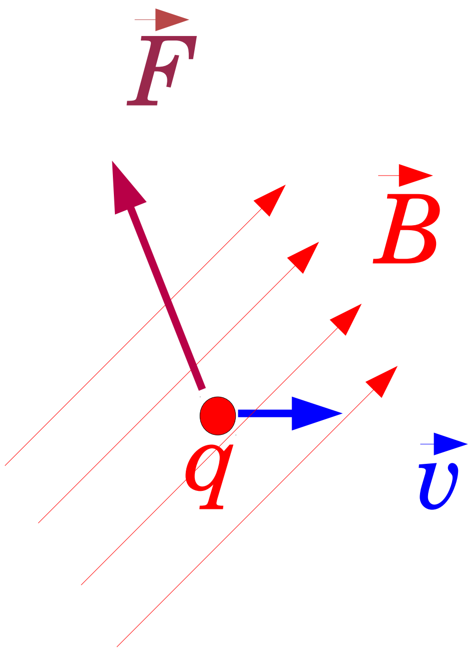
磁場が電荷にあたえる力
やはり外積で表現される



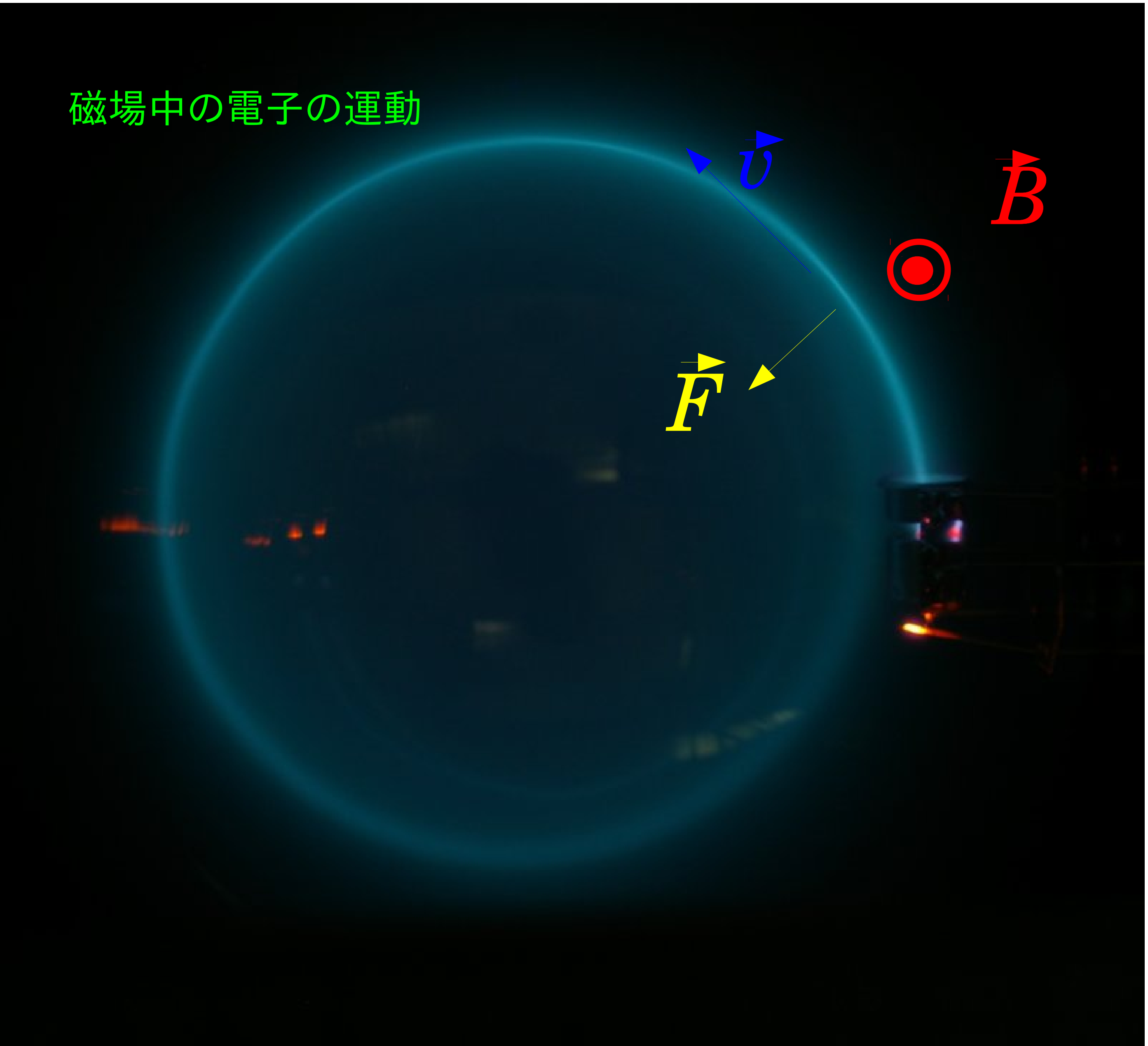
$$\vec{F}=q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

