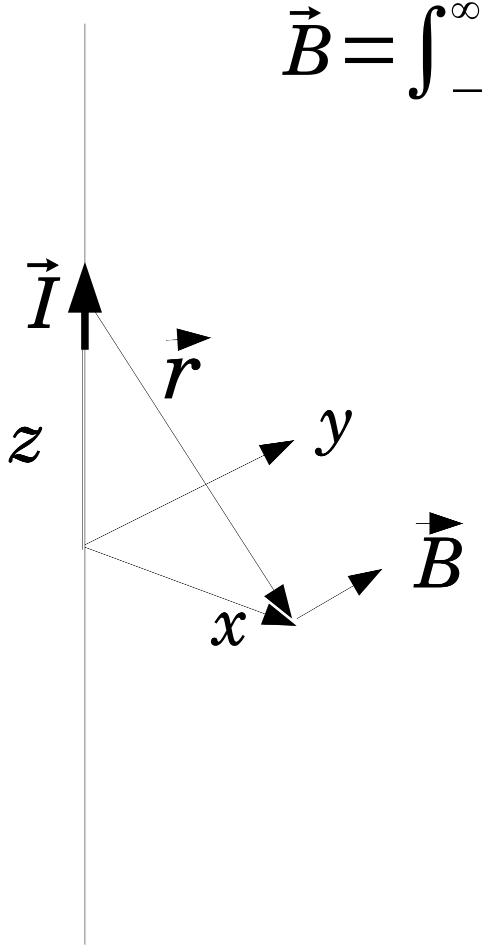
# 無限に長い直線電流の作る磁場




$$\vec{B}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{I}\times\hat{r}}{r^2}dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{I}\times\vec{r}}{r^3}dz \qquad \left(\hat{r}=\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{I}=I\cdot\hat{k} \qquad \vec{r}=x\hat{i}-z\hat{k}$$

$$\vec{I}\times\vec{r}=I\cdot x(\hat{k}\times\hat{i})-I\cdot z(\hat{k}\times\hat{k})=I\cdot x\cdot\hat{j}$$

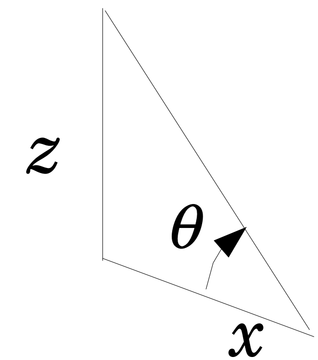
従って、

$$\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$$ とおくと、

$$B_x=B_z=0$$

$$B_y=\frac{\mu_0}{4\pi}I\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}^3}dz=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(z/x)^2}^3}d(z/x)$$

$\frac{z}{x} = \tan\theta$ とおくと




$$d(\tan\theta) = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$1 + \tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+(z/x)^2}^3} d(z/x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}^3} d(\tan\theta)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

