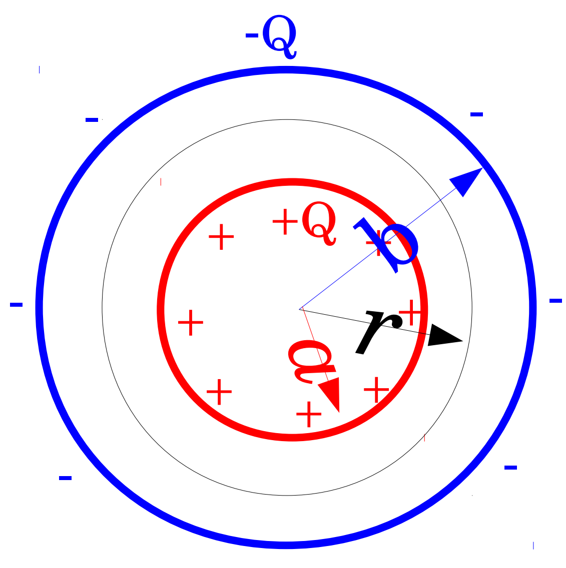
球形コンデンサー
半径aとbの、2つの同心球に一様に電荷が分布して、それぞれ合計が
+Q, -Q（絶対値は等しく、符号が反対）。ガウスの法則を考え、

$$\varepsilon_0 \int_S \left(\vec{E}\cdot\hat{n}\right) dS = \sum_{\text{内側にある電荷}} Q$$

同じ中心を持つ半径 r の球の内部の電荷を評価すると、



$$\sum_{\text{内部}} Q = \begin{cases} +Q - Q = 0 & (b<r) \\ Q & (a<r<b) \\ 0 & (r<a) \end{cases}$$

ガウスの法則へ応用して、

$$\varepsilon_0 4\pi r^2 \cdot E = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

以上より、
電場の大きさは、

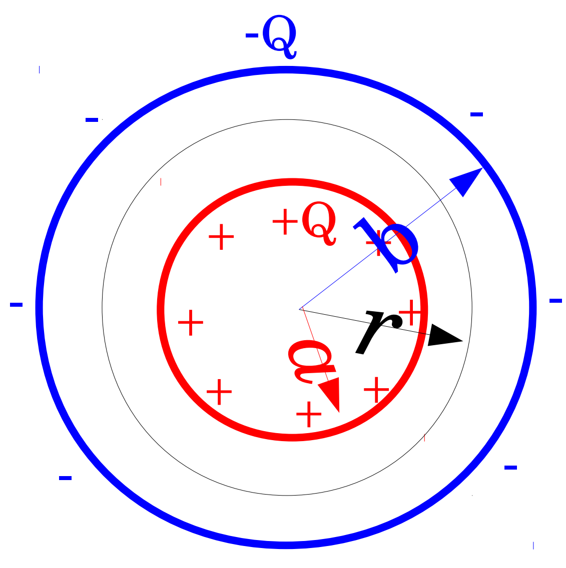
$$E = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

ベクトルで書いて、

$$\vec{E} = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

球形コンデンサー
下図の様な球形コンデンサーに置いては、電場の大きさがが0と異なるのは $(a < r < b)$ の範囲のみである。

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\hat{r}}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$

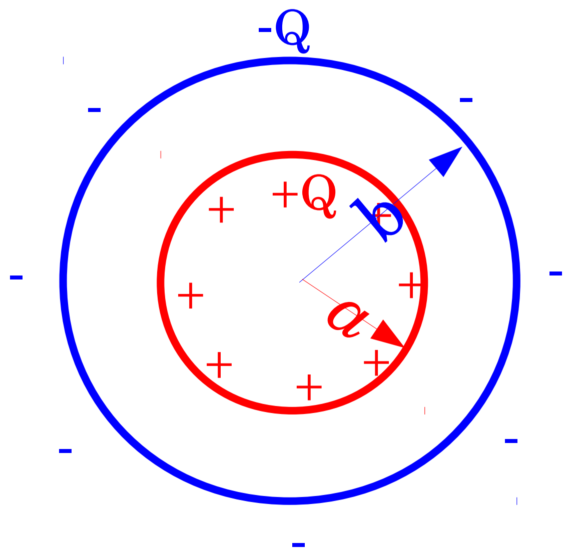


$(a < r < b)$ の範囲では、クーロン電場と似ているのでこの範囲で、クーロン電場と同じ電位を持つと考えると、球形コンデンサーの電位は、rの関数として

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{b} & (b < r) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & (a < r < b) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{a} & (r < a) \end{cases}$$

