

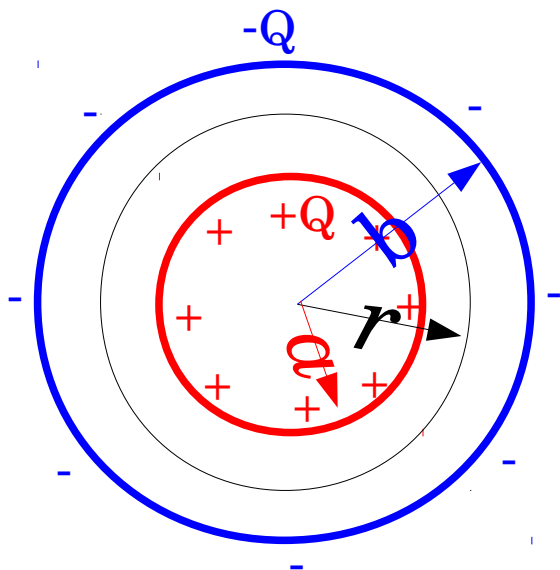
球形コンデンサー

半径 a と b の、2つの同心球に一様に電荷が分布して、それぞれ合計が $+Q$, $-Q$ (絶対値は等しく、符号が反対)。ガウスの法則を考え、

$$\epsilon_0 \int_S (\vec{E} \cdot \hat{n}) dS = \sum_{\text{内側にある電荷}} Q$$

同じ中心を持つ半径 r の球の内部の電荷を評価すると、

$$\sum_{\text{内部}} Q = \begin{cases} +Q - Q = 0 & (b < r) \\ Q & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$



ガウスの法則へ応用して、

$$\epsilon_0 4\pi r^2 \cdot E = \begin{cases} \end{cases}$$

以上より、
電場の大きさは、

$$E = \begin{cases} \end{cases}$$

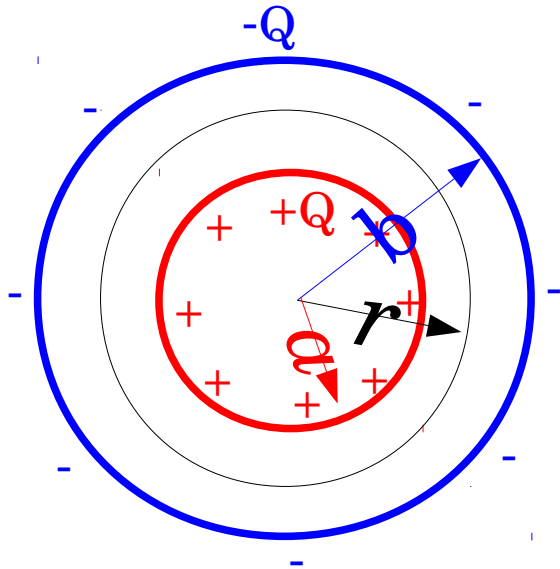
ベクトルで書いて、

$$\vec{E} = \begin{cases} \end{cases}$$

球形コンデンサー

下図の様な球形コンデンサーに置いては、電場の大きさが0と異なるのは $(a < r < b)$ の範囲のみである。

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (b < r) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r < a) \end{cases}$$



$(a < r < b)$ の範囲では、クーロン電場と似ているのでこの範囲で、クーロン電場と同じ電位を持つと考え、球形コンデンサーの電位は、 r の関数として

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} & (b < r) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & (a < r < b) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} & (r < a) \end{cases} \quad \text{となる。}$$

球形コンデンサー(理想的コンデンサー)

半径 a と b の球面を極板と考える。

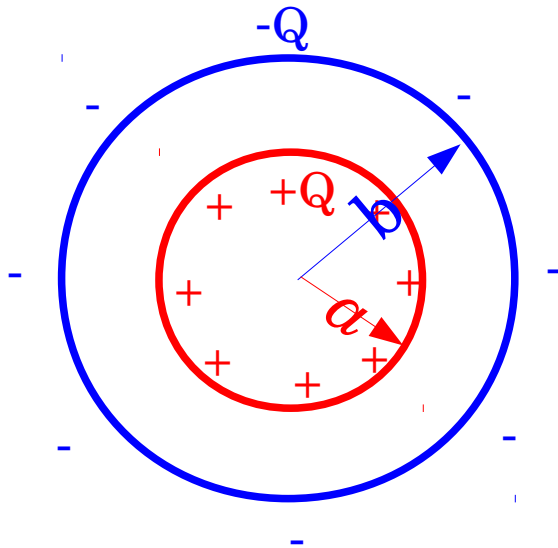
電場はこの極板の間 ($a < r < b$) に、だけ存在する。

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

極板間の電位差 (クーロン場の時と同様)