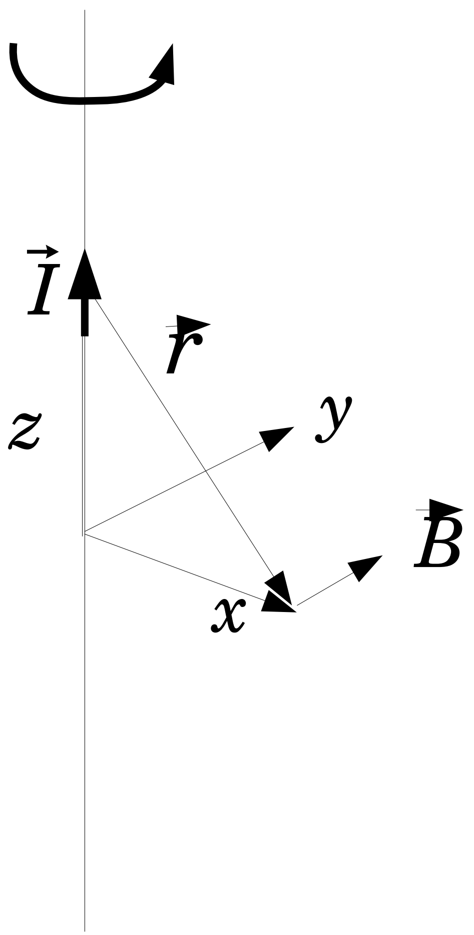
$$= 2$$

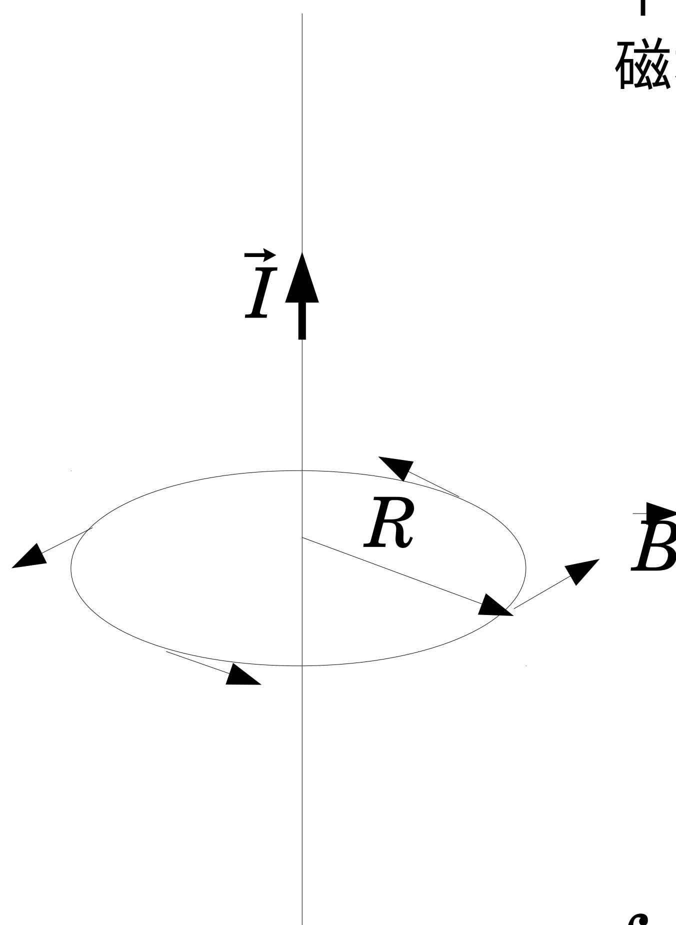
続き

したがって

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

# 回転対称性



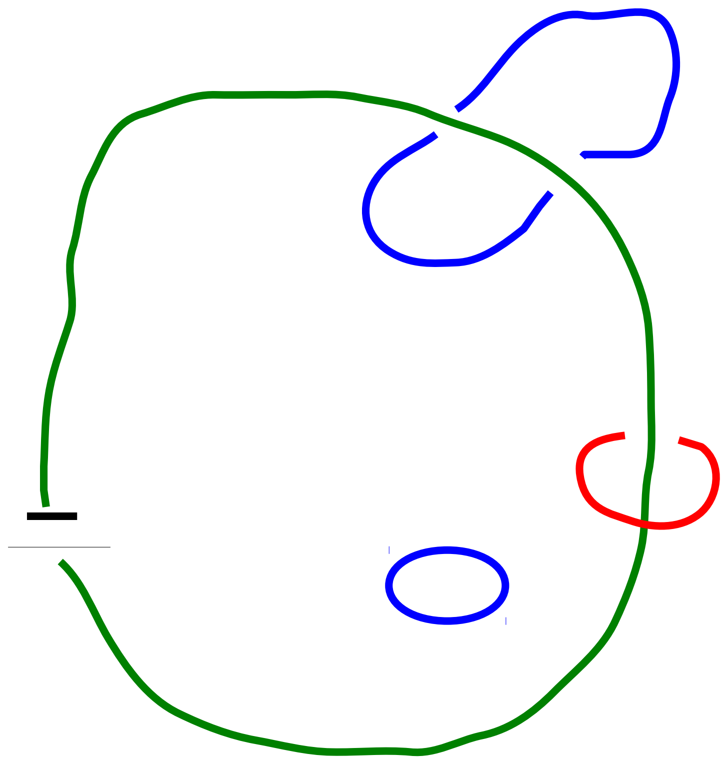

回転対称性を考えると、
半径 $R$ の円周上どこでも
磁場の強さは、

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

円周一周の積分は、

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \oint B\, ds = \mu_0 I$$

実は、もっと一般的な法則**アンペールの法則**が成り立つ



