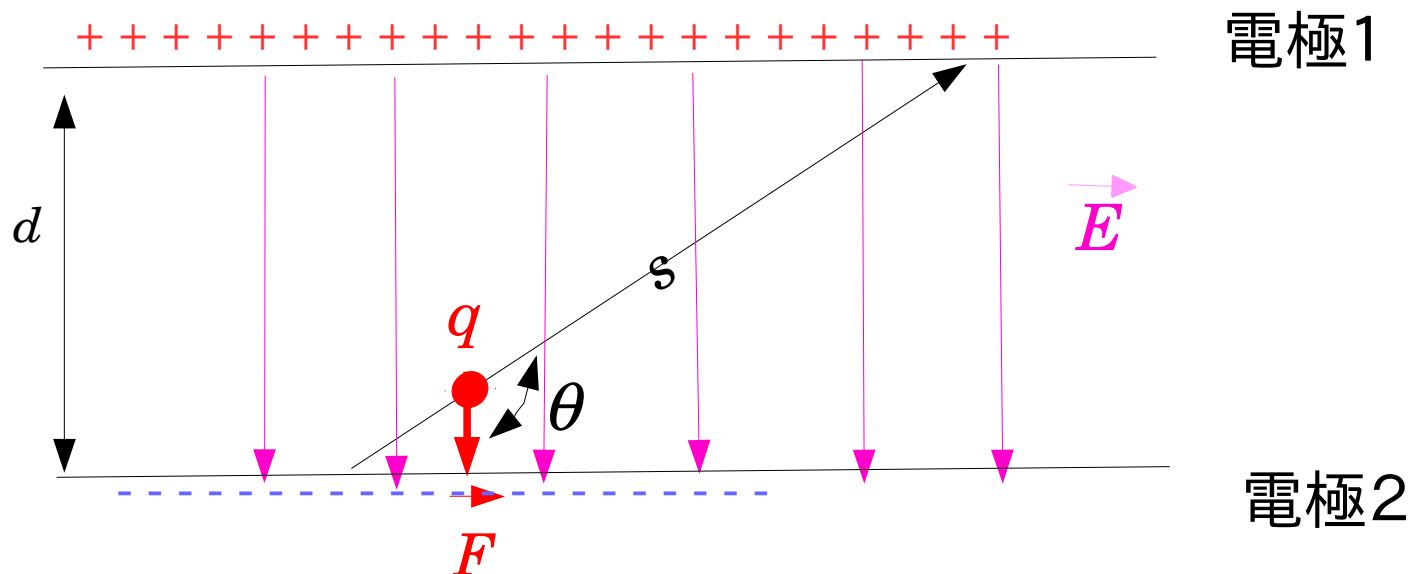
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

の大きさの電場ができる。その中で、 $+q$ の電荷を一の極板から、+の極板まで移動させるのに必要な仕事は、

$$U = -\vec{F} \cdot \vec{s} = -q(\vec{E} \cdot \vec{s}) = q \cdot E \cdot d$$

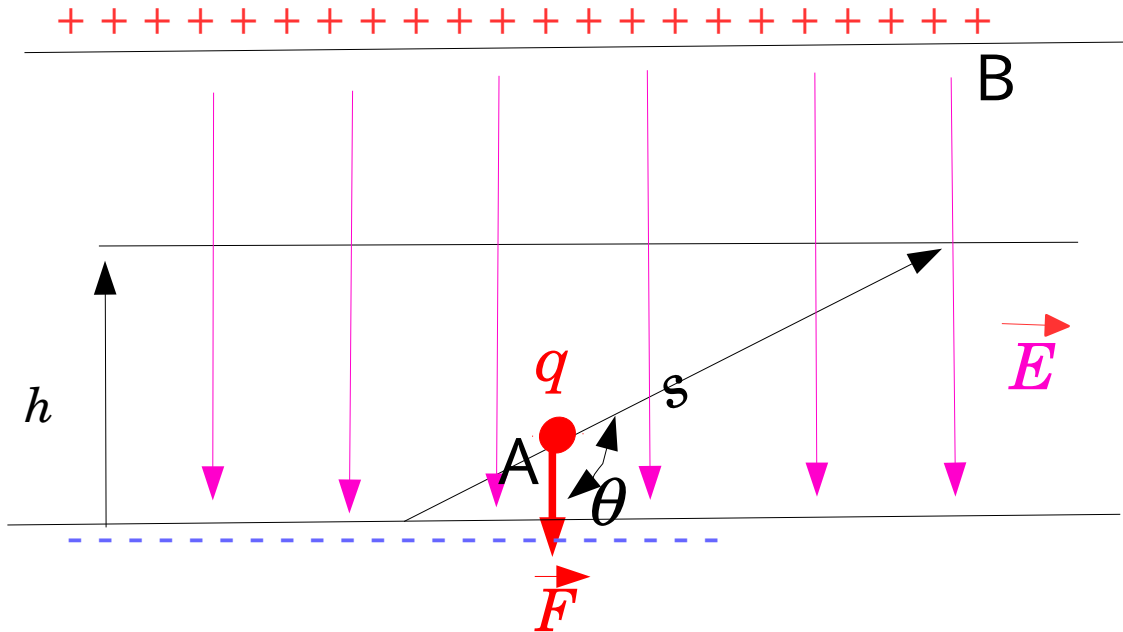
つまり、仕事は、動かす電荷の大きさと、 $E \cdot d (=V)$ の積で決まる。