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

電気容量



$$Q = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} V \quad \text{より}$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

球形コンデンサーに蓄えられるエネルギー

電気容量

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

より、蓄えられるエネルギーは、

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

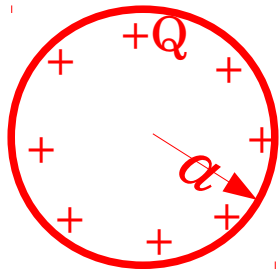
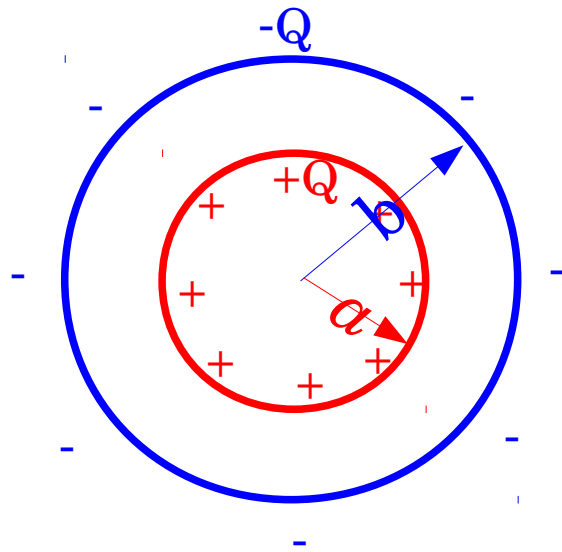
$b \rightarrow \infty$ の時、

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

電気容量も

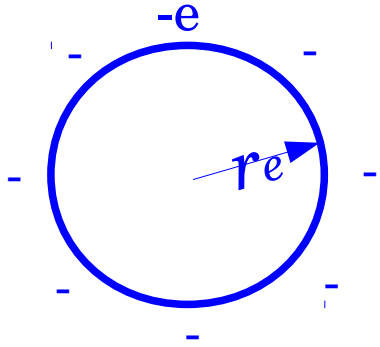
$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$

となる。



電子の古典半径

電子が半径 r_e の球と考えると、電子の電場のエネルギーの合計は、コンデンサーとしてのエネルギーに等しい。



$$U = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_e}$$

これが電子の静止エネルギー(mc^2 、相対性理論より)に等しいと考えると、電子の半径として、

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{mc^2}$$

が得られる。これを**電子の古典半径**と呼ぶ。

物理量 : 物理的な量で、単位つきで用いられる。

古典力学で最も基本的と考えられる物理量は、

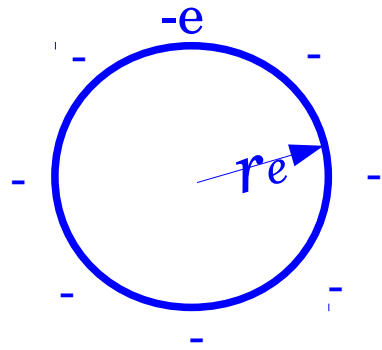
長さ(m)、時間(s)、質量(kg)

電磁気学ではこれに電荷量加わる。しかし、測定のし易さから、電流(A)が基本物理量として用いられる。(MKSA単位系)

物理量	良く使われる単位	基本単位だけで表すと
力	N(ニュートン)	kg m s^{-2}
電荷	C(クーロン)	A s
電位	V(ボルト)	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-3} \text{A}^{-1}$
電場の強さ	$\text{V/m} = \text{N/c}$	$\text{kg m s}^{-3} \text{A}^{-1}$
コンデンサーの容量	F(ファラッド)	$\text{kg}^{-1} \text{m}^2 \text{s}^4 \text{A}^2$

注意 ϵ_0 もただの数でなく $8.85418782 \times 10^{-12} \text{ kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^4 \text{A}^2$ と単位つきで書かれる物理量。(良く使われる単位としては F/m)

電子の古典半径 (2)