電場も加えて、電磁場が電荷に与える力は

$$\vec{F}=q\left(\vec{v}\times\vec{B}+\vec{E}\right)$$

ともっとも一般的に書かれる。
これを、ローレンツ力と呼ぶ。

磁場が電荷にあたえる力の実験



力の大きさだけ考える

$$F_{磁場}=evB$$

これと遠心力

$$F_{遠心力}=\frac{mv^2}{r}$$

が釣り合うと考え

$$evB=\frac{mv^2}{r}$$

半径が、粒子の速度と
磁場の強さから

$$r=\frac{mv}{eB}$$

と求められる。

一様な磁場中の荷電粒子の運動方程式は、

荷電粒子の速度を

$$\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

とおくと、

一様な磁場ベクトルを

$$\vec{B}=(B_x, B_y, B_z)$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=q(\vec{v}\times\vec{B})$$

特に、運動エネルギーは、

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}$$

だから、

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\right)=\vec{v}\cdot\left(m\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

だが、運動方程式を代入すると、

$$\frac{dE}{dt}=\vec{v}\cdot\left(q(\vec{v}\times\vec{B})\right)=q[\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})]=\boxed{0} \qquad \left(\vec{v}\perp(\vec{v}\times\vec{B})\right)$$

つまり、磁場中では（加速度は受けるが）運動エネルギーは変化しない。

一様な磁場中の荷電粒子の運動

運動方程式 $m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$ を、

$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$

$$\vec{v}=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$$

とおいて解く。ここで磁場はz軸に平行と考えてみると、

$$\vec{B}\|\hat{k} \longrightarrow \vec{B}=B_z\hat{k}=B\cdot\hat{k}$$

$$m\frac{d}{dt}\left(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}\right)=q\left(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}\right)\times\left(B\cdot\hat{k}\right)$$

$$=q\left(v_xB\left(\hat{i}\times\hat{k}\right)+v_yB\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)\right)$$

$$=q\left(-v_xB\cdot\hat{j}+v_yB\cdot\hat{i}\right)$$

つまり、

$$m\frac{dv_x}{dt}= q\cdot v_y\cdot B \qquad \text{...(a)}$$

$$m\frac{dv_y}{dt}=-q\cdot v_x\cdot B \qquad \text{...(b)}$$

$$m\frac{dv_z}{dt}=0$$

b を a に代入して

$$\frac{d^2v_x}{dt^2}=\frac{qB}{m}\frac{dv_y}{dt}\cdot B=-\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x$$

$$\frac{d^2v_x}{dt^2}+\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x=0$$

$$v_x=v_\perp \sin(\omega t)$$

ただし、 $\omega=\dfrac{qB}{m}$

$$v_y=v_\perp \cos(\omega t)$$

$$v_z=v_\parallel$$

$$v_x = v_\perp \sin(\omega t)$$

$$\rightarrow \quad x = \int v_x dt + x_0 = \int v_\perp \sin(\omega t) dt + x_0 = -r_0 \cos(\omega t) + x_0$$

$$v_y = v_\perp \cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \quad y = \int v_y dt + y_0 = \int v_\perp \cos(\omega t) dt + y_0 = \ \ r_0 \sin(\omega t) + y_0$$