$V \equiv E \cdot d$ を、二つの電極の電位差と呼ぶ。



等電位面

ある点からの電位差が一定である平面。コンデンサーの極板も等電位面である。



平行板コンデンサーの場合極板に平行な平面も等電位面

一の極板から、平行な平面へ電荷を移動させる時も、必要な仕事は、この平面までの距離 h を使って、

$$U = -\vec{F} \cdot \vec{s} = -q(\vec{E} \cdot \vec{s}) = q \cdot E \cdot h$$

と書け、この平面の一極板からの電位差は $V = E \cdot h$ である。

qV : [電荷] \times [電位差]は、電場の[位置エネルギー]

実際のコンデンサーで、電位差の近似式は、

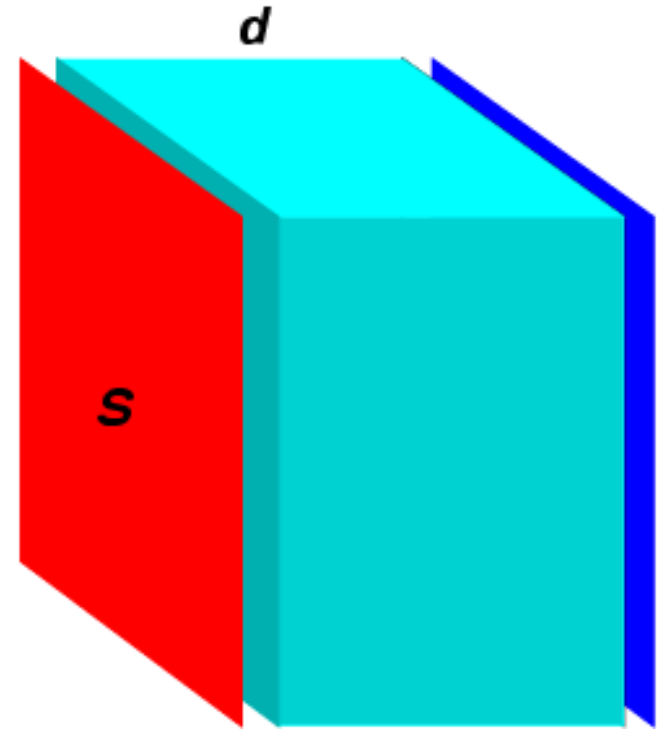
$$V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0 S} d \quad \text{となるが}$$