$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2} \text{ に、具体的な数値}$$

$$e = -1.60217653 \times 10^{-19} [A \cdot sec]$$

$$m = 9.1093826 \times 10^{-31} [kg]$$

$$\epsilon_0 = 8.85418782 \times 10^{-12} [m^{-3} kg^{-1} sec^4 A^2]$$

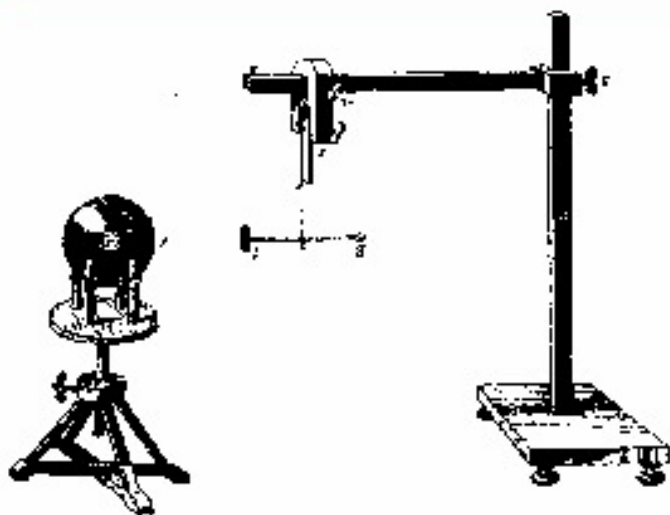
$$c = 2.99792458 \times 10^8 [m \cdot sec^{-1}]$$

を代入すると、

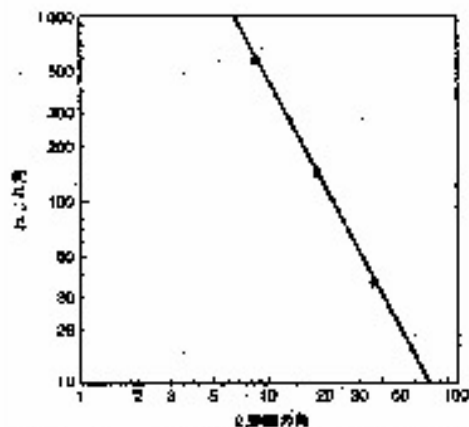
$$r_e = \frac{(1.6022 \times 10^{-19})^2}{8 \times 3.1416 \times 8.8542 \times 10^{-12} \times 9.1094 \times 10^{-31} \times (2.9979 \times 10^8)^2} \left[\frac{[A \cdot sec]^2}{[m^{-3} kg^{-1} sec^4 A^2] [kg] [m \cdot sec^{-1}]^2} \right]$$

