積分法則のまとめ

面積分	$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q/\varepsilon_0$	ガウスの法則
線積分	$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$	電磁誘導の法則
面積分	$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$	磁場のガウスの法則
線積分	$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I$	アンペールの法則

そろっている

バラバラ?

電場と磁場の対称性を良くする試み

Q_m ：単磁極(モノポール)と

I_m ：磁流[単磁極の流れ]を仮定すると

面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q/\varepsilon_0$$

ガウスの法則

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \boxed{-\sum_{[\text{面積を通る}]} I_m} \boxed{-\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS}$$

電磁誘導の法則

面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = \boxed{\sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q_m}$$

磁場のガウスの法則

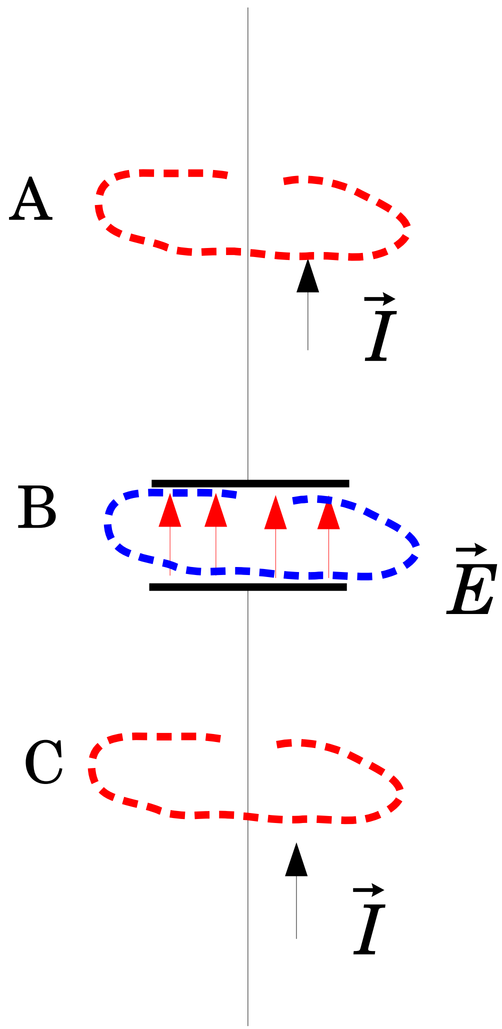
ここは、まだ、対照的でない。

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I$$

アンペールの法則

変位電流(マクスウエルの考察)



電流の途中にコンデンサーを置くとき、
A、Cでのアンペールの法則は

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad \text{…(1)}$$

と与えられる。

左辺の線積分の位置をAからCまで動かす時、
実際の電流が流れないBで、左辺の値が突然0になるのは不自然。電場が電流に代わって同じ働きをしているに違いない。

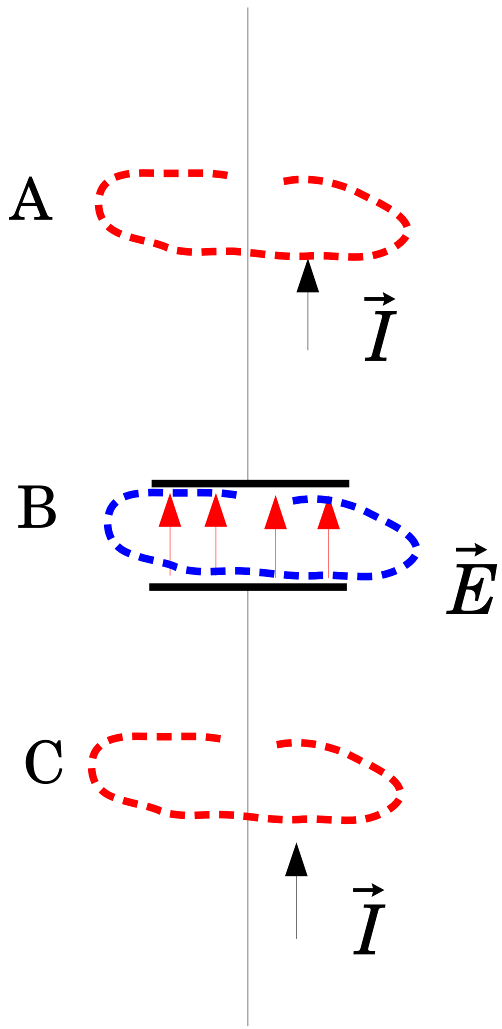
コンデンサーでは $I = \dfrac{dQ}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\varepsilon_0 E S)$

が成り立つので、電流に代わり、

$$\varepsilon_0 \frac{d}{dt}(ES)$$

が電流の働きをする。

変位電流(マクスウエルの考察)II



コンデンサーの周囲のアンペールの法則は

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \left[\varepsilon_0 \frac{d}{dt}(ES) \right] \qquad \text{...(2)}$$

