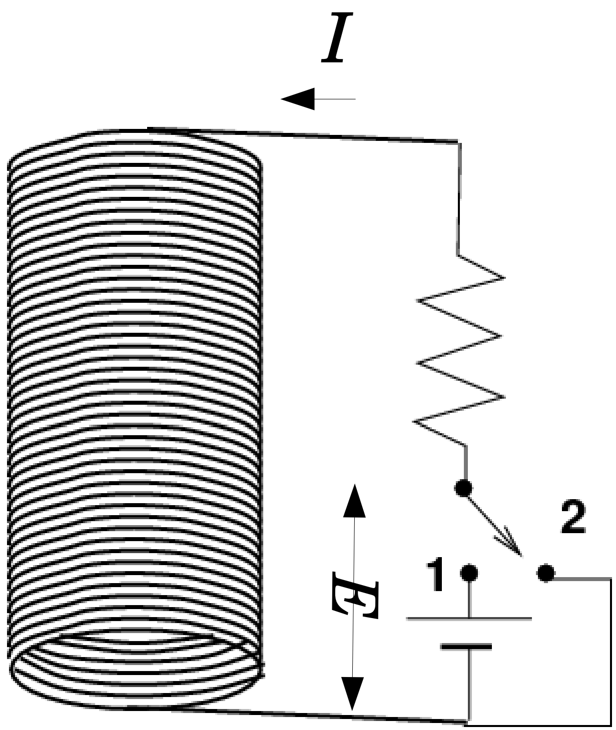
コイルの入った回路 (LR 回路)



左図の様にソレノイドに、電池の様な直流電源を用いて、電流を流していたとしよう。

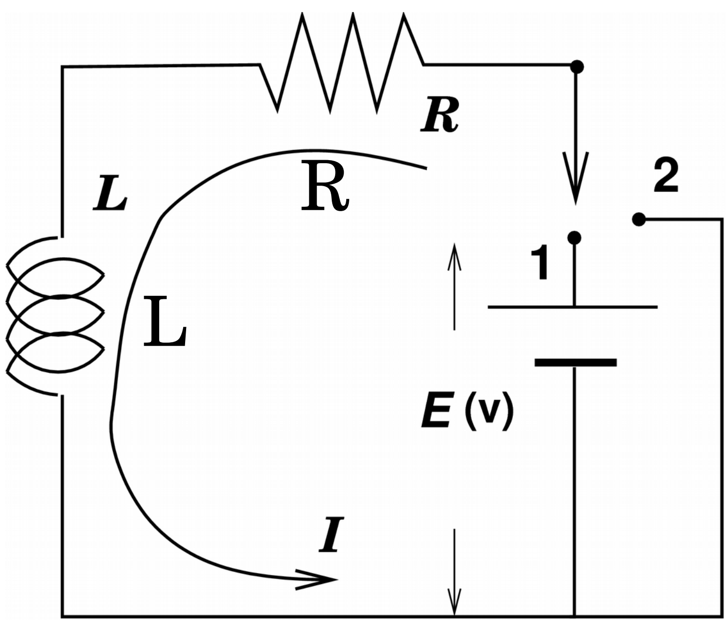
ある瞬間(t=0)に、スイッチが切り替わって、電池のところが、ただの導線に変った。

スイッチ1の状態での電圧のバランス。

$$E = RI + L\frac{dI}{dt}$$

この状態で、長時間放置されれば、電流の時間変化は無視できる。したがって、

$$E = RI$$



スイッチ2の状態での電圧のバランス。

$$0 = RI + L\frac{dI}{dt}$$

スイッチ2の状態で、微分方程式を直接解く

$$0 = RI + L\frac{dI}{dt} \longrightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I$$

$$\longrightarrow \frac{1}{I}\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}$$

(変数分離型の微分方程式)

