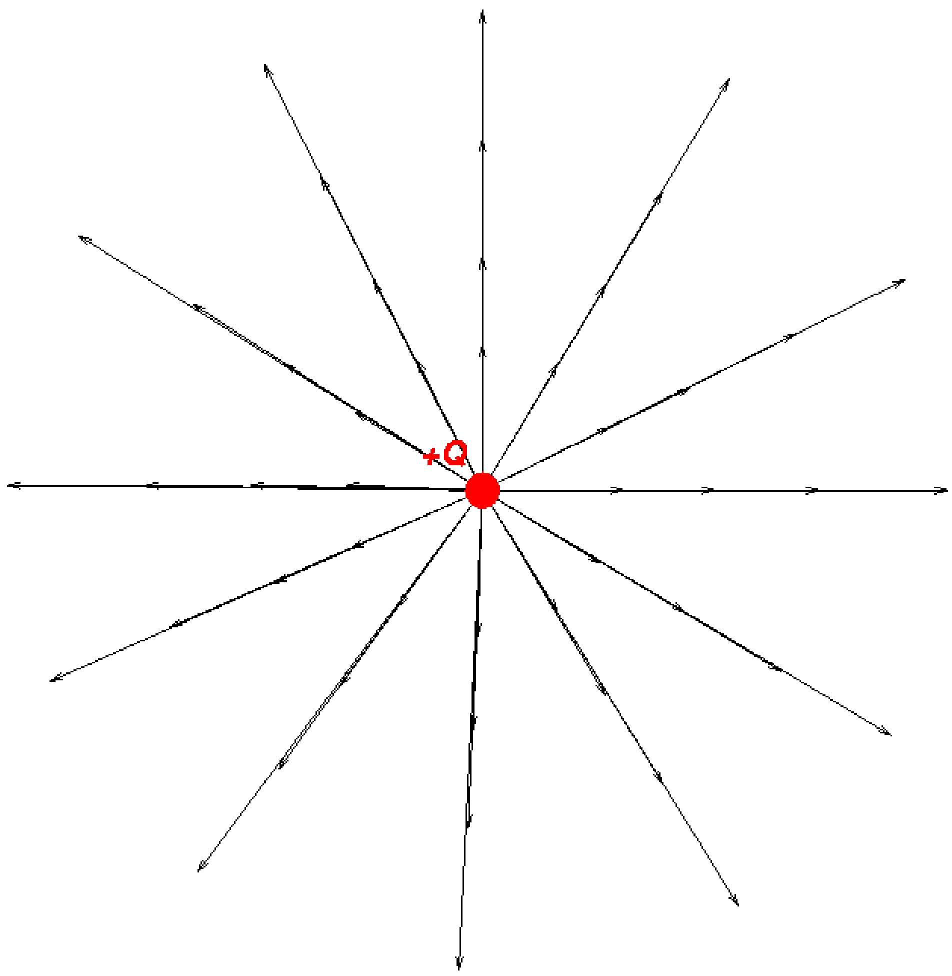
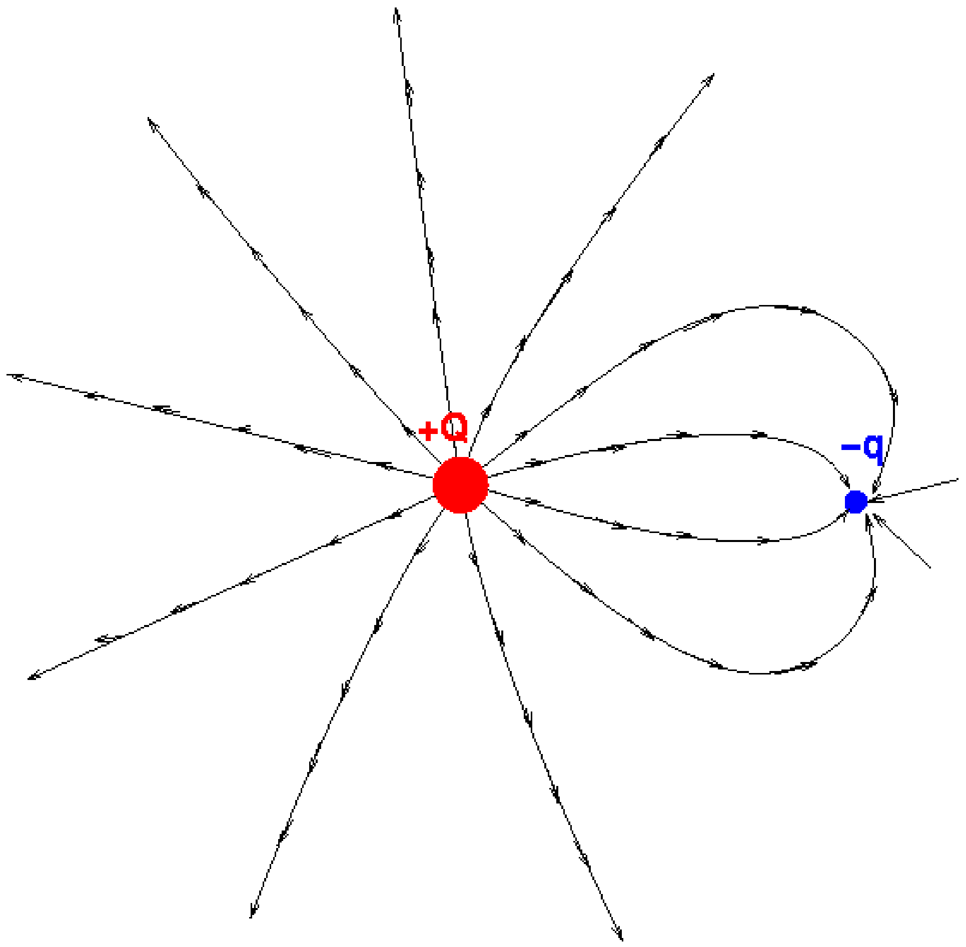
この授業の出発点

電荷からは、電気力線が伸ている



単独の電荷の場合放射状に



複数の電場では配置によって曲線を描く

電気力線を用いて、電場を電気力線で表現する準備。

- 電場の方向は、電気力線の伸びる方向。
- 電場の強さと、電気力線の密度が比例する。
- 電気力線は+の電荷から−の電荷まで、または無限遠まで伸びる。

定量化のための仮定

- 大きさQの電荷からは $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ 本の電気力線が伸びる。

ε_0　真空の誘電率

を用いて、上の電気力線の性質を定式化しよう!