閉じた定常電流に対し、任意の一周積分は、

その中を電流が通っていれば、

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

通っていない場合は

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

注意：磁場に対するガウスの法則は常に

$$\int \vec{B}\cdot \hat{n}\, dS = 0$$

磁力線は、閉曲線であること、
面積分は面を通る磁力線の数を数える操作なので、自明

# ソレノイド(空芯電磁石)

実際のソレノイド

アンペールの法則

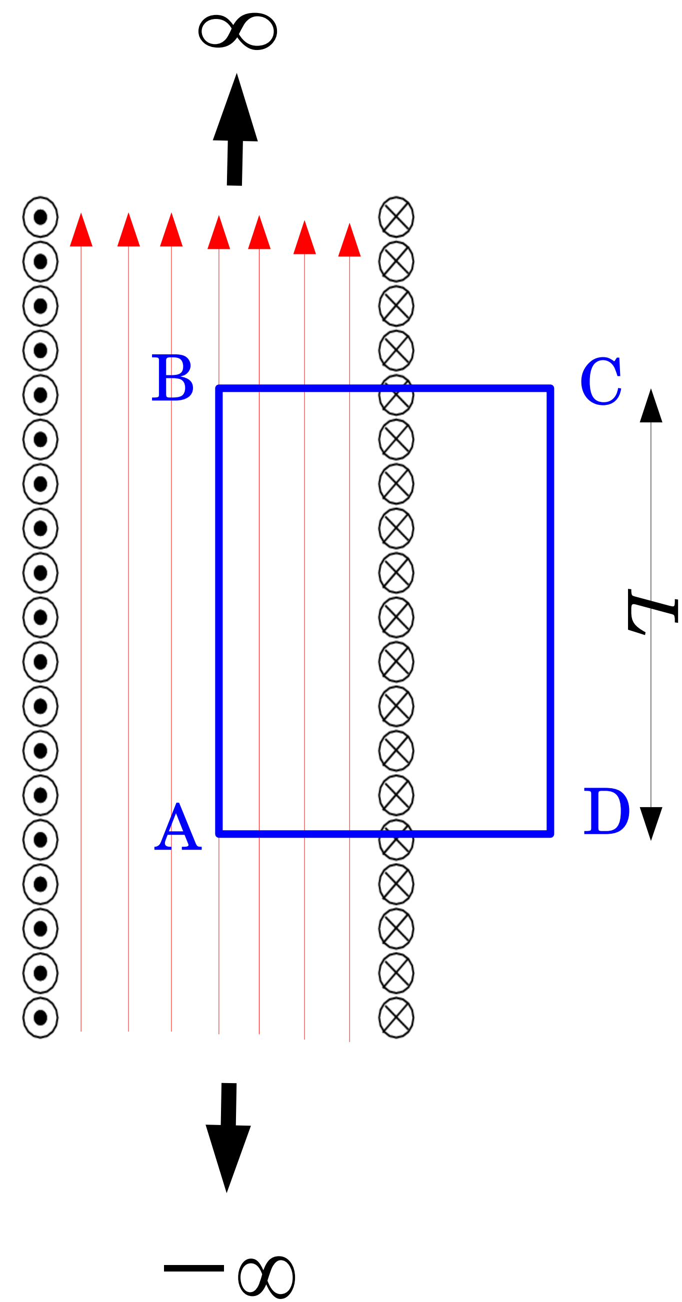
$$\oint_{ABCD} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{ABCDの中} I$$