電荷と電位差の関係 $V = \frac{d}{\epsilon_0 S} Q$ を

$$Q = \frac{\epsilon_0 S}{d} V \quad \text{と書いて、}$$

$$C \equiv \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad \text{を、}$$

コンデンサーの容量と呼ぶ。

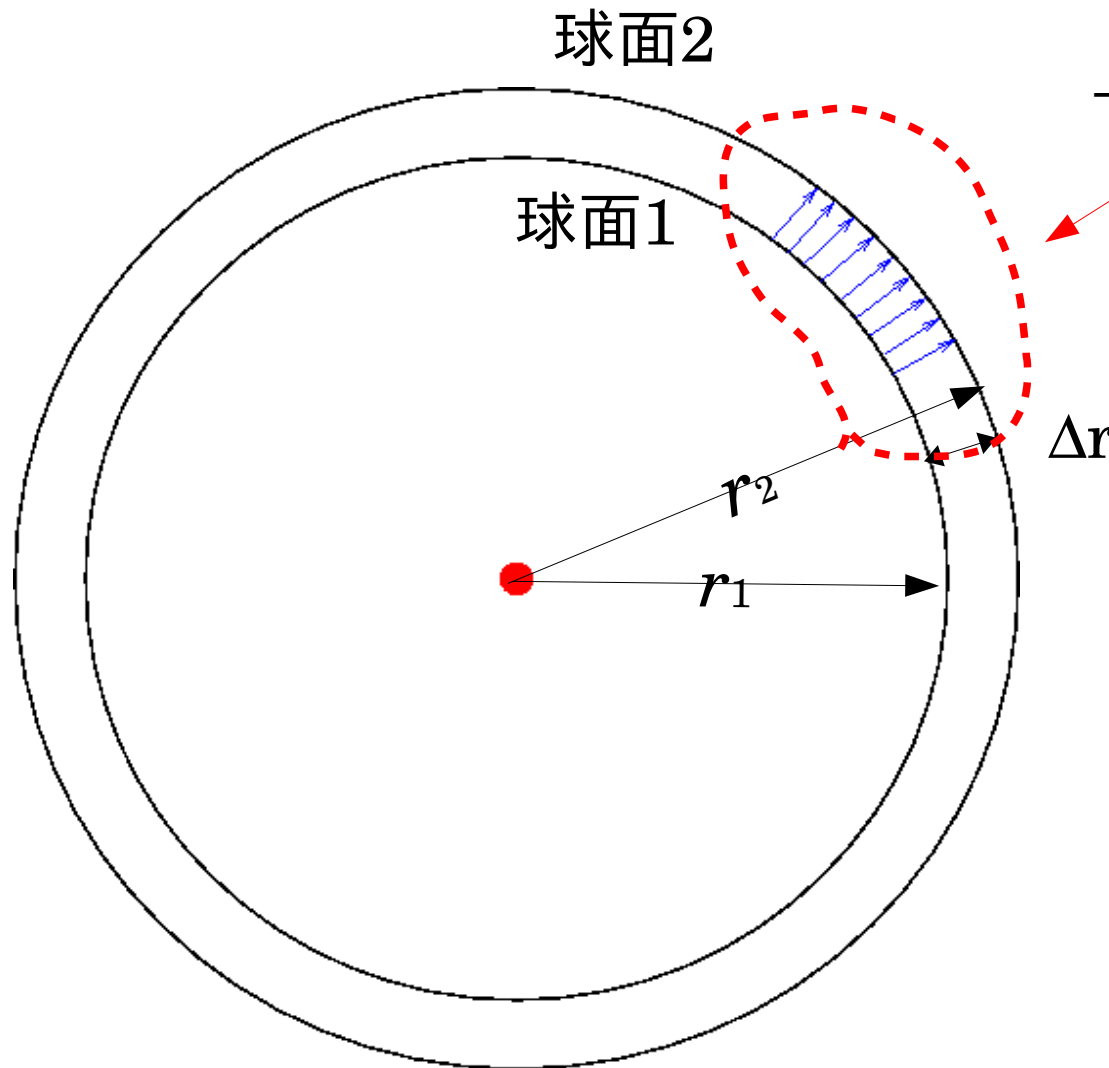


実際のコンデンサーは電荷を蓄える装置として利用される。
また、**思考実験**の装置としても、重要。

一個の電荷の作る電場(クーロン場)の電位

電荷を中心とした球面对称性=>電荷を中心とする球面が等電位面

間隔の狭い2つの電荷を中心とする球面(等電位面)の電位差



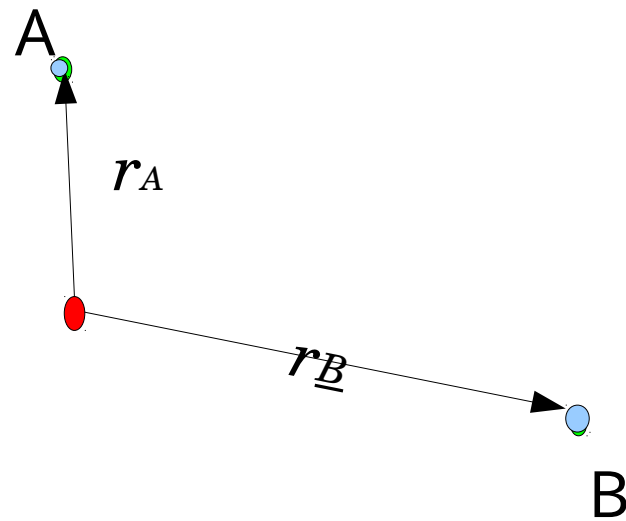
球面1と球面2の電位差

$$\Delta V = -E \cdot \Delta r$$

$$\simeq -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \Delta r$$

一個の電荷の作る電場(クーロン場)の電位差

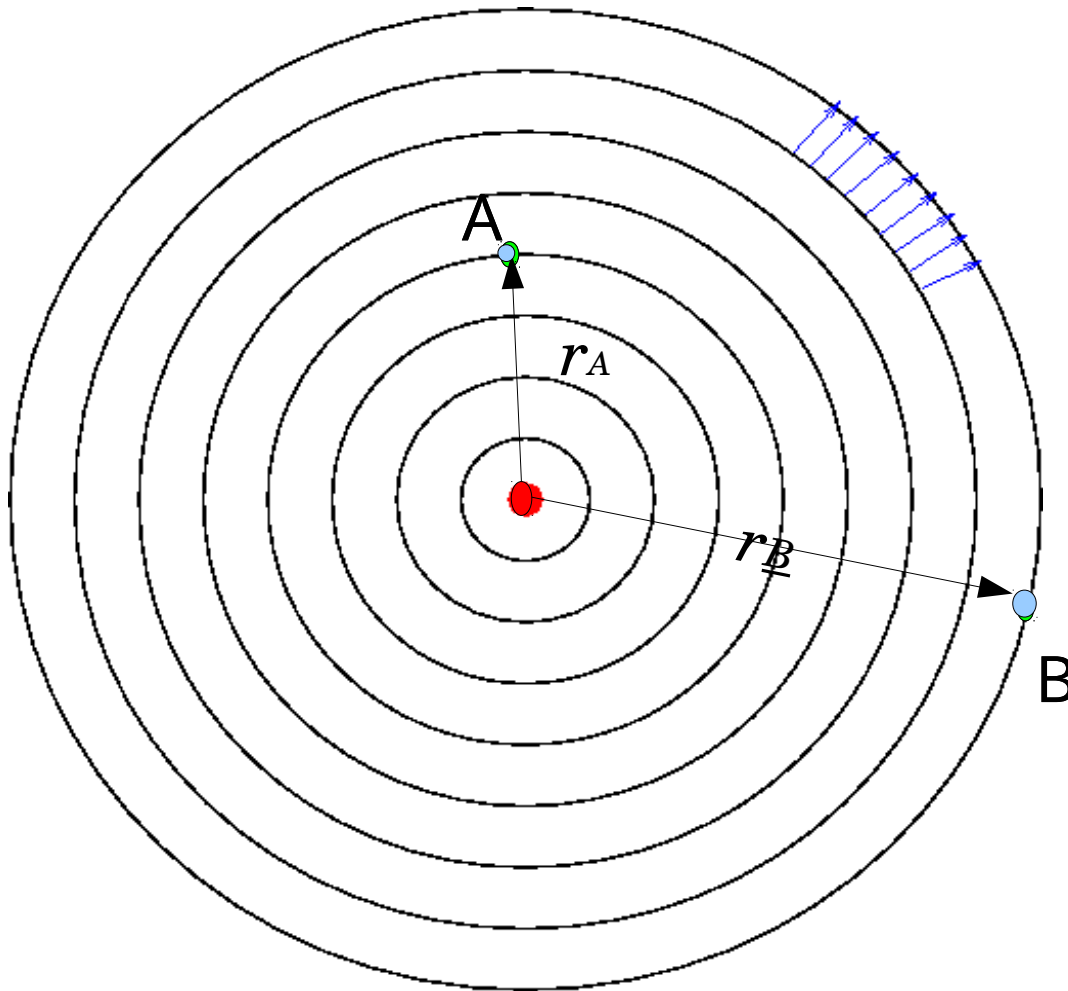
任意の2点間(AとB)の電位差 ΔV



点A から 点B まで、

一個の電荷の作る電場(クーロン場)の電位差

任意の2点間(AとB)の電位差 ΔV