マクスウエルの方程式の積分型

電場の面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q/\varepsilon_0$$

（電場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

（電磁誘導の法則）

磁場の面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$$

（磁場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I \quad \boxed{+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$$

（アンペール・マクスウエルの法則）

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。

マクスウエルの方程式　(通常はこの微分形を意味する)

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

電場のガウスの法則

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

電磁誘導の法則

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

磁場のガウスの法則

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{I} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

アンペール·マクスウエルの法則

マクスウエルの方程式　(通常はこの微分形を意味する)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

電場のガウスの法則

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

電磁誘導の法則

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

磁場のガウスの法則

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

アンペール·マクスウエルの法則

電磁波

$\vec{I}=0 \quad \vec{E}=(0,0,E_z) \quad \vec{B}=(0,B_y,0)$ と置くと生き残るのは、

アンペールの法則から、

$$\frac{\partial B_y}{\partial x}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

両辺をtで偏微分

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t\,\partial x}}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

電磁誘導の法則から、

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

両辺をxで偏微分

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial x\,\partial t}}$$

$\boxed{\quad\quad}$ で囲まれた部分は、「微分の順番が交換できる」とすると等しい。

したがって、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

:波動方程式

が得られた。

$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ H/m=N/A^2

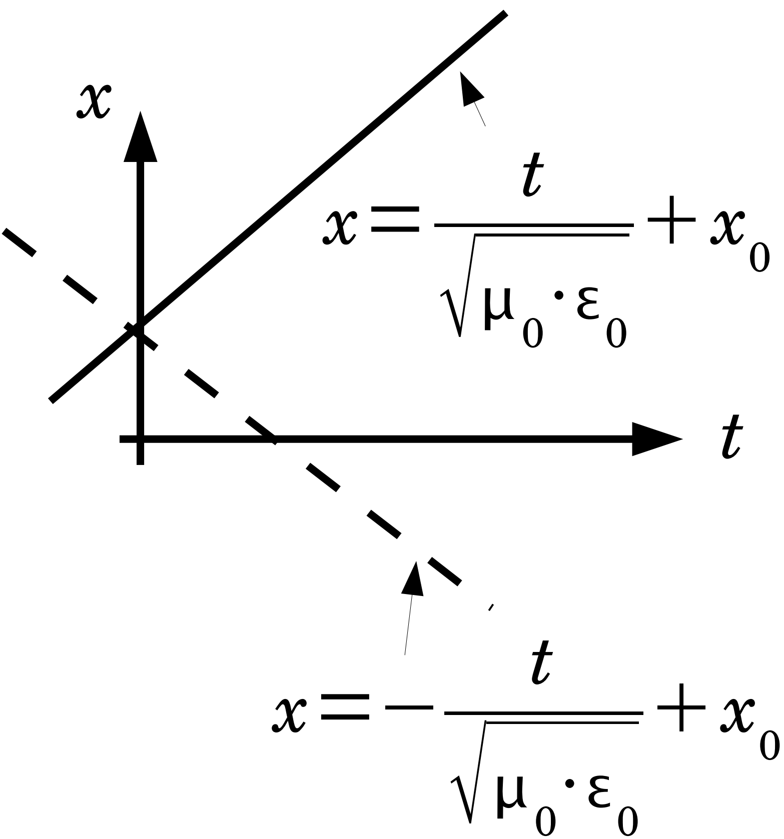
$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ F/m

電磁波

この解は、

$$E_z = f\left(x \pm \frac{t}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}\right)$$

の形なら何でも良い。
この意味で一般解と呼ぶ。



－符号に注目する。左のグラフの実線上で、電場は一定の値をもつ。言い替えると、この一定の値は時間と共に、速度 $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ で進行している。このような波動を進行波と呼ぶ。

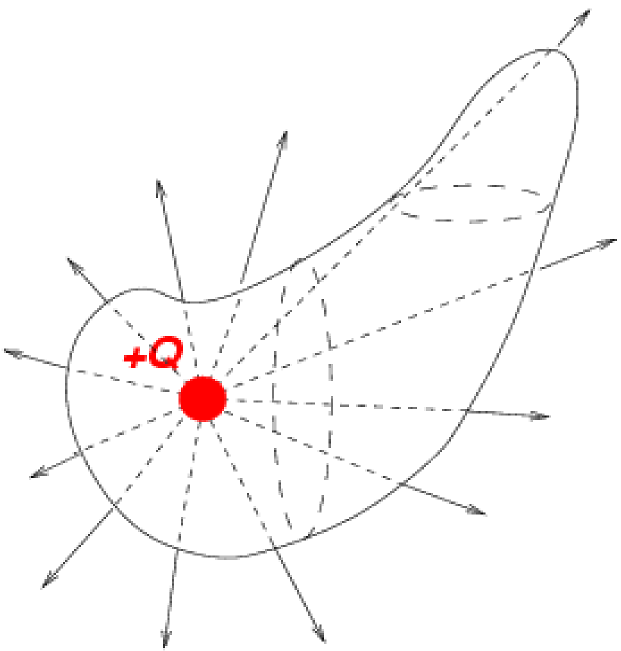
＋符号に注目すると、時間と共に一定の値をもつ電場は時間と共に後退している。このような波動を後退波と呼ぶ。