$$= \mu_0 n_1 I \cdot L$$

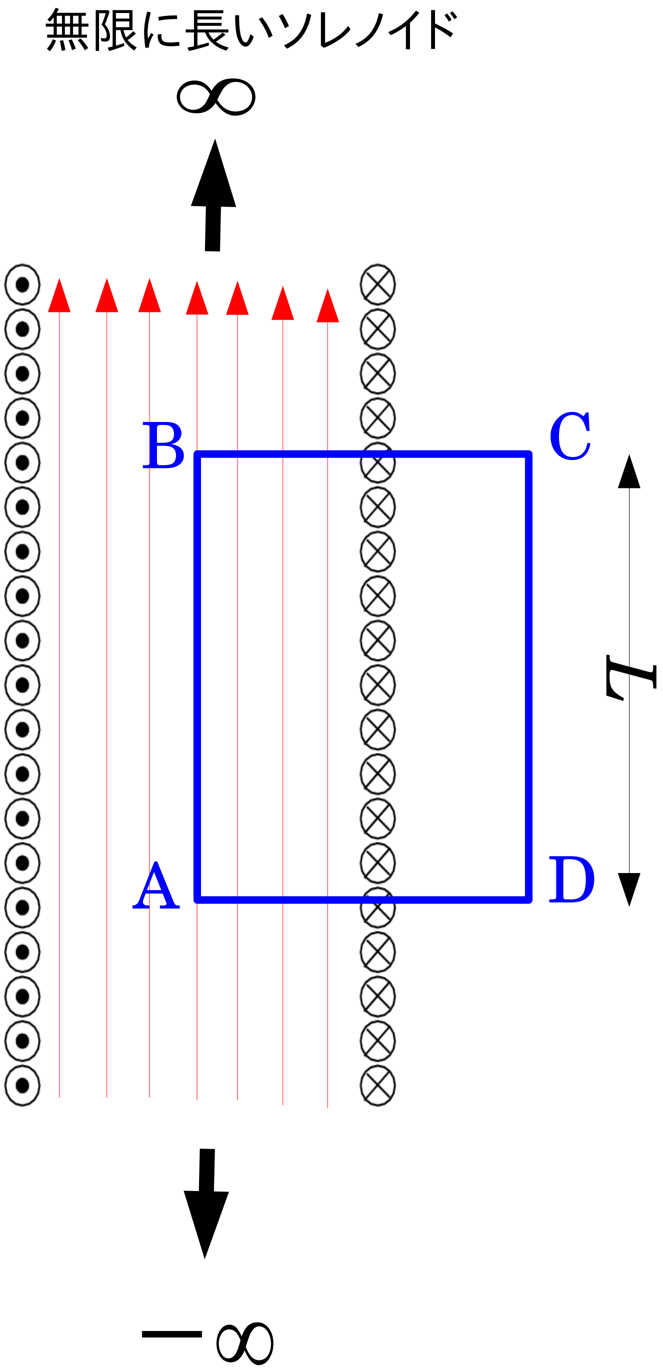
$n_1$: 巻き線密度＝単位長さに巻かれた線の数

$$\oint_{ABCD} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{AB} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_{BC} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_{CD} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_{DA} \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

無限に長いソレノイド



# ソレノイド(続き)




磁場はソレノイドの中心線と並行と考えて、

$$\int_{AB} \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\cdot L$$

$$\int_{BC} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_{DA} \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