$$v_z = v_\parallel$$

$$\rightarrow \quad z = v_\parallel t + z_0$$

$$r_0 = \frac{v_\perp}{\omega} = \frac{m v_\perp}{qB} = \frac{p_\perp}{qB}$$

まとめると、

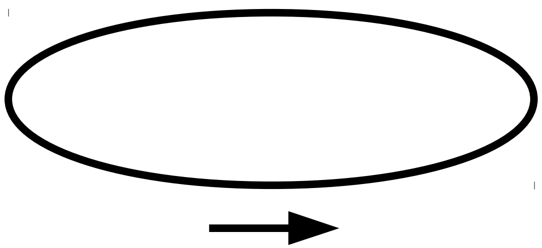
$$x = -r_0 \cos(\omega t) + x_0$$

$$y = \ \ r_0 \sin(\omega t) + y_0$$

$$z = v_\parallel t + z_0$$

Z 方向の螺旋運動

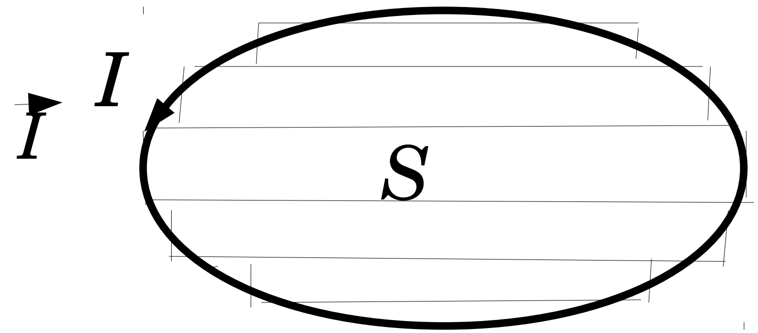
磁気双極子の最小単位



形は円形とは限らない。

磁気双極子モーメントの計算

$$m = I \cdot S$$

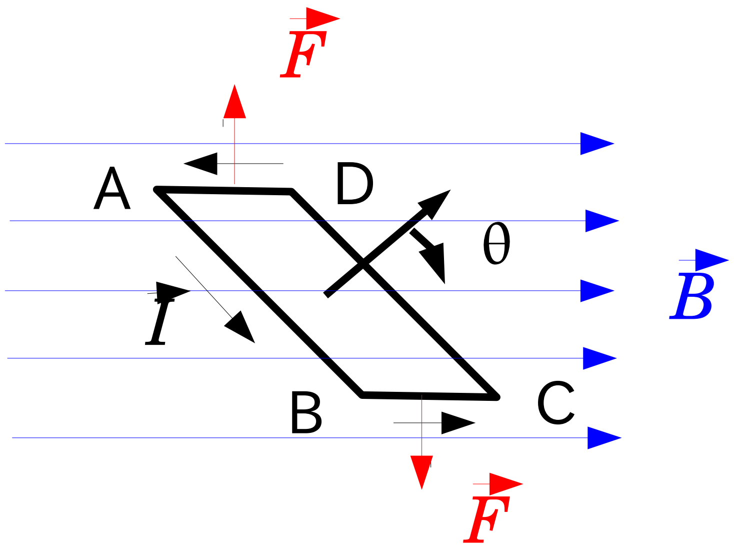


長方形を組み合わせて
任意の一周する電流を
近似する。==＞　面積に比例

ベクトルとしての
方向は面に垂直、
電流と右ネジの関係

双極子モーメントと回転力

磁気双極子に働く力

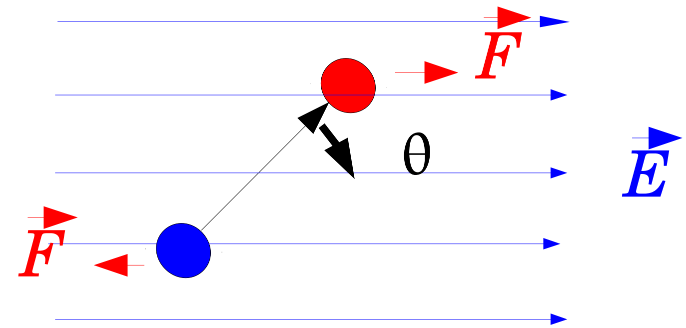


$$N = \sin\theta \cdot \overline{AB} \cdot F$$

$$= B \cdot [I \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC}] \cdot \sin\theta$$