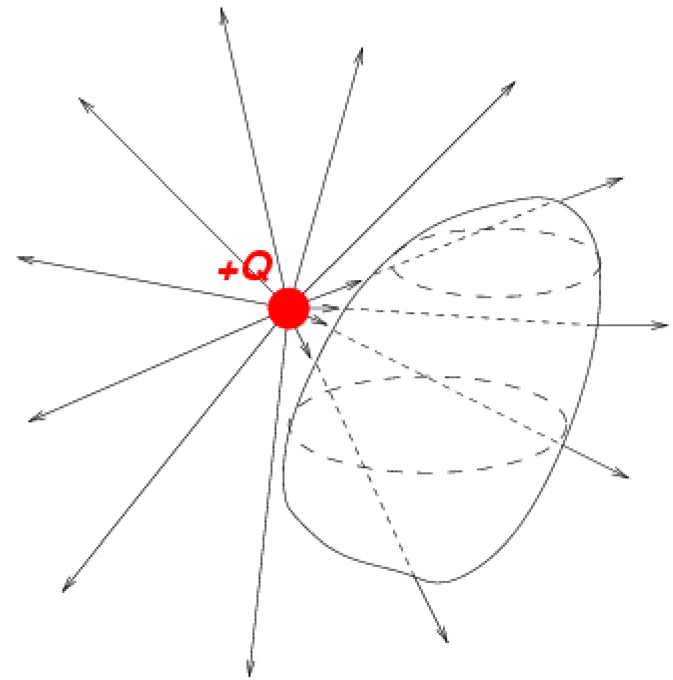
なお、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \equiv 299792458\ \mathrm{m/s} \approx 3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$$

は光の速度に等しい。

ガウスの法則まとめ





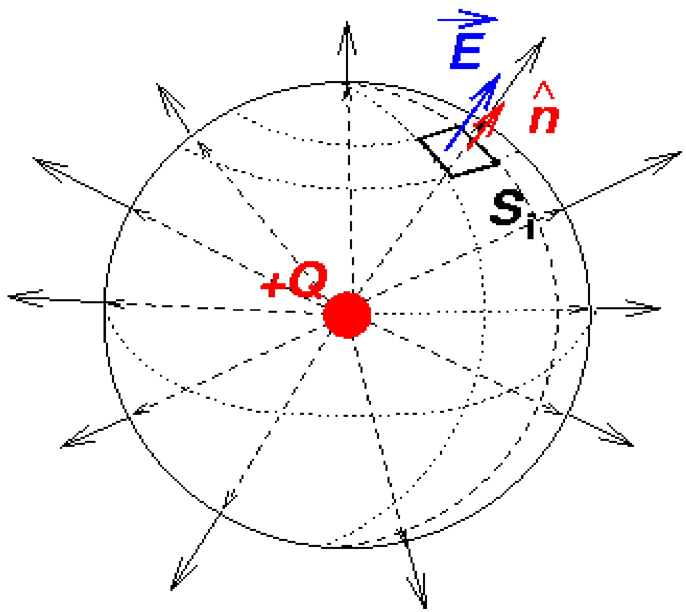
電荷が閉曲面の内側の場合、

$$\int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

電荷が閉曲面の外側の場合

$$\int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dS = 0$$

一個の電荷の作る電場　(クーロン場)



電荷を中心とする球面上で

$$\int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

球面の対称性

$\vec{E}$、$\hat{r}$　$\hat{n}$:全部同じ方向のベクトル

$\boldsymbol{E}$ の大きさは球面上で一定

$$N = E\int_S dS = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

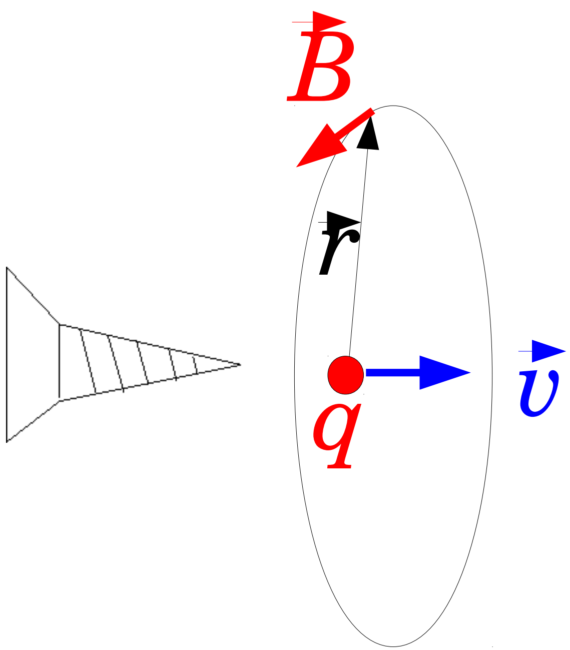
注意、球の表面積は

$$S = 4\pi r^2$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\hat{r}}{r^2}$$