$CD$を無限遠に持っていけば、$B=0$ だろう。従って、

$$\int_{CD} \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

つまり、

$$B\cdot L = \mu_0 n_1 I\cdot L$$

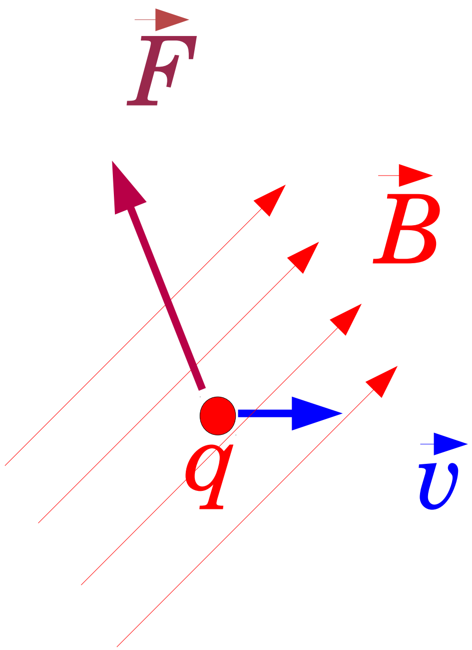
内部

$$B = \mu_0 n_1 I$$

外側

$$B = 0$$

# 磁場が電荷にあたえる力
やはり外積で表現される




$$\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B})$$

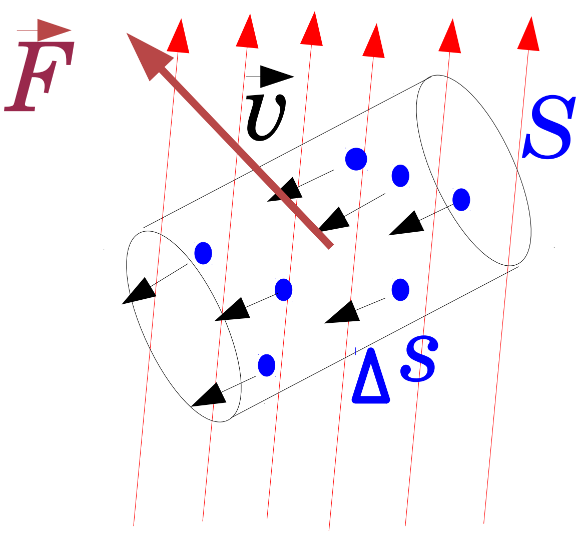
電場も加えて、電磁場が電荷に与える力は

$$\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B}+\vec{E})$$

ともっとも一般的に書かれる。
これを、ローレンツ力と呼ぶ。

# 磁場が電流に与える力

短い区間を流れる電流が磁場から受ける力は、
その中の電荷(電子)が磁場から受ける力の合計。




$$\vec{I}=-e\rho_e S<\vec{v}>$$ 電流の定義

$$\vec{F}=-e(\vec{v}\times\vec{B})$$ 電子一個受ける力

この区間の中の自由電子の数は

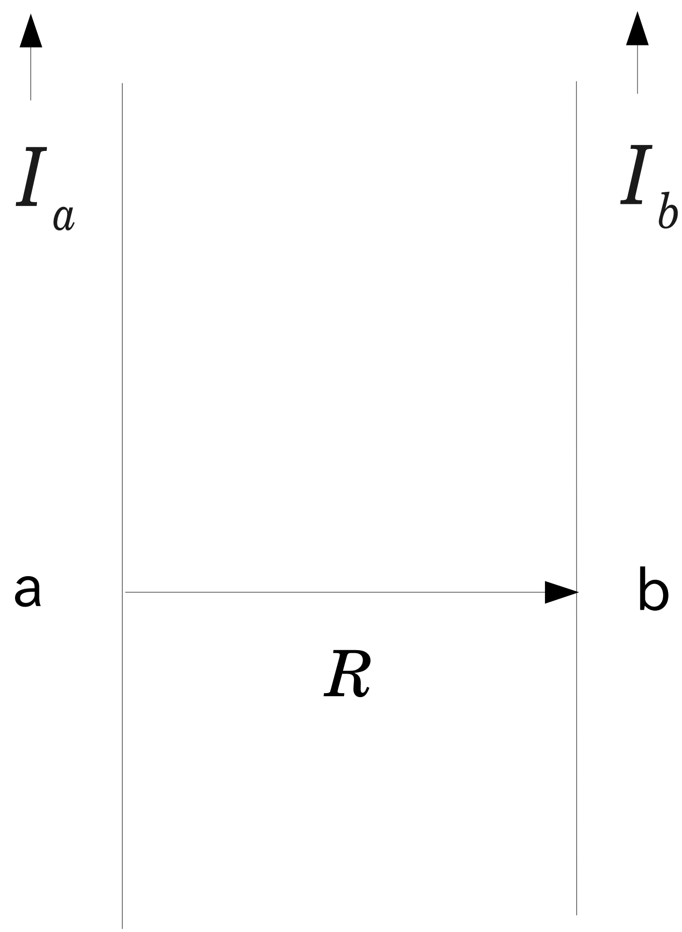
$$N_e=\rho_e\cdot S\cdot\Delta s$$