となる。

球形コンデンサー(理想的コンデンサー)



半径 aと bの球面を極板と考える。

電場はこの極板の間 $(a<r<b)$に、だけ存在する。

$$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

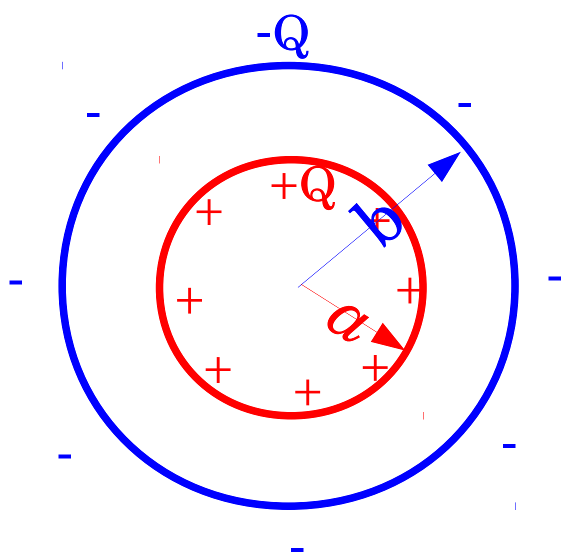
極板間の電位差　(クーロン場の時と同様)

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

電気容量

$$Q=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}V$$ より $$C=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

球形コンデンサーに蓄えられるエネルギー



電気容量

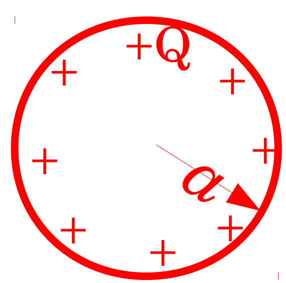
$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

より、蓄えられるエネルギーは、

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

b → ∞ の時、

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

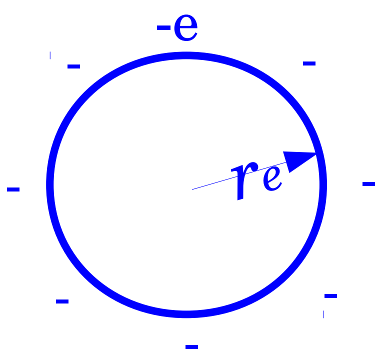


電気容量も

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

となる。

電子の古典半径



電子が半径 r_e の球と考えると、電子の電場のエネルギーの合計は、コンデンサーとしてのエネルギーに等しい。

$$U = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_e}$$

これが電子の静止エネルギー(mc^2、相対性理論より)
に等しいと考えると、電子の半径として、

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}$$

が得られる。これを電子の古典半径と呼ぶ。

物理量　：物理的な量で、単位つきで用いられる。

古典力学で最も基本的と考えられる物理量は、

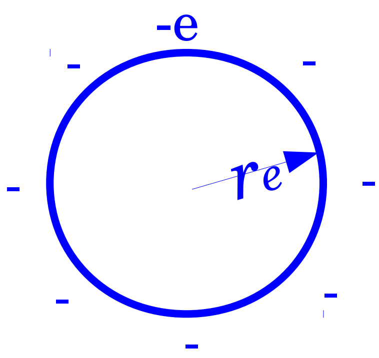
長さ(m)、時間(s)、質量(kg)

電磁気学ではこれに電荷量が加わる。しかし、測定のし易さから、
電流(A)が基本物理量として用いられる。(MKSA単位系)

物理量	良く使われる単位	基本単位だけで表すと
力	N(ニュートン)	kg m s^{-2}
電荷	C(クーロン)	A s
電位	V(ボルト)	kg m^2 s^{-3} A^{-1}
電場の強さ	V/m = N/c	kg m s^{-3} A^{-1}
コンデンサーの容量	F(ファラッド)	$kg^{-1}$$m^{-2}$ s^4 A^2

注意　ε_0 もただの数でなく　$8.85418782\mathrm{x}10^{-12}$ $kg^{-1}m^{-3}$ s^4 A^2
と単位つきで書かれる物理量。　(良く使われる単位としては F/m)

電子の古典半径 (2)