となる。

したがって、A、B、Cすべての点で成り立つのは、
(1)と合わせて、

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt}(ES) \qquad \text{...(3)}$$

である。

対称性を持つ積分方程式たち

電場の面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q/\varepsilon_0$$

（電場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\sum_{[\text{面積の中を通る}]} I_m - \frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

（電磁誘導の法則）

磁場の面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q_m$$

（磁場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積の中を通る}]} I + \varepsilon_0\mu_0 \frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS$$

（アンペール・マクスウエルの法則）

電場の面積分に関係

電荷に関係する

電流に関係する

磁場の面積分に関係

単磁極と、磁流はまだ見つかっていない。

マクスウエルの方程式の積分型

電場の
面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q/\varepsilon_0$$

（電場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

（電磁誘導の法則）

磁場の
面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$$

（磁場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I \quad \boxed{+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$$

（アンペール・マクスウエルの法則）

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。

ガウスの法則

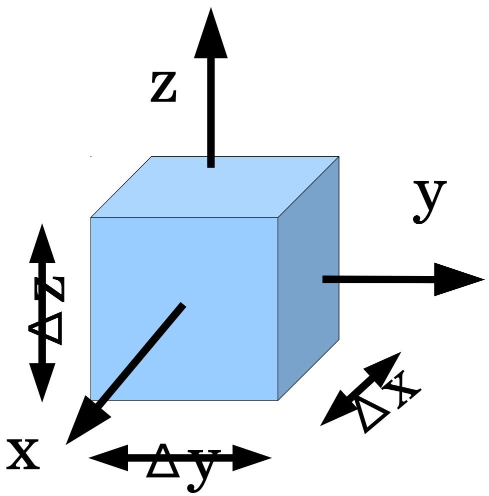
$$\int_{[閉曲面上]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[閉曲面内部]} Q/\varepsilon_0$$ を微分形に書き変える。

座標(x,y,z)を中心に持つ直方体の表面を、この閉曲面と考える。

$$左辺 = [\Delta y \Delta z]\cdot[\vec{E}\cdot\hat{i}]_{x+\Delta x/2} + [\Delta y \Delta z]\cdot[\vec{E}\cdot(-\hat{i})]_{x-\Delta x/2}$$

$$+ [\Delta z \Delta x]\cdot[\vec{E}\cdot\hat{j}]_{y+\Delta y/2} + [\Delta z \Delta x]\cdot[\vec{E}\cdot(-\hat{j})]_{y-\Delta y/2}$$

$$+ [\Delta x \Delta y]\cdot[\vec{E}\cdot\hat{k}]_{z+\Delta z/2} + [\Delta x \Delta y]\cdot[\vec{E}\cdot(-\hat{k})]_{z-\Delta z/2}$$



$$= [\Delta x \Delta y \Delta z]\cdot\frac{[\vec{E}\cdot\hat{i}]_{x+\Delta x/2} - [\vec{E}\cdot\hat{i}]_{x-\Delta x/2}}{\Delta x}$$

$$+ [\Delta x \Delta y \Delta z]\cdot\frac{[\vec{E}\cdot\hat{j}]_{y+\Delta y/2} - [\vec{E}\cdot\hat{j}]_{y-\Delta y/2}}{\Delta y}$$

$$+ [\Delta x \Delta y \Delta z]\cdot\frac{[\vec{E}\cdot\hat{k}]_{z+\Delta z/2} - [\vec{E}\cdot\hat{k}]_{z-\Delta z/2}}{\Delta z}$$

(続き)　　$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ が非常に小さいとき

$$\text{左辺} \quad = [\Delta x \Delta y \Delta z] \cdot \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

したがって、電場に対するガウスの法則、

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q / \varepsilon_0$$

は、次の様に書き換えられる。

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \quad \left(= \frac{\sum_{[\text{内部}]} Q}{[\Delta x \Delta y \Delta z]} / \varepsilon_0 \right)$$

ρ_c :電荷密度

この関係はベクトル演算子を用いると、簡単に書け記憶しやすい。

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \quad \text{または} \quad \nabla\vec{E}=\frac{\rho_c}{\varepsilon_0}$$

いずれも左辺は

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

を、まとめた書き方。特に後者は、形式的に

$$\nabla\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \text{と} \quad \vec{E}=\left(E_x,E_y,E_z,\right)$$

の内積と考えたものである。

今日の問題　マクスウエルの方程式の積分型　を示せ

マクスウエルの方程式の積分型

電場の
面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \sum_{[\text{閉曲面内部}]} Q/\varepsilon_0$$

（電場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS$$

（電磁誘導の法則）

磁場の
面積分

$$\int_{[\text{閉曲面上}]} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$$

（磁場のガウスの法則）

線積分

$$\oint_{[\text{面積の周囲}]} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{[\text{面積を通る}]} I \quad \boxed{+\varepsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_{\text{面積}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS}$$

（アンペール・マクスウエルの法則）

通常、まだ見つかっていない単磁極、磁流の項は書かない。