磁性の「おおもと」もやっぱり電荷

電荷が動くと、磁力線と言う輪をつくる。



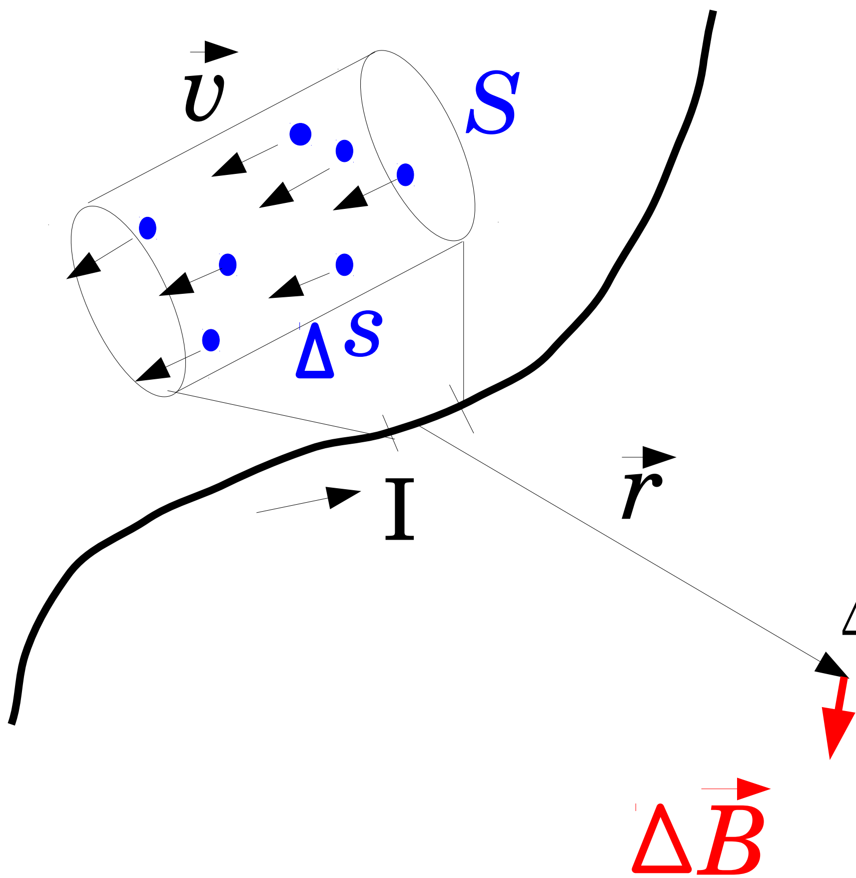
つくる電荷の大きさに比例
強さは距離の二乗に反比例
} 電場と共通

方向を表すため、外積を用いる

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot q\,\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

電流がつくる磁場 (電流と磁場は相性がよい)

短い区間を流れる電流のつくる磁場は、その中の
電荷(電子)のつくる磁場の合計で与えられる。



$$\vec{I} = -e\,\rho_e S <\vec{v}>$$ 電流の定義

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot(-e)\frac{\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$ 電子一個のつく磁場

この区間の中の自由電子の数は

$$N_e = \rho_e \cdot S \cdot \Delta s$$

したがって、

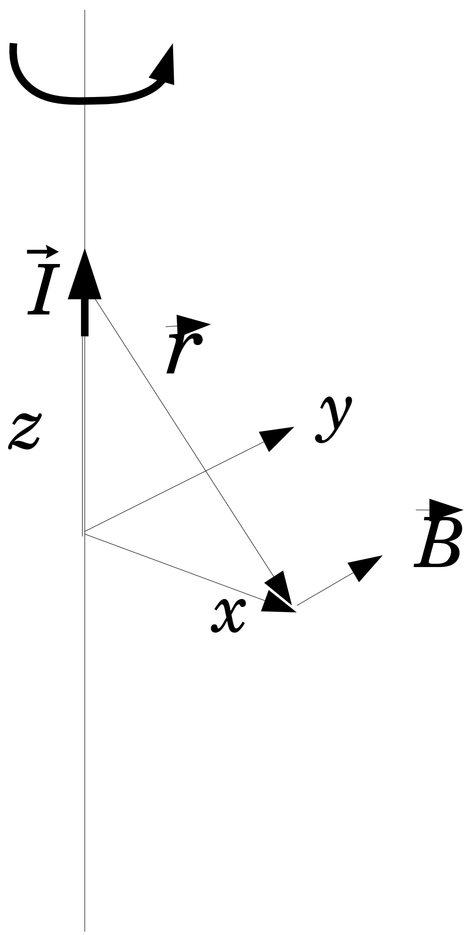
$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{[\vec{I}\cdot\Delta s]\times\hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\vec{I}\times\hat{r}}{r^2}\Delta s$$