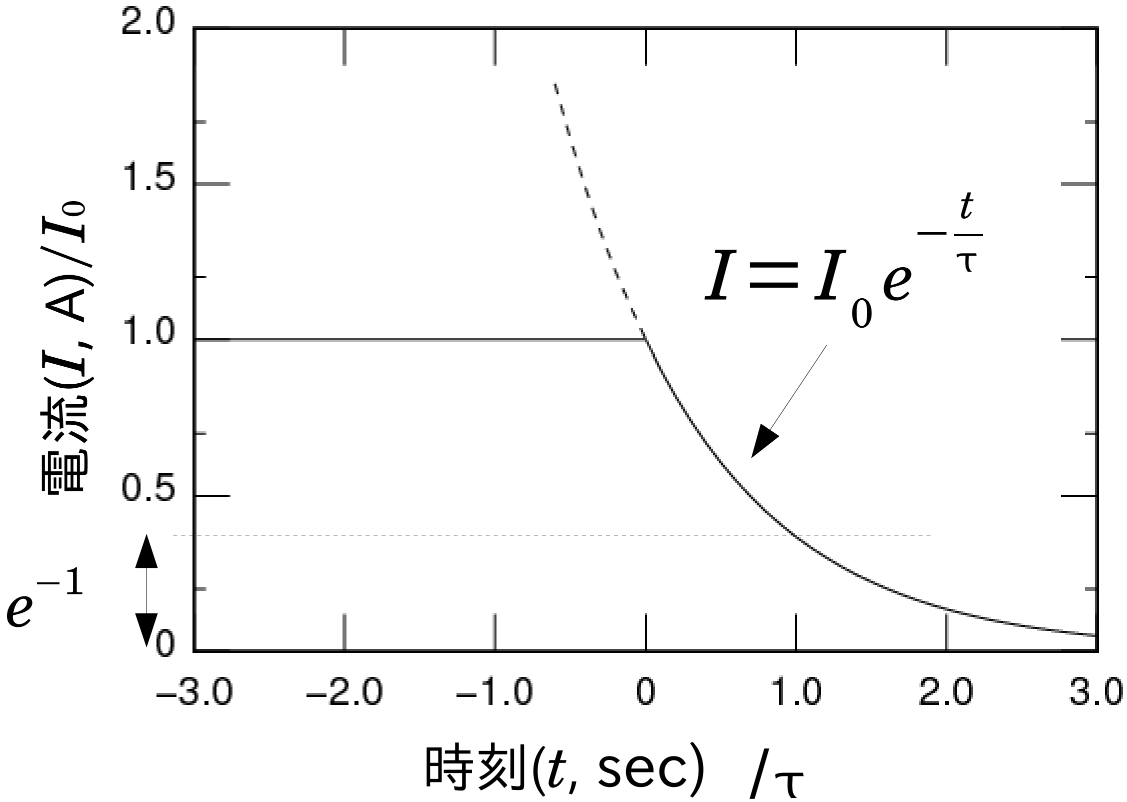
$$\int_0^t \frac{1}{I}\frac{dI}{dt}dt = \int_0^t \left(-\frac{R}{L}\right)dt$$

$$\int_{I(0)}^{I(t)} \frac{dI}{I} = \int_0^t \left(-\frac{R}{L}\right)dt$$

$$\log\frac{I(t)}{I(0)} = -\left(\frac{R}{L}\right)t \longrightarrow I(t) = I(0)e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

電流を時間 t の関数で表す。

$$I(t)=I_0 e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$ ただし、 $$I_0=I(0)$$



$$\tau \equiv \frac{L}{R}$$:時定数

時刻 t=0 で、スイッチ1から、スイッチ2に、切り替わった。

スイッチが2に切り替わってから、抵抗に発生する全熱量U

$$U=\int_0^\infty R\cdot I^2(t)\,dt=\int_0^\infty R\cdot\left[I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\right]^2 dt$$