$r=r_A$ から $r=r_B$ まで、

$$\Delta V_i = -E_i \cdot \Delta r_i$$

$$\simeq -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \Delta r_i$$

を足し合わせる。

$$\Delta V_{AB} = \sum_i \Delta V_i \simeq -\sum_i \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \Delta r_i \simeq -\int_{r_A}^{r_B} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

結局 r_a と r_b の電位差は、

$$V_{A,B} = - \left[-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

と書ける。

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} + C(\text{定数}) \quad \text{と置くと、}$$

$$V_A(\vec{r}) = V(\vec{r}) - V(\vec{r}_A)$$

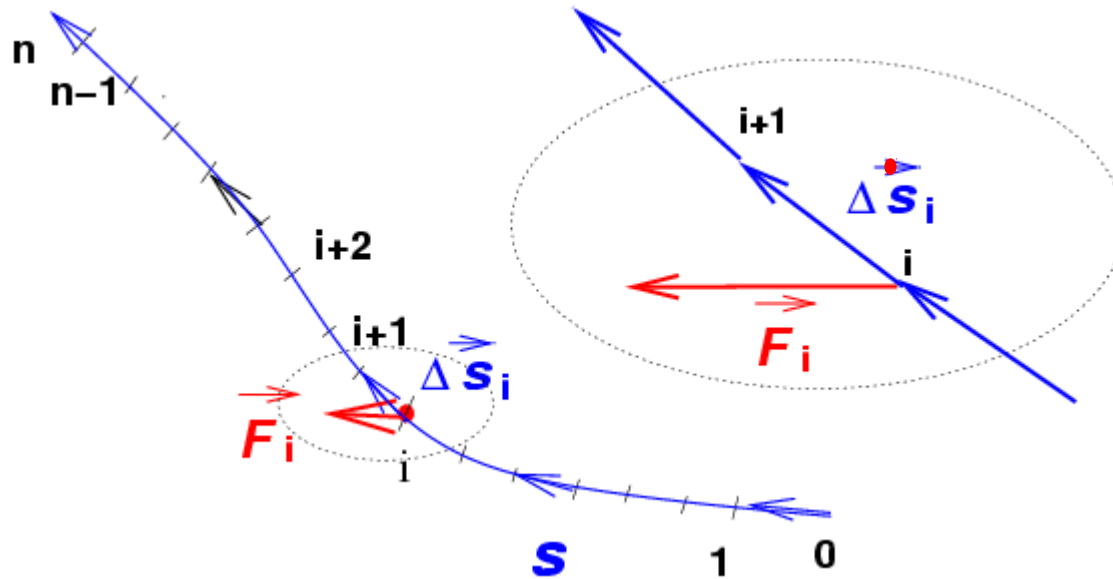
と、基準点をAとした、**電位**が定義できる。
なお、クーロン場では、無限遠を基準点として、