$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}$$ に、具体的な数値

$$e = -1.60217653\times10^{-19}\,[A\,sec]$$

$$m = 9.1093826\times10^{-31}\,[kg]$$

$$\varepsilon_0 = 8.85418782\times10^{-12}\,[m^{-3}kg^{-1}sec^4A^2]$$

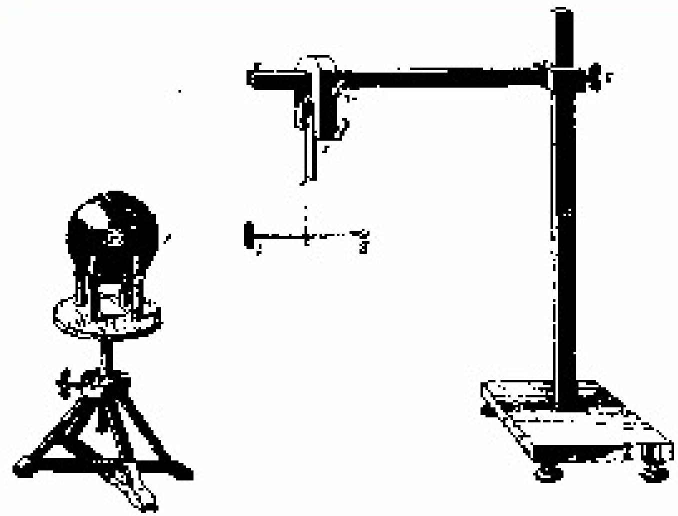
$$c = 2.99792458\times10^{8}\,[m\cdot sec^{-1}]$$

を代入すると、

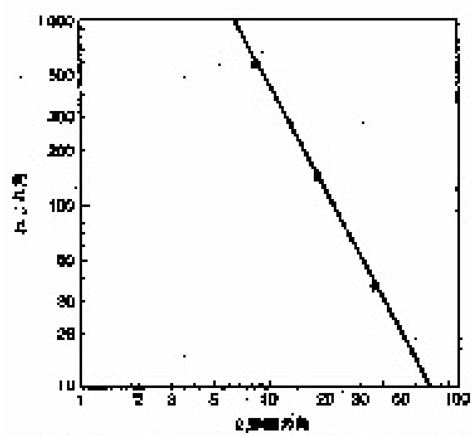
$$r_e = \frac{(1.6022\times10^{-19})^2}{8\times3.1416\times8.8542\times10^{-12}\times9.1094\times10^{-31}\times(2.9979\times10^{8})^2}\left[\frac{[A\,sec]^2}{[m^{-3}kg^{-1}sec^4A^2][kg][m\cdot sec^{-1}]^2}\right]$$