$$r_e = 1.4090 \times 10^{-15} [m]$$

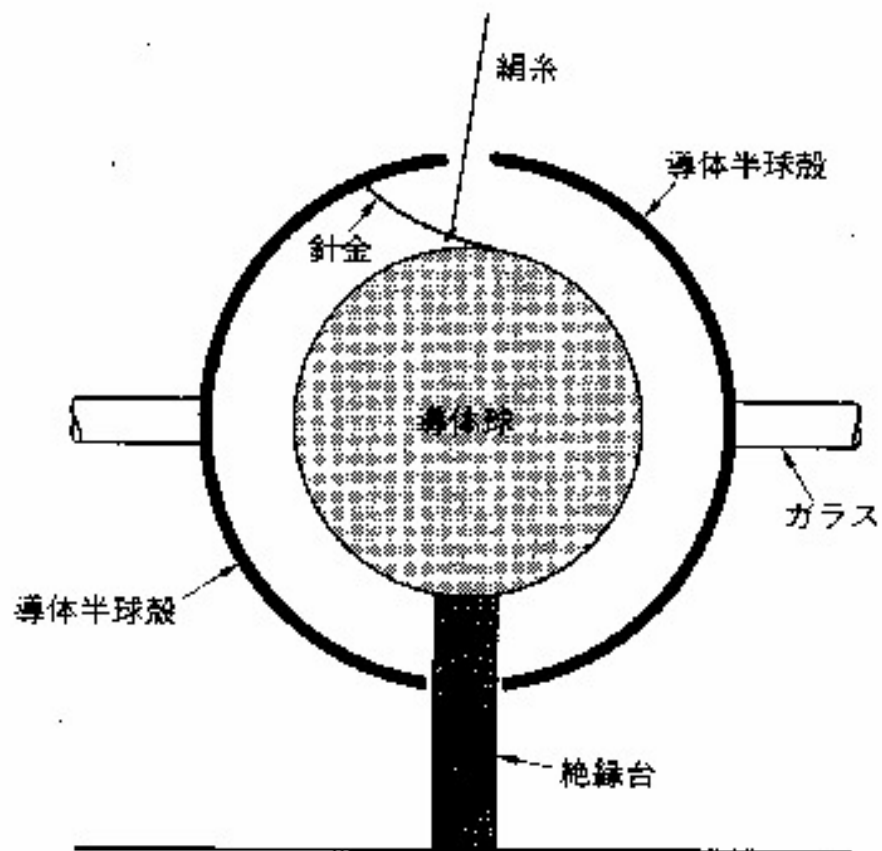
クーロンの実験の問題点とキャベンディッシュの実験



▲図2 クーロンが静電引力の実験に用いた装置



▲図3 クーロンが報告している測定値を対数-対数グラフにプロットした図



▲図4 キャベンディッシュの実験の略図
内部导体球上の電荷の有無を測定

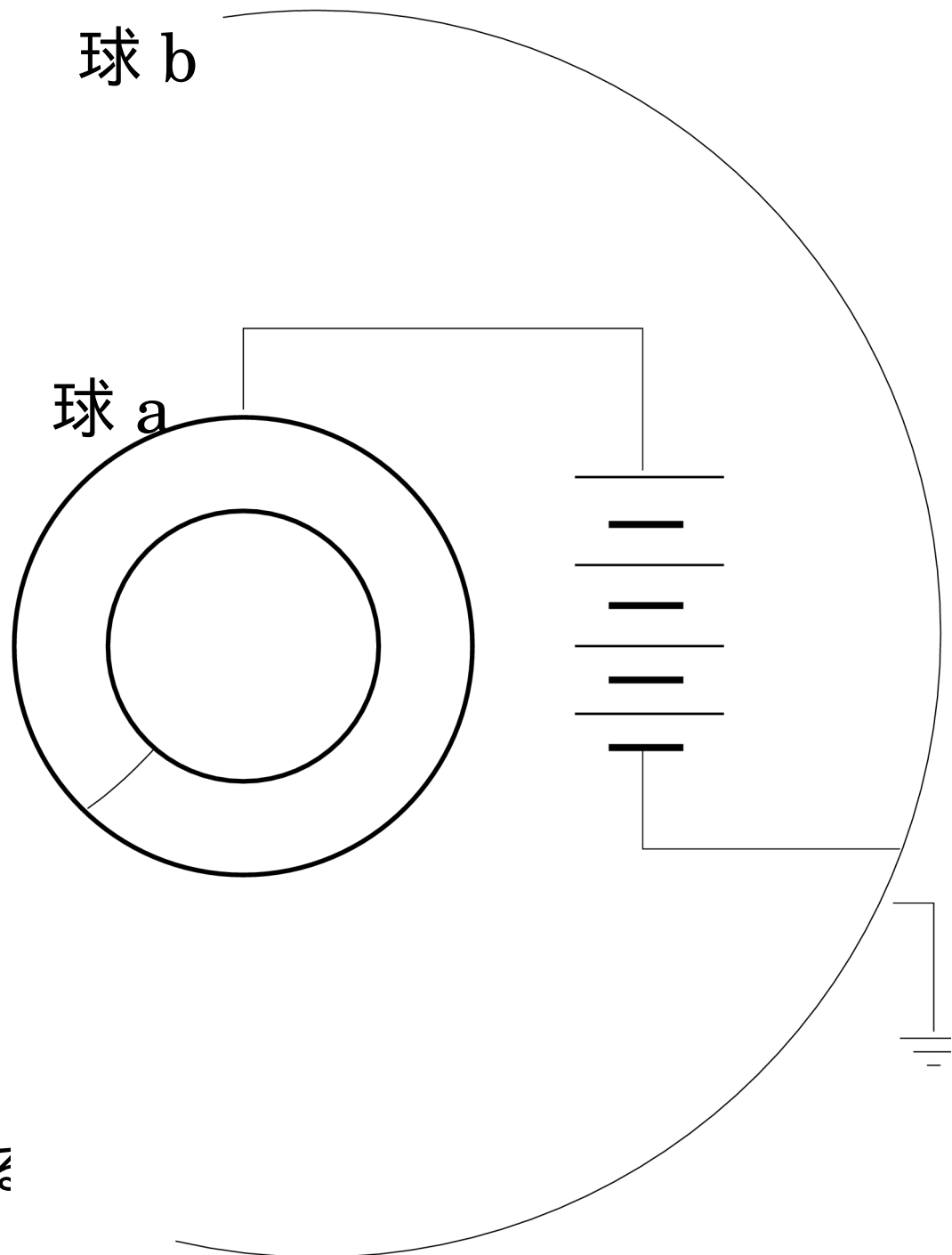
図の出典：歴史を変えた物理実験」(霜田光一著(丸善))