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

を、電位とすることができる。

注意、クーロン場以外では、いつも無限遠を基準と取れるわけでは無い

一般的な曲線にそって結ばれる2点の電位差
=> 分割して個々の電位差の和



$$V \simeq -(\vec{E}_0 \cdot \Delta \vec{s}_0 + \dots + \boxed{\vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i} + \dots + \vec{E}_n \cdot \Delta \vec{s}_n)$$

$$= -\sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i \simeq -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

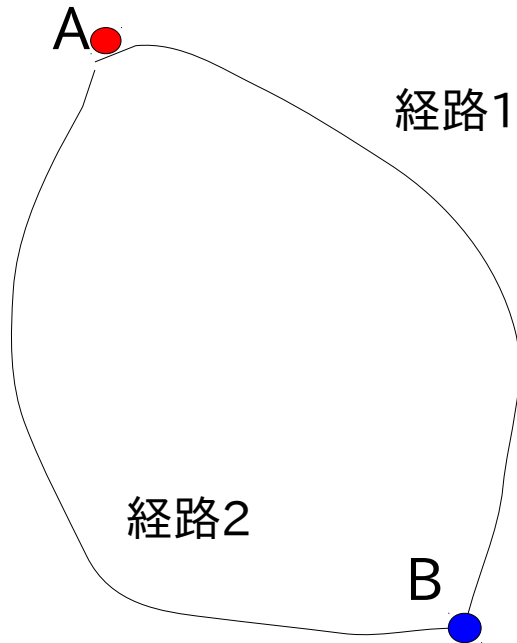
曲線の分割上の仕事

線を分割するから、**線積分**

\vec{r}_0 から \vec{r}_n まで、電荷qを移動させるときの仕事は

$$U \simeq -q \cdot \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta \vec{s}_i \simeq -q \cdot \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_n} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

V_{AB} が一意的に計算できるためには、



$$\left[\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \right]_{\text{経路1}} = \left[\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \right]_{\text{経路2}}$$

$$\left[\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} \right]_{\text{経路1}} = - \left[\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \right]_{\text{経路2(逆向き)}}$$