$$r_e = 1.4090\times10^{-15}\,[m]$$

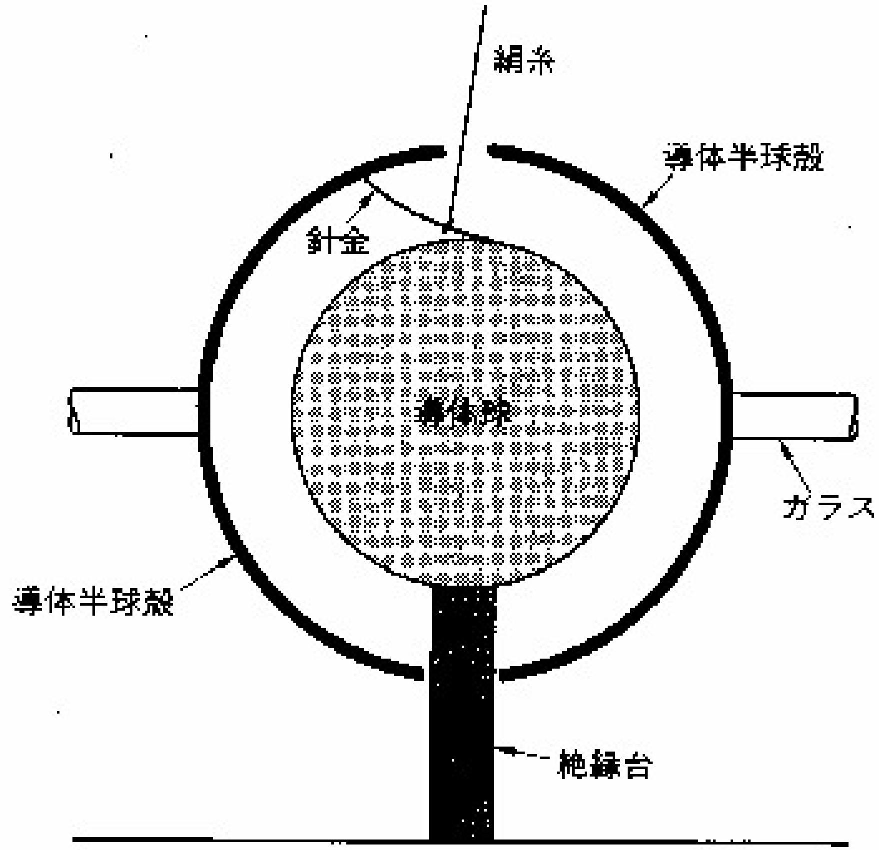
クーロンの実験の問題点とキャベンディッシュの実験



▲図２　クーロンが電気引力の実験に用いた装置



▲図３　クーロンが報告している測定値を対数-対数グラフにプロットした図



▲図４　キャベンディッシュの実験の略図

内部導体球上の電荷の有無を測定

図の出典：歴史を変えた物理実験」(霜田光一著(丸善))