キャベンディッシュの実験 の解釈

無限遠に、半径無限大の球bがあると考えると、ガウスの定理により、球aの内部の電場は0。
なので、aの内部の球に電荷は運ばれない。つまり、

閉じた球の内部に電荷は蓄えられない。

内側の球の電荷が完全に0ならば、ガウスの法則の厳密な証明になる。したがって、クーロンの法則の r のべきは、-2である



導体と不導体(誘電体)

周期表

1 1 H	2																18 2 He
3 Li	4 Be											13 5 B	14 6 C	15 7 N	16 8 O	17 9 F	10 Ne
11 Na	12 Mg	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
55 Cs	56 Ba	*1	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
87 Fr	88 Ra	*2	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Uub	113 Uut	114 Uuq	115 Uup	116 Uuh	117 Uus	118 Uuo

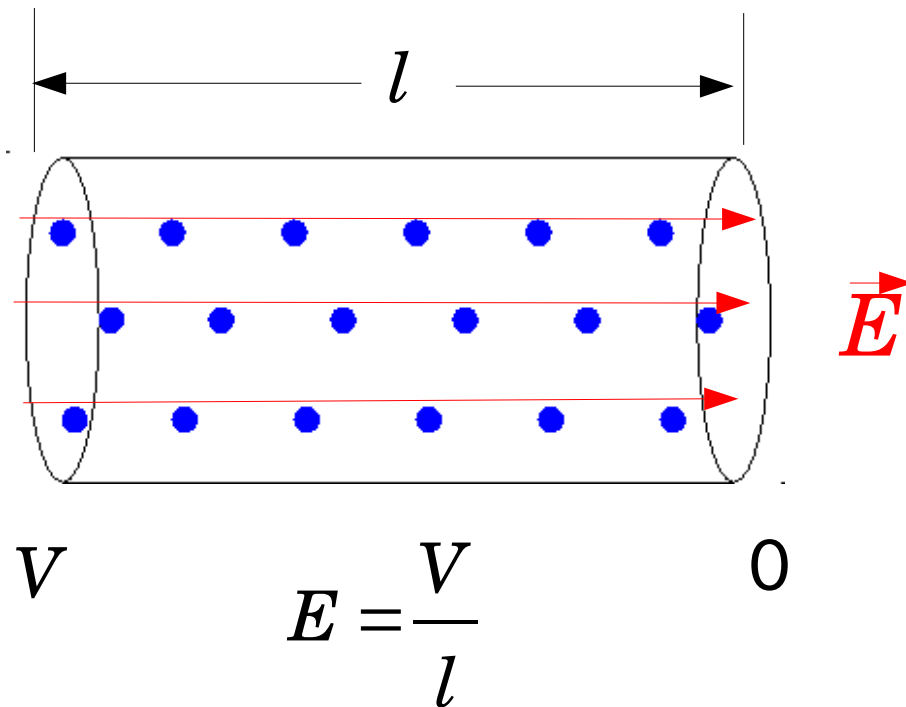
*1 ランタノイド:	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
*2 アクチノイド:	89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

- 1 常温で固体
- 金属元素
- アルカリ金属
- 常温で液体
- 半金属元素
- アルカリ土類金属
- 常温で気体
- 非金属元素
- ハロゲン
- 人工元素
- 希ガス
- 遷移元素

