マクスウエルの方程式の積分型

電場の面積分

$$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$$

（電場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{面積} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

（電磁誘導の法則）

磁場の面積分

$$\int_{[閉曲面上]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$$

（磁場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[面積の周囲]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[面積を通る]} I \quad \boxed{+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{面積}\vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$$

（アンペール・マクスウエルの法則）

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。

電磁誘導の法則

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS$$ を微分形に書き変える。

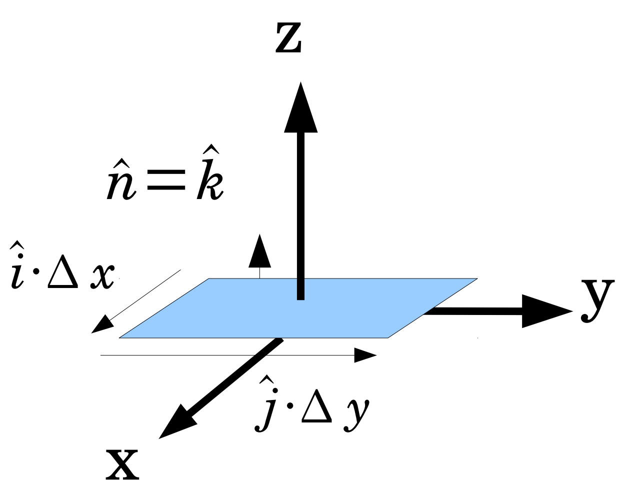
XY平面の長方形の面積と、その周囲を考える。

$$\text{左辺} = [\vec{E}\cdot\hat{i}\cdot\Delta x]_{y-\Delta y/2} + [\vec{E}\cdot\hat{j}\cdot\Delta y]_{x+\Delta x/2}$$

$$+ [\vec{E}\cdot(-\hat{i}\cdot\Delta x)]_{y+\Delta y/2} + [\vec{E}\cdot(-\hat{j}\cdot\Delta y)]_{x-\Delta x/2}$$

$$= \left([\vec{E}\cdot\hat{i}]_{y-\Delta y/2} - [\vec{E}\cdot\hat{i}]_{y+\Delta y/2}\right)\cdot\Delta x$$

$$+ \left([\vec{E}\cdot\hat{j}]_{x-\Delta x/2} - [\vec{E}\cdot\hat{j}]_{x+\Delta x/2}\right)\cdot\Delta y$$



$$= [\Delta x \Delta y]\frac{[\vec{E}\cdot\hat{i}]_{y-\Delta y/2} - [\vec{E}\cdot\hat{i}]_{y+\Delta y/2}}{\Delta y}$$

$$+ [\Delta x \Delta y]\frac{[\vec{E}\cdot\hat{j}]_{x+\Delta x/2} - [\vec{E}\cdot\hat{j}]_{x-\Delta x/2}}{\Delta x}$$

続き

$$=[\Delta x \Delta y]\frac{E_x(x, y-\Delta y/2, z)-E_x(x, y+\Delta y/2, z)}{\Delta y}$$

$$+[\Delta x \Delta y]\frac{E_y(x+\Delta x/2, y, z)-E_y(x-\Delta x/2, y, z)}{\Delta x}$$

$$\sim[\Delta x \Delta y]\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

右辺 $$=-\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}}\vec{B}\cdot\hat{n}\,dS=-\int_{\text{面積}}\frac{\partial(\vec{B}\cdot\hat{k})}{\partial t}dS$$

$$\sim-\frac{\partial B_z}{\partial t}[\Delta x \Delta y]$$

続き2,

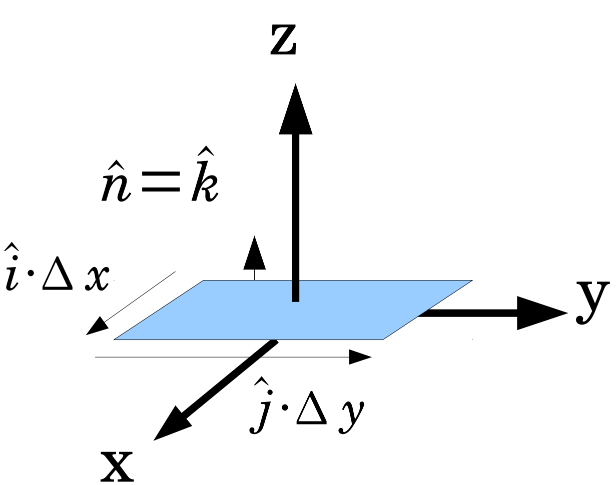
$\Delta x, \Delta y$ が非常に小さいとき

$$\text{左辺} = [\Delta x \Delta y]\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{E}_x}{\partial y}\right)$$

$$\text{右辺} \qquad = -\frac{\partial B_z}{\partial t}[\Delta x \Delta y]$$

したがって、電磁誘導の法則は、

XY平面上で、



$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \boldsymbol{E}_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

となる。

続き3，　まず、XY平面(Z軸に垂直)を考えたが、YZ平面(X軸に垂直)、ZX平面(Y軸に垂直)でも同様な考察が可能。したがって、電磁誘導の法則の微分形は、次の3つの式のセットになる。

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)=-\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