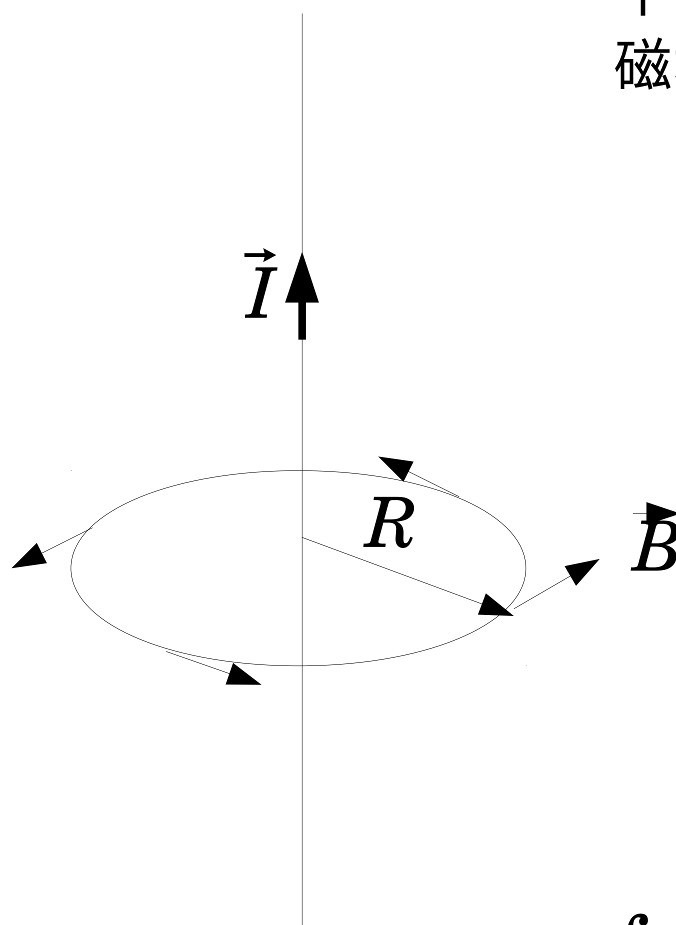
ビオ・サバールの法則

変化しない(定常)電流のつくる磁場を、静磁場と呼ぶ事がある。

続き　　　　したがって　$B_y = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$

回転対称性





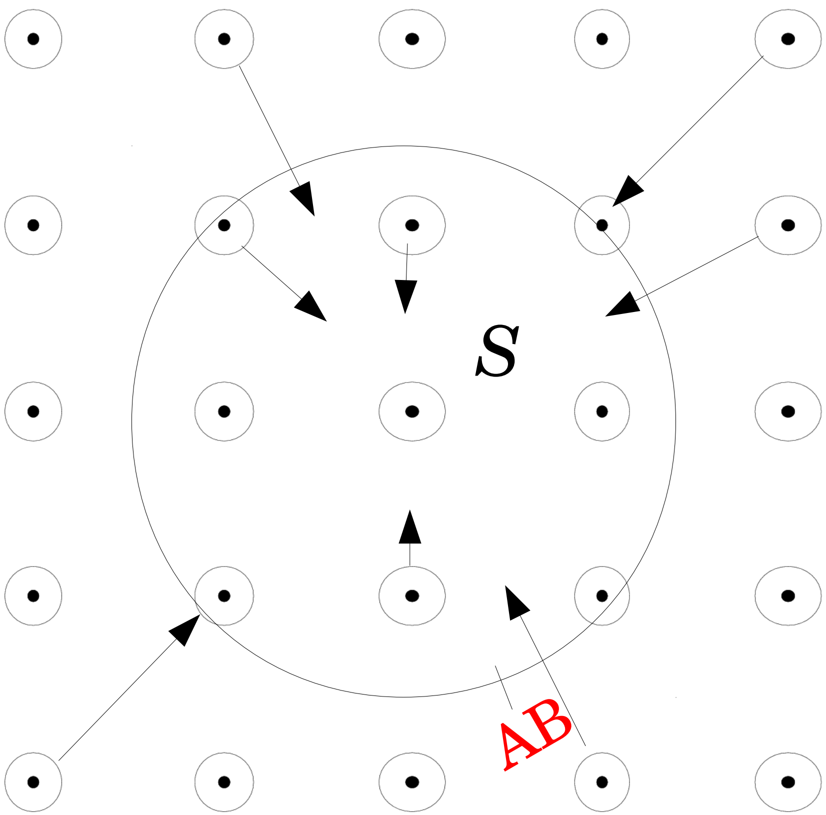
回転対称性を考えると、
半径 R の円周上どこでも
磁場の強さは、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

円周一周の積分は、

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \oint B\, ds = \mu_0 I$$

電磁誘導(3)



一周積分

$$\oint [(\vec{v}_{[\text{磁場の移動する速度}]}) \times \vec{B}] \cdot d\vec{s}$$

は、積分路内に単位時間に入って来る磁力線の数であるが、同様な量は、下の式でも計算できる。

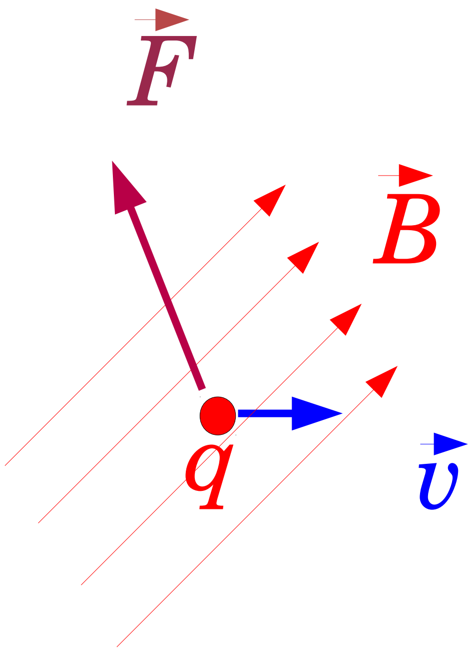
$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

注意、$\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$は面積$S$を通る磁力線の数を数える操作。(ガウスの法則参照) 結局、AB間の電位差は、

$$V_{[AB]} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

と書ける。(誘導起電力)

磁場が電荷にあたえる力
やはり外積で表現される



$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

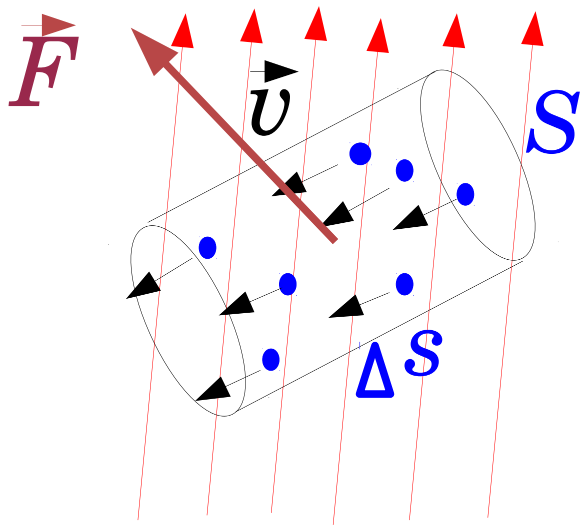
電場も加えて、電磁場が電荷に与える力は

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$$

ともっとも一般的に書かれる。
これを、ローレンツ力と呼ぶ。

磁場が電流に与える力

短い区間を流れる電流が磁場から受ける力は、
その中の電荷(電子)が磁場から受ける力の合計。



$$\vec{I} = -e\rho_e S \langle \vec{v} \rangle$$

電流の定義

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

電子一個受ける力

この区間の中の自由電子の数は

$$N_e = \rho_e \cdot S \cdot \Delta s$$

したがって、

$$\Delta \vec{F} = [\vec{I} \cdot \Delta s] \times B = \vec{I} \times \vec{B} \Delta s$$