$$\left[\oint_B \vec{E} \cdot d\vec{s} \right]_{\text{経路1から経路2(逆向き)}} = 0$$

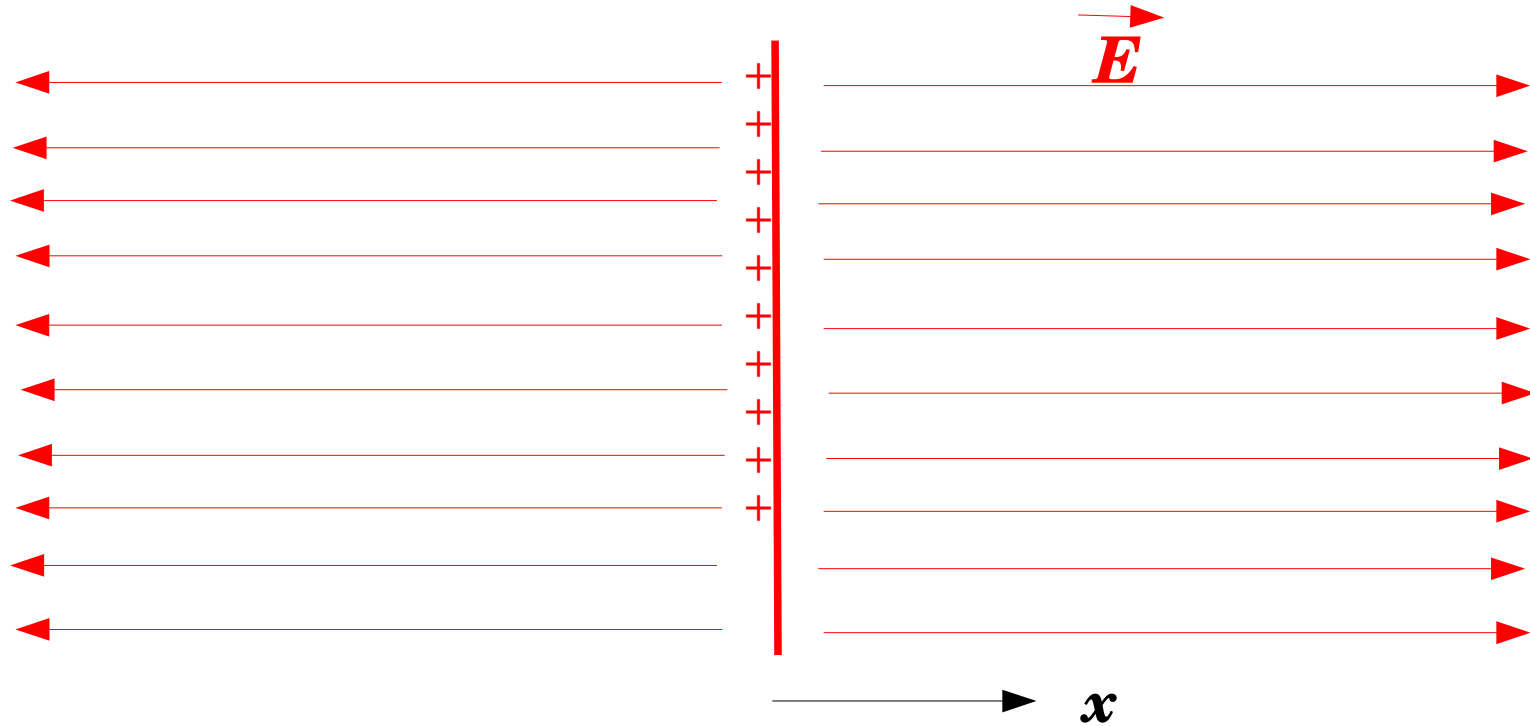
つまり、

$$\oint_B \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

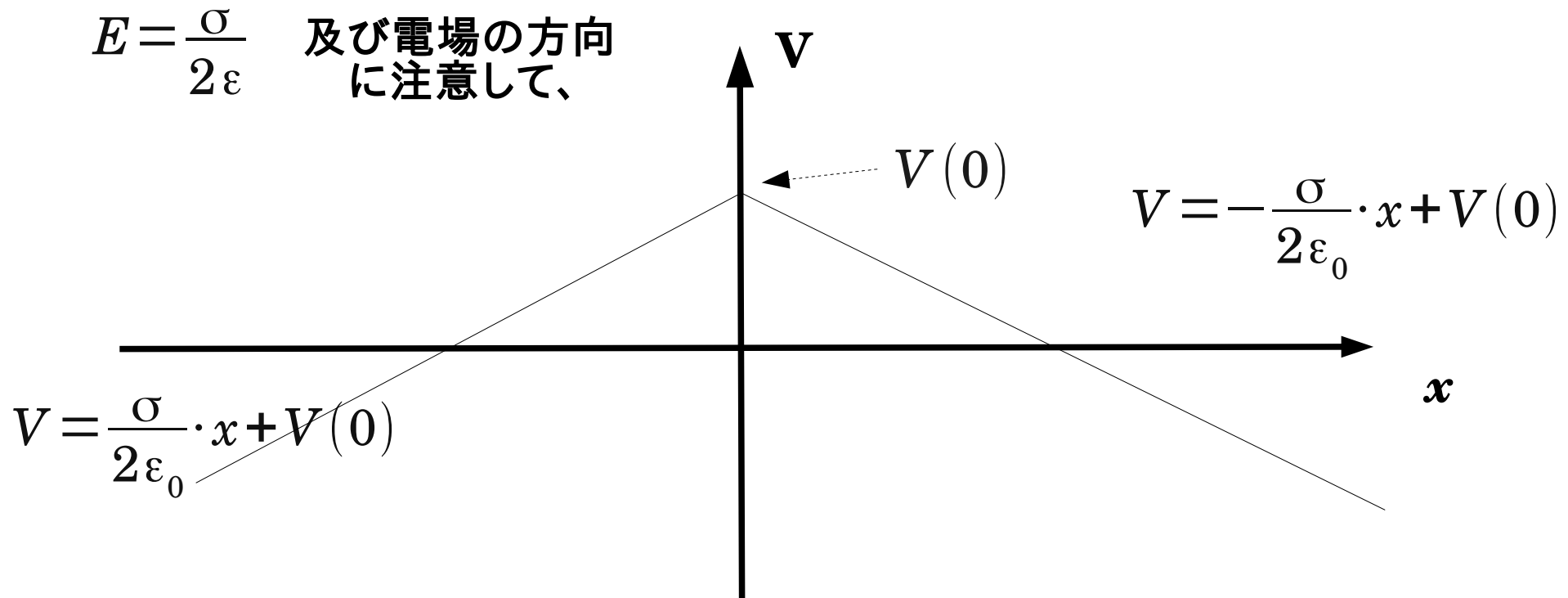
が必要十分条件

クーロン場はこれを満たしている。

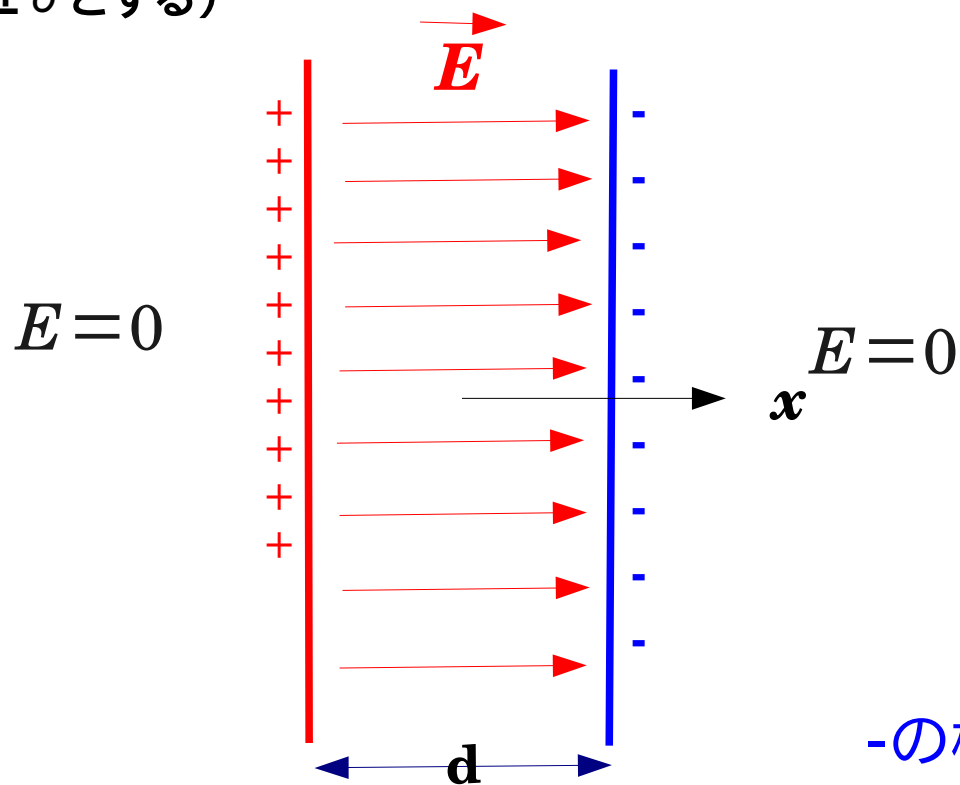