したがって、

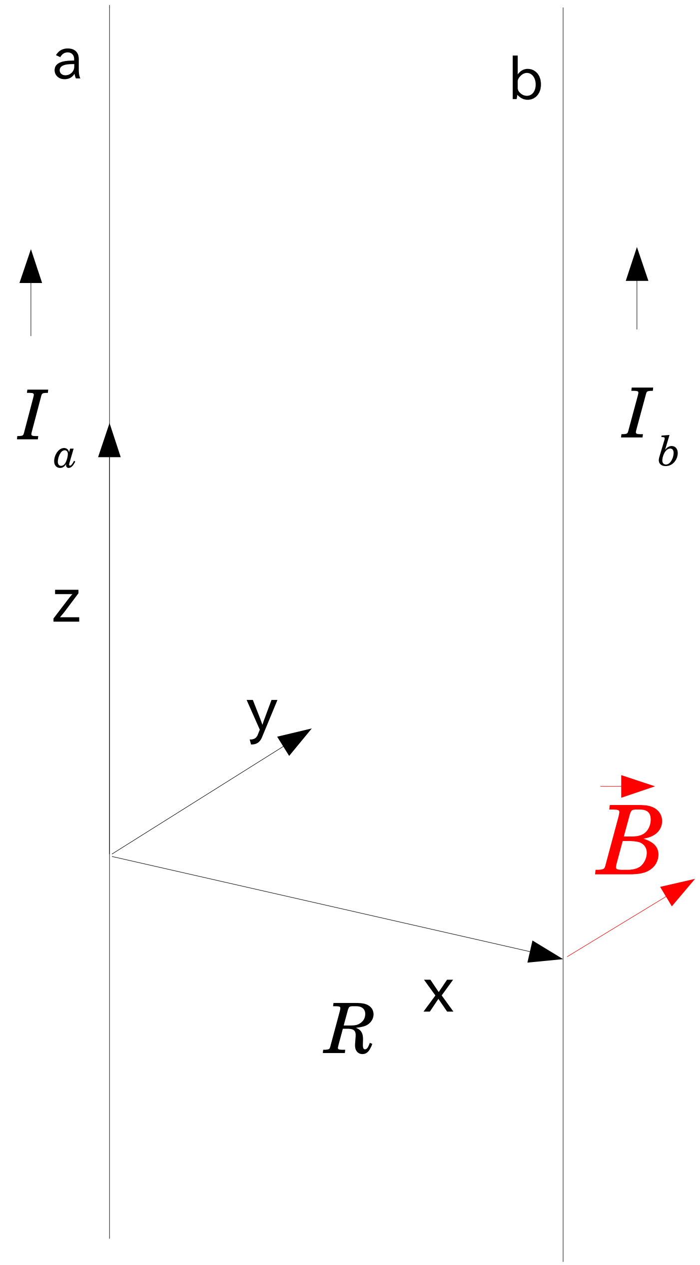
$$\Delta\vec{F}=[\vec{I}\cdot\Delta s]\times B=\vec{I}\times\vec{B}\Delta s$$

今日の問題

下図の様に二つの直線(a,b)を電流が流れている。
それぞれの間に働く、単位長さあたりの力を求めよ。



# 平行な直線電流に働く力




まず、直線電流a が直線電流b の位置につくる磁場の強さ$B$ を求める。a bの距離は$R$だから、図のように座標を導入して

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I_a}{2\pi R}\hat{j}$$

次に、直線電流b が、磁場から受ける力を求める。

$$\Delta\vec{F}=[(I_b\hat{k})\times\vec{B}]\Delta s=[\frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi R}(\hat{k}\times\hat{j})]\Delta s$$

また、 $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$ より、

単位長さあたりの力は

$$\vec{F}=-\frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi R}\hat{i}$$

つまり、2つの電流は引き合う