コンデンサーとエネルギー

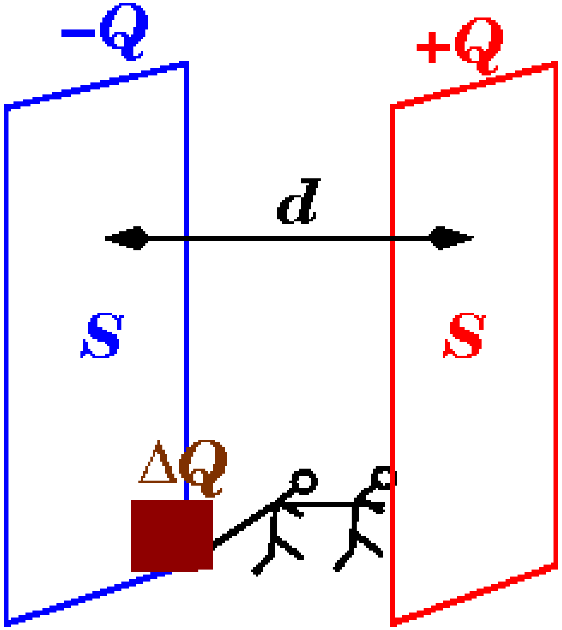
図の様に、2枚の平行な極板があり、それぞれの面積をS、
両者の距離をdとして、dは極板の面積に比較して十分短いものとする。
一方の極板には、正の電荷+Qが蓄えられており、もう一方の極板には、
負の電荷-Qが蓄えられている。

1 極板の間の空間における、電場の強さを示せ。

2 極板間の電位差を示せ。

3 微小な電荷ΔQを、負の極板から正の極板へ
運ぶときの仕事を求めよ。

4 始め、両方の極板に電荷は蓄えられておらず、
3の操作を繰り替えして、両極板に±Qの
電荷が蓄えられたとする。このため必要な仕事
の総量を求めよ。

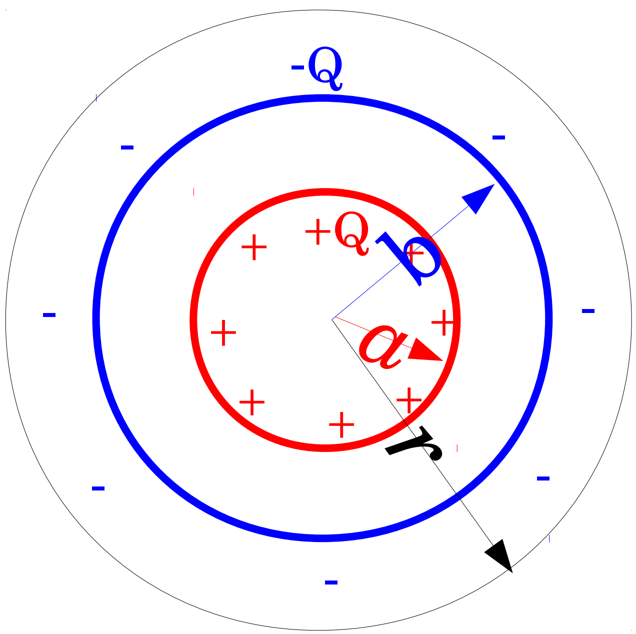


今日の問題、半径aとbの、2つの同心球に一様に電荷が分布しており、
それぞれの合計は、$+Q$, $-Q$である。この時の電場を求めよ。

$$\int_S (\vec{E}\cdot\hat{n})\,dS = \frac{\sum_{\text{内側にある電荷}} Q}{\varepsilon_0}$$

半径 r の球の内部の電荷を評価すると、

$$\sum_{\text{内部}} Q = \begin{cases} +Q-Q=0 & (b<r) \\ Q & (a<r<b) \\ 0 & (r<a) \end{cases}$$



ガウスの法則へ応用して、

$$4\pi r^2 \cdot E = \Bigg\{$$

以上より、
電場の大きさは、

$$E = \Bigg\{$$

ベクトルで書いて、

$$\vec{E} = \Bigg\{$$

平行な電流に働く力

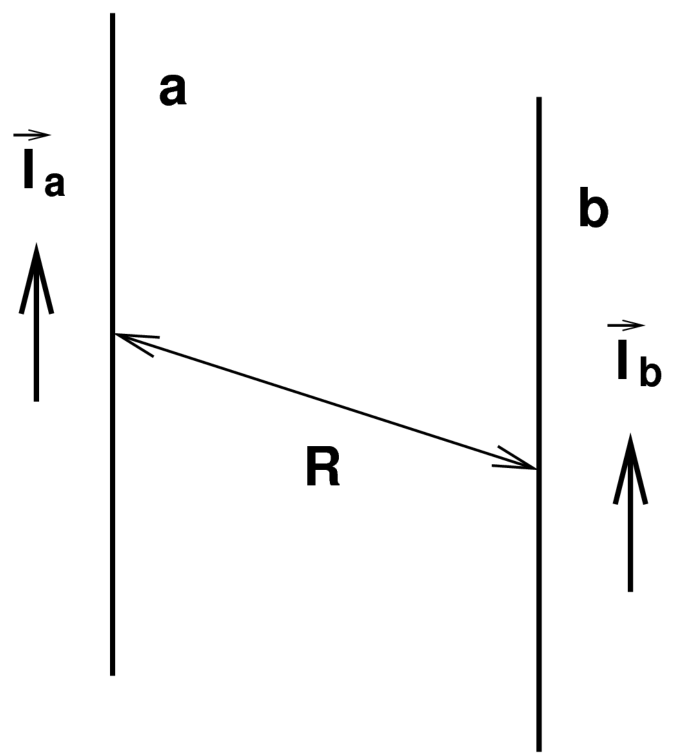
下図の様に、お互いに平行な、無限に長い直線の導線があり、それぞれ電流Ia、Ibが、z方向に流れている。