注:ほとんどの有機化合物は不導体。

導体

電子が比較的自由に移動できる



電位差があると、内部に電場ができて電子が移動する。

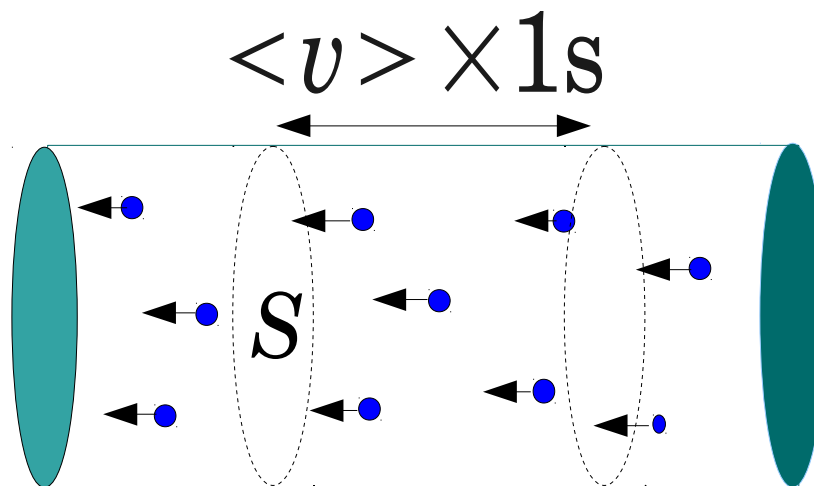
逆に言うと、**電子の移動が無い状態**では、

- 導体の内部に電場は存在しない。
- つまり、導体の電位はどこでも一定。

電流を流しつづけるためには、電位差を維持する必要
==> **起電力**(発電機、電池など)

電流

断面積



単位時間(1s)に断面を通過する電荷の量 = 体積 $[S \langle v \rangle]$ の中の移動できる電荷

(方向も考えて)

$$\vec{I} = -e \rho_e S \langle \vec{v} \rangle$$

ただし、 ρ_e は移動できる電子(自由電子)の密度

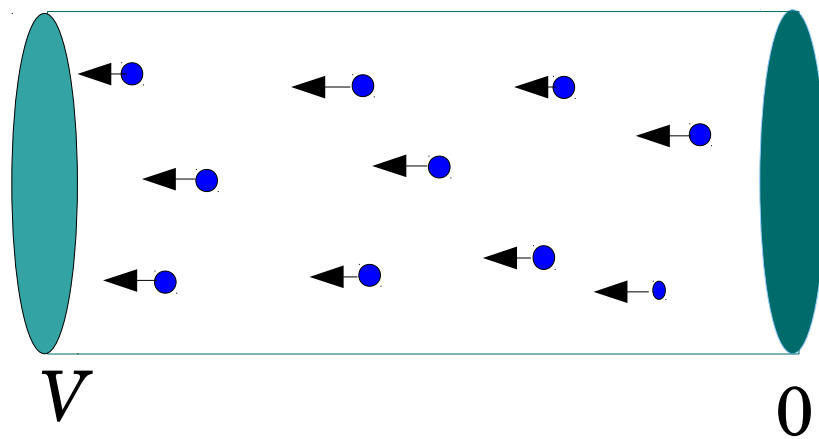
粘性抵抗(速度に比例する抵抗)を仮定すると、 $\langle \vec{v} \rangle = \alpha \vec{E}$

ここで α は導体の性質により決まる定数。

(方向を忘れて、)

$$I = e \rho_e S \cdot \alpha \frac{V}{l} = \frac{S}{l} [e \rho_e \alpha] V$$

電流が電位差に比例する



$[e \rho_e \alpha]$ は、物質の性質だけで決まり、電気伝導度と呼ばれる。

$$R \equiv \frac{l}{S[e \rho_e \alpha]} \quad \text{とおくと} \quad I = \frac{V}{R} \quad (\text{オームの法則})$$

一個の電子が、電位差 V の間を、電場からの力に従って移動すると、 eV だけ、電場による位置エネルギーを失う。粘性抵抗の中を移動したとすると、このエネルギーは熱に変化する。

同じ電位差間を電流 I が流れている場合、毎秒 I/e 個の電子が移動するので、毎秒

$$W = eV \cdot \frac{I}{e} = V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R} \quad \underline{\underline{\text{(ワットの法則)}}$$

熱が発生する。

今日の問題: 電子の古典半径 を簡単に計算する。

$$r_e = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2} \quad \text{に、具体的な数値}$$

$$e = -1.60217653 \times 10^{-19} \text{ [A sec]}$$

$$m = 9.1093826 \times 10^{-31} \text{ [kg]}$$

$$\epsilon_0 = 8.85418782 \times 10^{-12} \text{ [m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^4 \text{ A}^2 \text{]}$$

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ [m} \cdot \text{sec}^{-1} \text{]}$$

を代入すると、

$$r_e = \frac{(1.6022 \times 10^{-19})^2}{8 \times 3.1416 \times 8.8542 \times 10^{-12} \times 9.1094 \times 10^{-31} \times (2.9979 \times 10^8)^2} \left[\frac{\text{[A sec]}^2}{\text{[m}^{-3} \text{ kg}^{-1} \text{ sec}^4 \text{ A}^2 \text{] [kg] [m} \cdot \text{sec}^{-1} \text{]}^2} \right]$$

だが、すべての数値を1桁に四捨五入して、1桁の精度で r_e を計算せよ。