$m \equiv I \cdot S$:磁気双極子モーメント
ただし、 $S = \overline{AB} \cdot \overline{BC}$

電気双極子に働く力



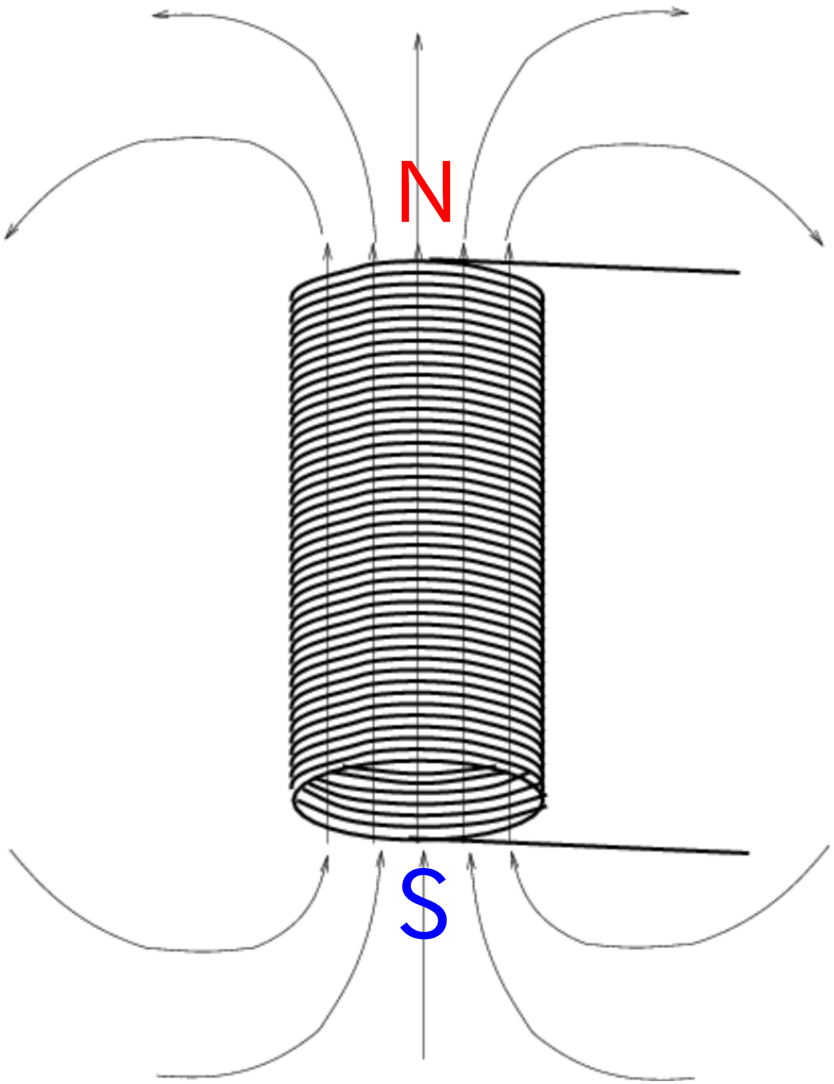
$$N = \sin\theta \cdot l \cdot F$$

$$= E \cdot [lQ] \cdot \sin\theta$$

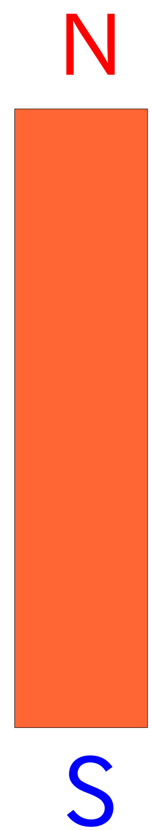
$p \equiv l \cdot Q$:電気双極子モーメント

磁気双極子

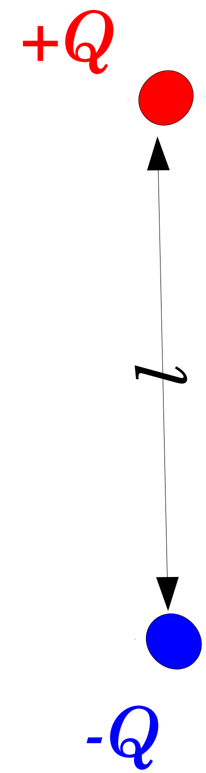
有限の長さのソレノイドは、両端から磁場が漏れ出して、
磁石の様に見える。



ソレノイド



棒磁石



電気双極子

今日の問題、一様で、静止している磁場中の荷電粒子

磁場中で、動いている電子がある。
どのような運動をするか、知ることを述べよ。

磁場中の電子の運動