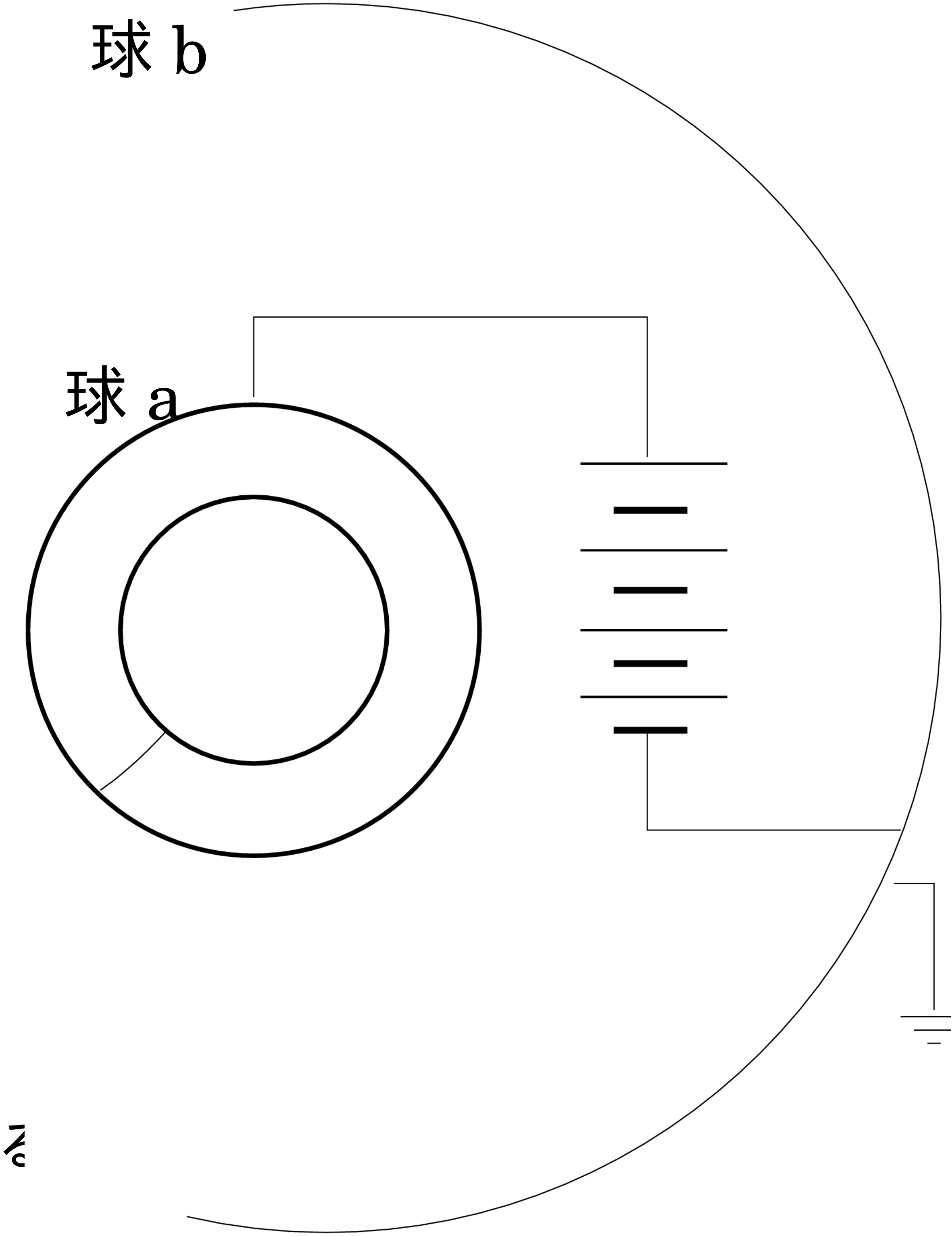
キャベンディッシュの実験
の解釈

無限遠に、半径無限大の球bがあると考えると、ガウスの定理により、球aの内部の電場は0。

なので、aの内部の球に電荷は運ばれない。つまり、

閉じた球の内部に電荷は蓄えられない。

内側の球の電荷が完全に0ならば、
ガウスの法則の厳密な証明になる。
したがって、
クーロンの法則の r のベキは、-2であ



電場と物質の関係、コンデンサーの中に物質を入れた、思考実験

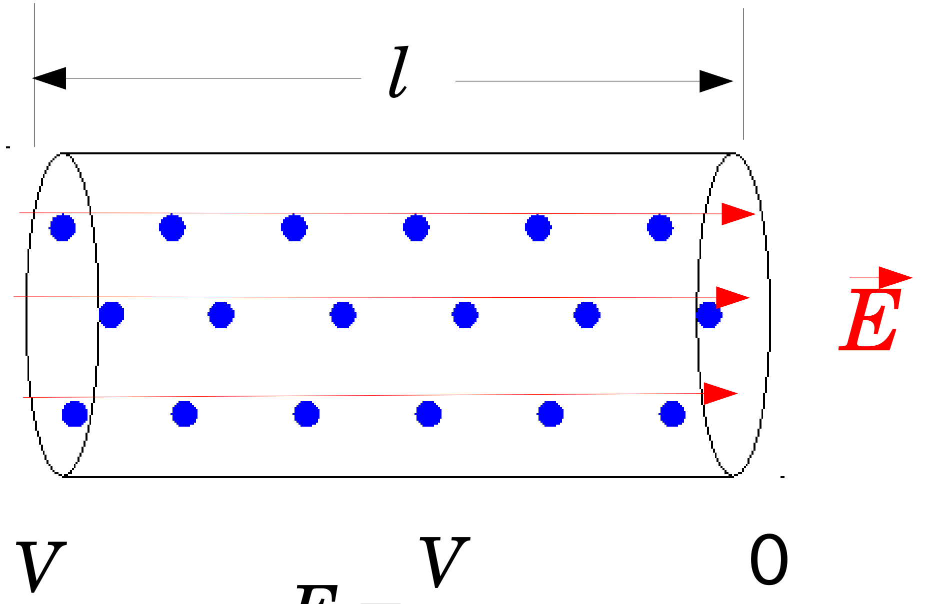
導体と不導体(誘電体)

Wikipediaより

注：ほとんどの有機化合物は不導体。

導体

電子が比較的自由に移動できる



$$E = \frac{V}{l}$$

電位差があると、内部に電場ができて電子が移動する。

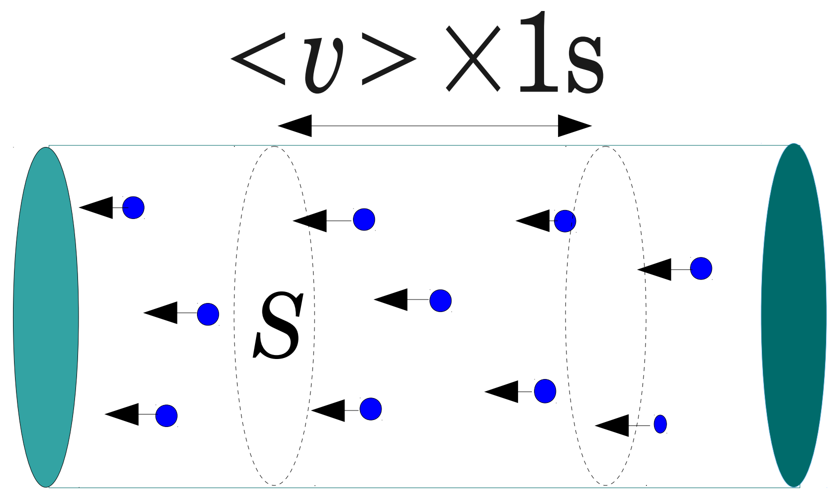
逆に言うと、電子の移動が無い状態では、

- 導体の内部に電場は存在しない。
- つまり、導体の電位はどこでも一定。

電流を流しつづけるためには、電位差を維持する必要
==> 起電力(発電機、電池など)