無限に広い平面に一様に電荷が分布する場合（電荷密度を σ とする）



$E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$ 及び電場の方向
に注意して、

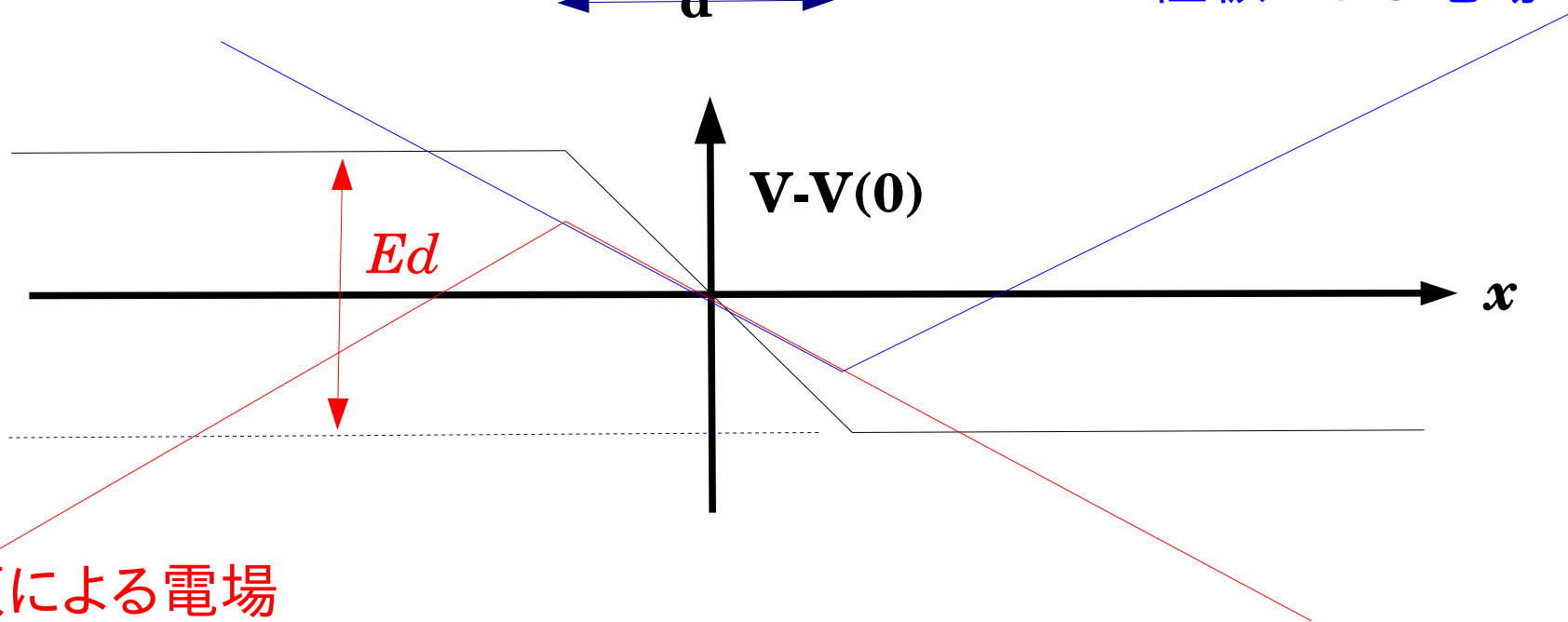


2枚の無限に広い平面に反対符号の電荷が一様に分布する場合
(それぞれの電荷密度を $\pm\sigma$ とする)



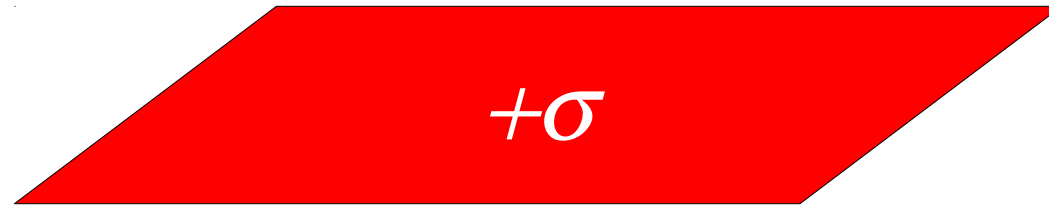
-の極板による電場

+と-の
合計