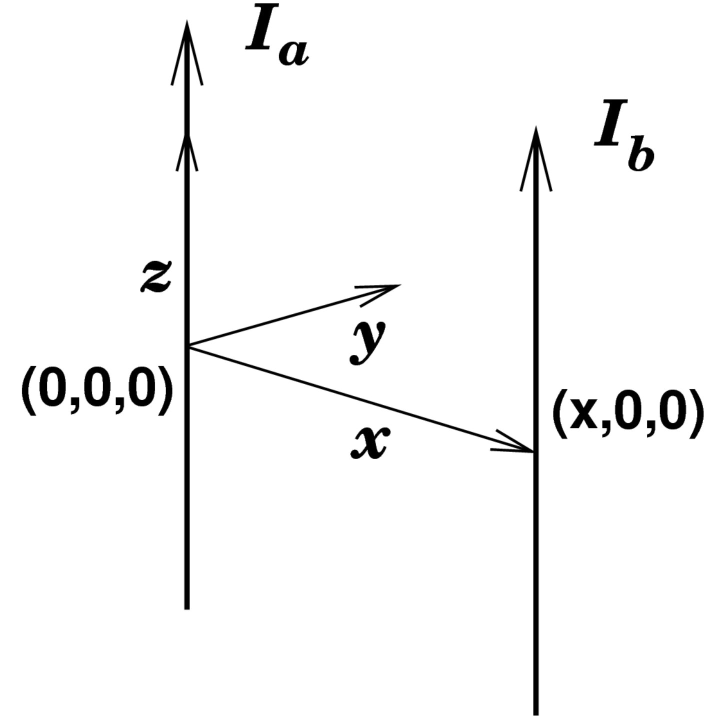
1. 電流Iaが、点Ibにつくる磁場（磁束密度）を求めよ。

2. この磁場から、電流Ibの受ける力を求めよ。

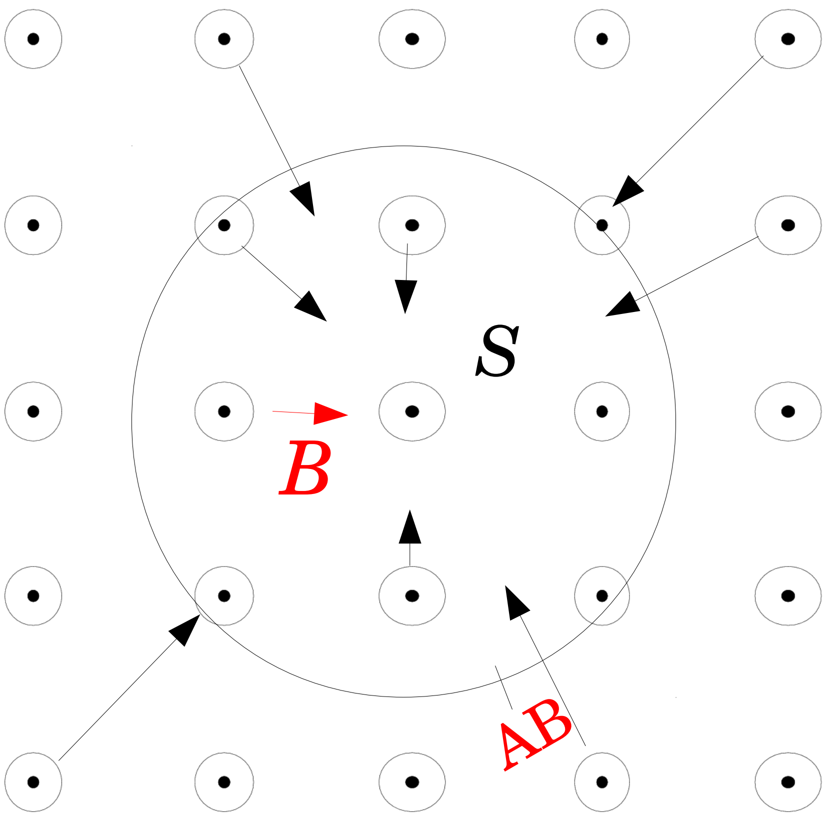
3. この力はIa, Ibにとって、引力か、斥力か。

座標を使ってで考えるなら





今日の問題



一様な磁場があり、その中に磁場に垂直に円形で面積Sの導線があり、一箇所切れ目があり、僅かに離れている両端をA,Bとする。

1, 磁場の強さが時間の関数として、

$$B = b \cdot t + B_0$$

のように変化するとき、A,Bに発生する起電力を求めよ。

2, 磁場の強さが時間の関数として、

$$B = B_0 \sin(\omega t)$$

のように変化するときでは、起電力はどうなるか。

磁場中の荷電粒子

磁場中で、電子が運動する時の回転半径と、
電子の運動量、運動エネルギーの関係を求めよ。

ヒント、

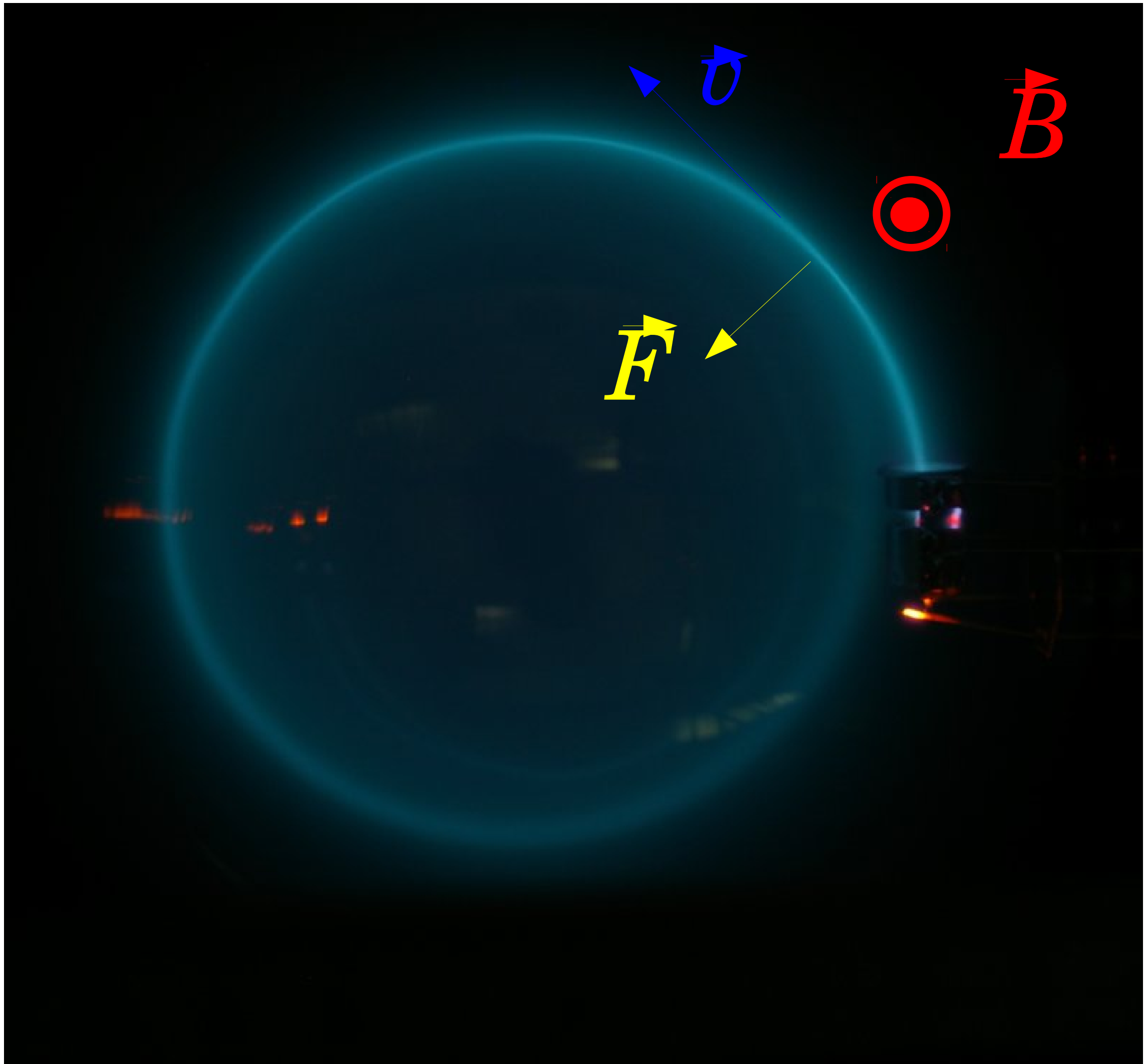
$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B})$$