電流

断面積



単位時間(1s)に断面を通過する電荷の量 = 体積 $[S<v>]$ の中の移動できる電荷

(方向も考えて)

$$\boxed{\vec{I} = -e\rho_e S <\vec{v}>}$$

ただし、ρ_e は移動できる電子(自由電子)の密度

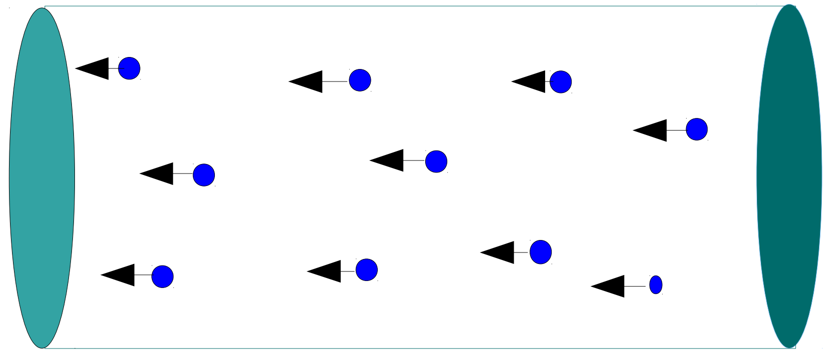
粘性抵抗(速度に比例する抵抗)を仮定すると、 $<\vec{v}> = \alpha \vec{E}$

ここでα は導体の性質により決まる定数。

(方向を忘れて、)

$$I = e\rho_e S \cdot \alpha \frac{V}{l} = \boxed{\frac{S}{l}[e\rho_e \alpha]} V$$

電流が電位差に比例する



$[e\rho_e\alpha]$ は、物質の性質だけで決まり、電気伝導度と呼ばれる。

$$R \equiv \frac{l}{S[e\rho_e\alpha]}$$ とおくと $$I = \frac{V}{R}$$ (オームの法則)

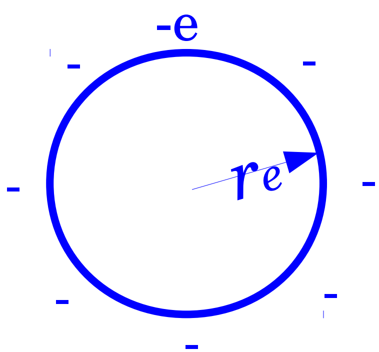
一個の電子が、電位差Vの間を、電場からの力に従って移動すると、eVだけ、電場による位置エネルギーを失う。粘性抵抗の中を移動したとすると、このエネルギーは熱に変化する。

同じ電位差間を電流 I が流れている場合、毎秒 I/e 個の電子が移動するので、毎秒

$$W = eV \cdot \frac{I}{e} = V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R}$$ (ワットの法則)

熱が発生する。

今日の問題：電子の古典半径 を簡単に計算する。



$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{mc^2}$$ に、具体的な数値

$$e = -1.60217653\times 10^{-19}\,[A\,sec]$$

$$m = 9.1093826\times 10^{-31}\,[kg]$$

$$\varepsilon_0 = 8.85418782\times 10^{-12}\,[m^{-3}kg^{-1}sec^4A^2]$$

$$c = 2.99792458\times 10^{8}\,[m\cdot sec^{-1}]$$

を代入すると、

$$r_e = \frac{(1.6022\times 10^{-19})^2}{8\times 3.1416\times 8.8542\times 10^{-12}\times 9.1094\times 10^{-31}\times(2.9979\times 10^{8})^2}$$

$$\left[\frac{[A\,sec]^2}{[m^{-3}kg^{-1}sec^4A^2][kg][m\cdot sec^{-1}]^2}\right]$$

だが、すべての数値を1桁に四捨五入して、1桁の精度で r_e を計算せよ。