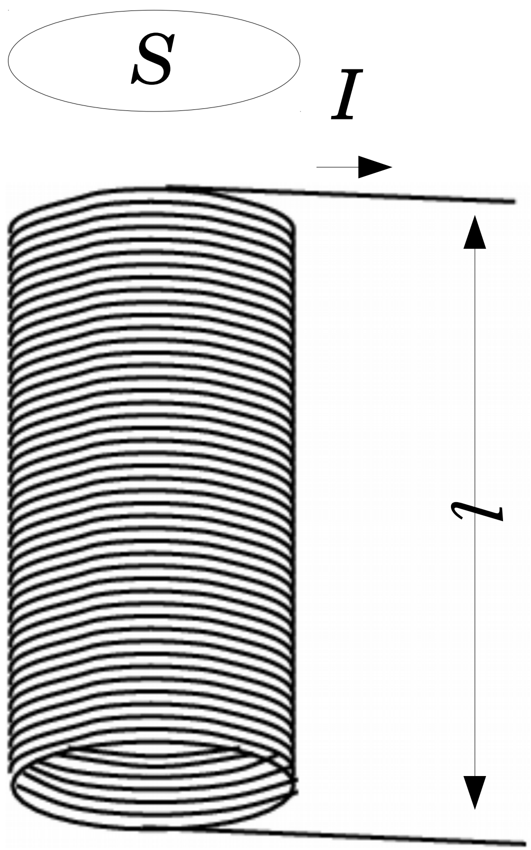
$$=R\cdot I_0^{\,2}\cdot\frac{\tau}{2}\cdot\left[e^{-2\frac{t}{\tau}}\right]_0^\infty$$

したがって、

$$\boxed{U=\frac{1}{2}LI_0^{\,2}}$$

は、状態1で、電流I_0が流れていた時、
コイルに蓄えられていたエネルギー

ソレノイドの、自己インダクタンスは



$$L = lS\mu_0 n_1^2$$

また、

$$B = \mu_0 n_1 I$$

したがって、電流 I が流れるコイルに蓄えられたエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} lS\mu_0 n_1^2 I^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 [lS]$$

$[lS]$は、ソレノイド内部の体積だから、

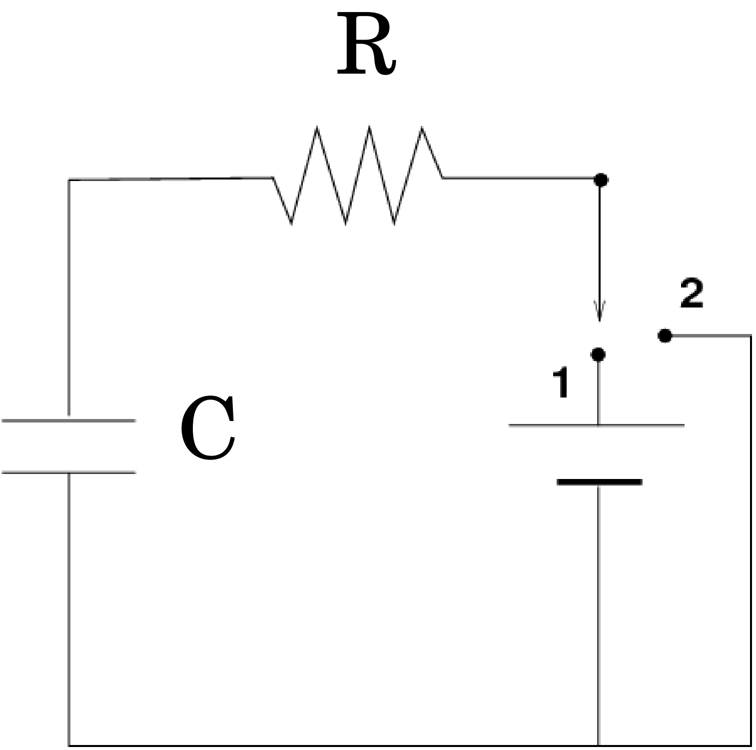
$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

は、ソレノイド内部の磁場のエネルギー密度と考えられる。

今日の問題、

コンデンサーを含む回路。

$$I=\frac{dQ}{dt}$$ に注意



1、スイッチ1では、次の微分方程式が成り立つ。

$$RI+\frac{Q}{C}=E \quad \text{または、} \quad R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E$$

このまま、電荷の移動が無くなるまで放置する。
最終的にコンデンサーに蓄えられる電荷 Q_0
を求めよ。

2、スイッチ2では、次の微分方程式が成り立つ。

$$RI+\frac{Q}{C}=0 \quad \text{または、} \quad R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

時刻 t=0 で、スイッチを1から、2に切り
替えたとして、コンデンサーに蓄えられた
電荷Qの時間変化を示せ。