を用いて、微分方程式を解いて、
求めることもできるが、
(物理実験の教科書参照)
簡単には、回転運動の遠心力と、
磁場からの力の釣り合いを考え
ても求まる。なお、遠心力は

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

で与えられる。
まず、速度と半径の関係を
求めよう。

磁場中の電子の運動



今日の問題、ドーナッツ型のトランス

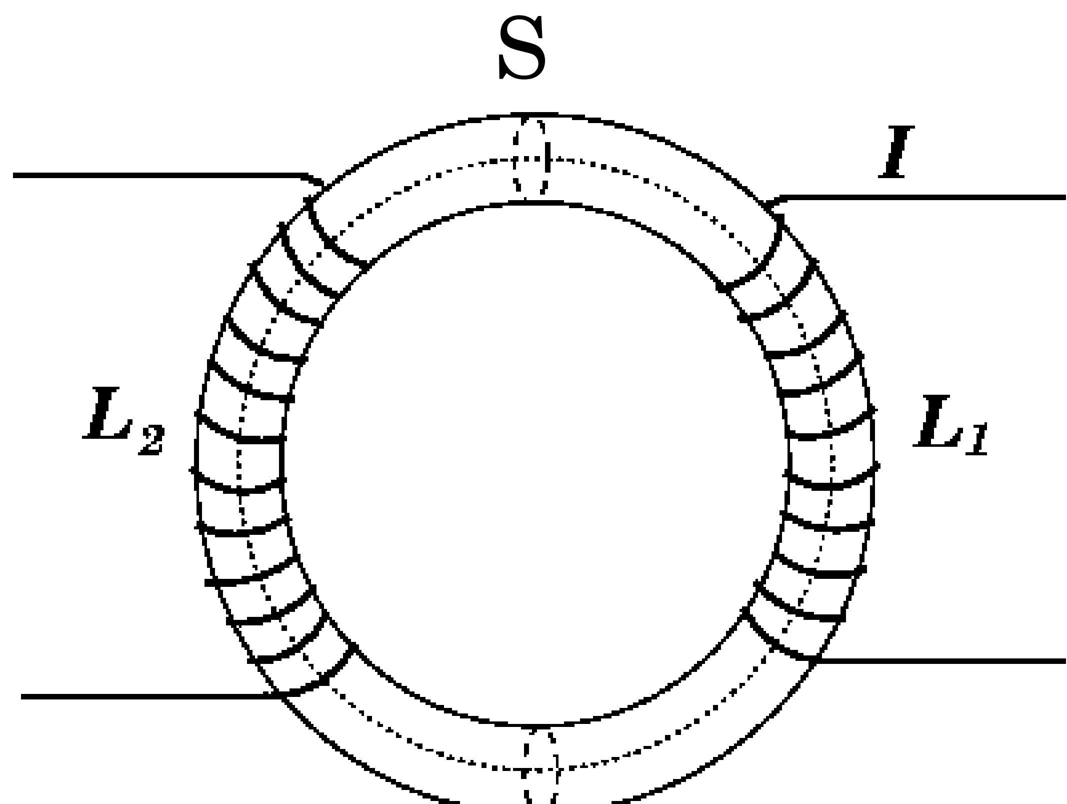
図の様に、ドーナッツ型の強磁性体を芯材に用いて、磁力線が漏れ出さないように工夫された、

トランスがある。芯材の中心線の長さを l、その断面積を S、透磁率をμ、コイル$L1$の巻数をN1、

コイルL2の巻数をN2として、下の問いに答えよ。

1.コイルL1に電流Iが流れている時、ドーナッツ型の

芯材の中心線上での磁場(磁束密度)を求めよ。



2.この磁場の強さで、ドーナッツ型の内部の

磁場の強さを代表させる事ができるとする。

L1に流れる電流が変化率 $\dfrac{dI}{dt}$ で変化する時、

L2の両端に発生する起電力を求めよ。

3.同様な起電力はL1でも発生する。それを求め、

L2で発生する起電力との比を示せ。