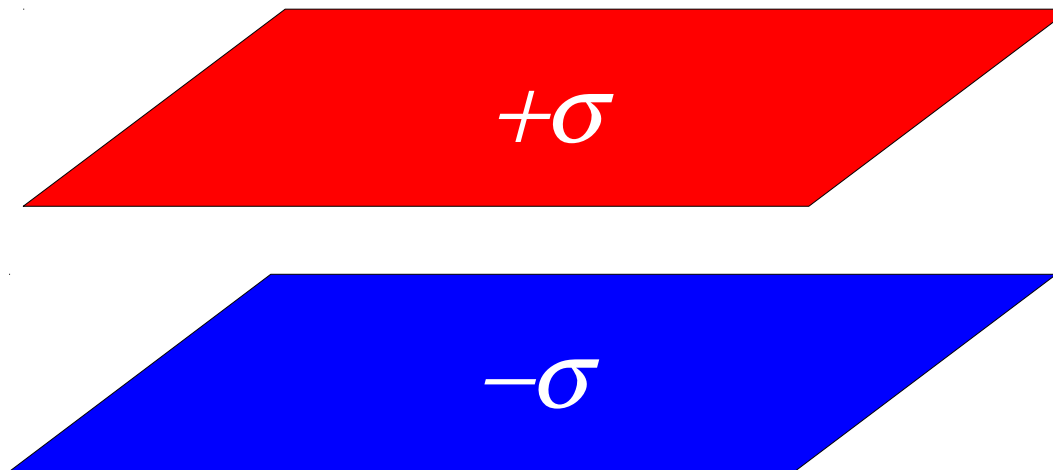


+の極板による電場

1. 無限に広い平面に一様に電荷が分布しており、その平面密度が $+\sigma$ である場合、電気力線を描き電場の強さを示せ。



2. 無限に広い二つの平面それぞれに、符号の異なる電荷が面密度 $+\sigma$, $-\sigma$ で分布している。電気力線を描き、電場の強さと二つの平面の電位差を示せ。



3. 有限の面積 S をもつ二つの平面に、符号の異なる電荷 $+Q$, $-Q$ を与えた場合、2. は近似式として用いられる。電場の強さと二つの平面の電位差を示せ。