ベクトルとしてまとめると、

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x},\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial B_x}{\partial t},\frac{\partial B_y}{\partial t},\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

この関係も、ベクトル演算子を導入すると覚えやすい。

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ または $$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

後者は、形式的に

$$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$ と $$\vec{E}=\left(E_x,E_y,E_z\right)$$

の外積と考えたもの。

アンペール・マクスウェルの法則

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I \quad + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS$$

の微分形

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \mu_0 I_z + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = \mu_0 I_x + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \mu_0 I_y + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

ベクトルとしてまとめると、

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\mu_0\left(I_x, I_y, I_z\right)$$

$$+\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}_x}{\partial t}, \frac{\partial \boldsymbol{E}_y}{\partial t}, \frac{\partial \boldsymbol{E}_z}{\partial t}\right)$$

ベクトル演算子を導入して、

$$\mathbf{rot}\,\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

または

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}$$

マクスウエルの方程式　(通常はこの微分形を意味する)

電場のガウスの法則

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

または

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

電磁誘導の法則

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

磁場のガウスの法則

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0$$

$$\nabla \vec{B} = 0$$

アンペール·マクスウエルの法則

$$\mathrm{rot}\ \vec{B} = \mu_0 \vec{I} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{I} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

マクスウェルの方程式（群）は波動方程式を含む

電磁誘導の法則 $\mathbf{rot}\ \vec{E}=-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ を具体的に書き出して、

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z},\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x},\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial B_x}{\partial t},\frac{\partial B_y}{\partial t},\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

アンペール・マクスウェルの法則 $\mathbf{rot}\ \vec{B}=\mu_0\vec{I}+\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ も同様に

$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z},\ \frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x},\ \frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)=\mu_0\left(I_x,I_y,I_z\right)$$

$$+\varepsilon_0\mu_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial t},\frac{\partial E_y}{\partial t},\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)$$

簡単のため、$\vec{I}=0$，$\vec{E}=\left(0,0,E_z\right)$， $\vec{B}=\left(0,B_y,0\right)$ と置くと生き残るのは、

アンペールの法則

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

電磁誘導の法則

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

両辺をtで偏微分

$$\boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x}} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

両辺をxで偏微分

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \boxed{\frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t}}$$

$\boxed{\quad}$ で囲まれた部分は、「微分の順番が交換できる」とすると等しい。したがって、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

：波動方程式

が得られた。

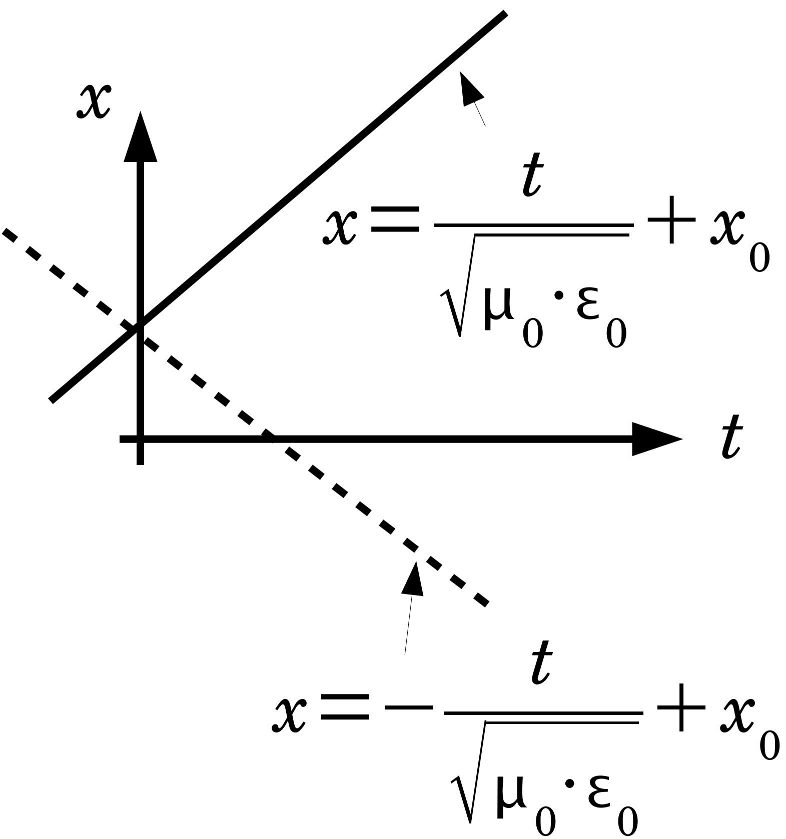
$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ H/m=N/A^2

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ F/m

電磁波　この解は、

$$E_z = f\left(x \pm \frac{t}{\sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}\right)$$

の形なら何でも良い。
この意味で一般解と呼ぶ。



−符号に注目する。左のグラフの実線上で、電場は一定の値をもつ。言い替えると、この一定の値は時間と共に、速度 $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ で進行している。このような波動を進行波と呼ぶ。

＋符号に注目すると、時間と共に一定の値をもつ電場は時間と共に後退している。このような波動を後退波と呼ぶ。

なお、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \equiv 299792458\,\mathrm{m/s} \approx 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$$

は光の速度に等しい。

今日の問題　マクスウエルの方程式　の

積分型、微分型を対応させて示せ