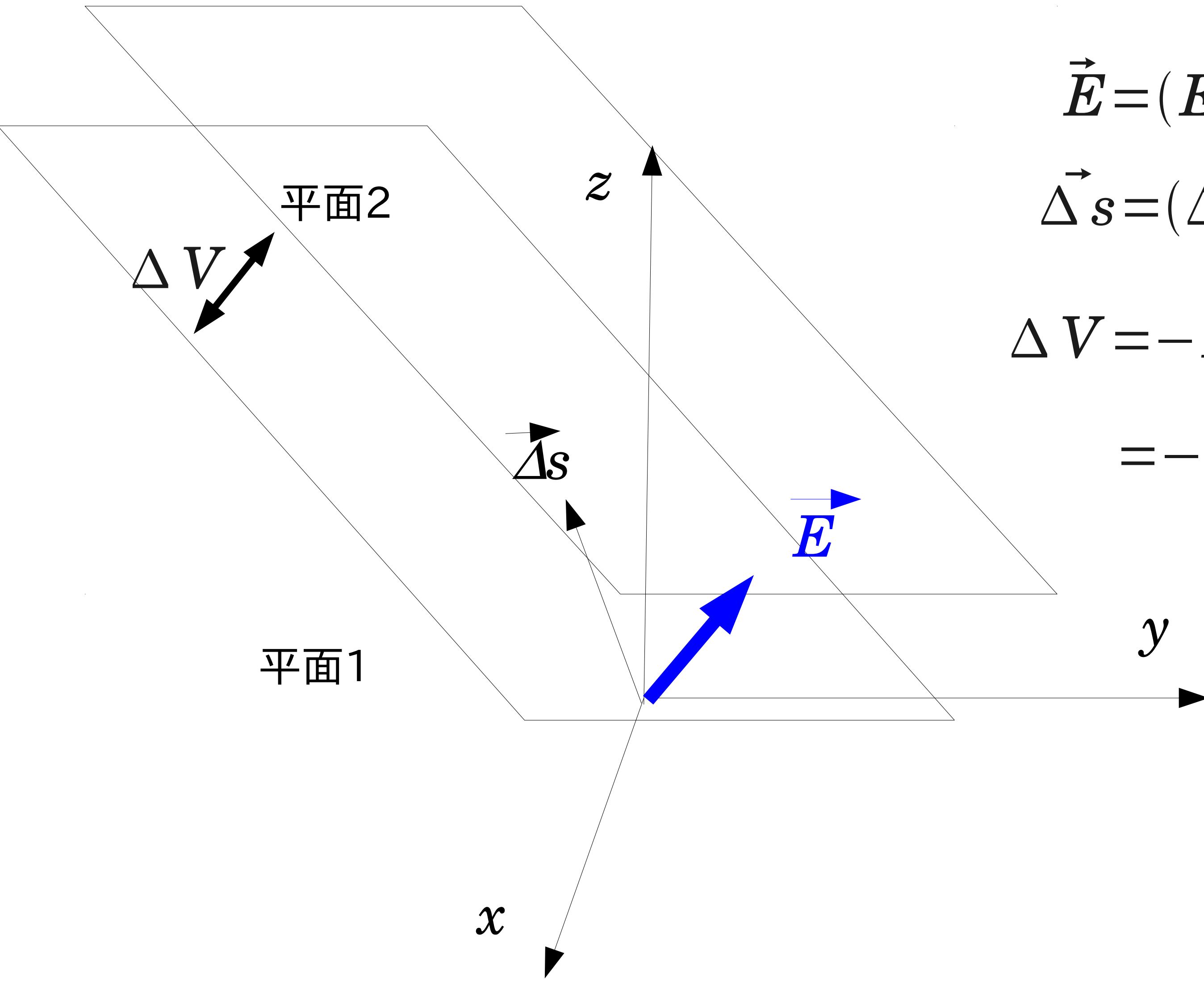
電位から電場を求める。
電位差の2つの計算の比較

A. 電場と距離ベクトルの内積 (座表を用いた、3次元的イメージ)



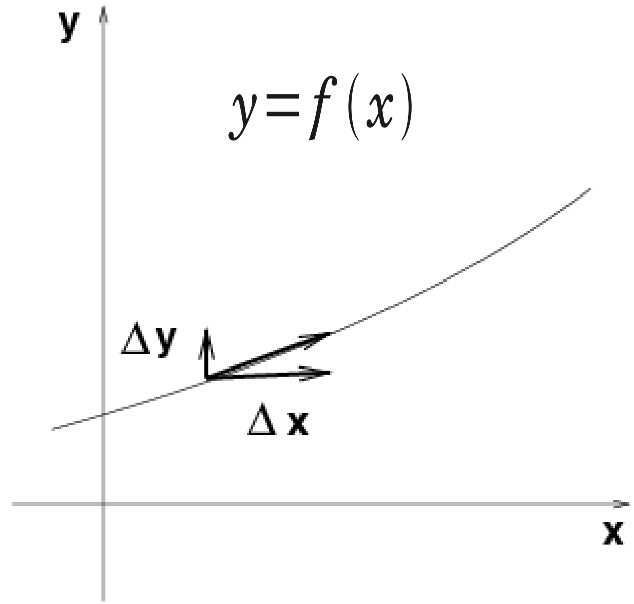
$$\vec{E}=(E_x, E_y, E_z)$$

$$\vec{\Delta s}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$\Delta V=-\vec{E}\cdot\vec{\Delta s}$$

$$=-(E_x\cdot\Delta x+E_y\cdot\Delta y+E_z\cdot\Delta z)$$

微分：物理では、小さい量の比(割り算)。



$$f'(x)=\frac{df}{dx}\simeq\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)\simeq\frac{df}{dx}\cdot\Delta x\ \left(=f'(x)\cdot\Delta x\right)$$

偏微分は、他の変数を定数の様に扱う。

$$\frac{\partial V}{\partial x}\simeq\frac{V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)}{\Delta x}=\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

x による偏微分

$$\Delta V=V(x+\Delta x,y,z)-V(x,y,z)\simeq\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\Delta x$$

B, 電位が位置の関数として与えられているとして、

$x,\ y,\ z$ それぞれ$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ だけ変化するとき、$V(x,y,z)$ の変化は、

$$\Delta V = V(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - V(x, y, z)$$

$$= V(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - V(x+\Delta x, y+\Delta y, z)$$

$$+ V(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - V(x+\Delta x, y, z)$$

$$+ V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)$$

変化する変数が一つだけになるよう、分解して差をとる。

$$\simeq \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z)\cdot\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}(x+\Delta x, y, z)\cdot\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}(x+\Delta x, y+\Delta y, z)\cdot\Delta z$$

$$\boxed{\Delta V \simeq \frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z}$$

A, B を比較

$$\Delta V = -\vec{E}\cdot\vec{\Delta s}$$

A, 電磁場のイメージ

$$= -(\boxed{E_x}\cdot\Delta x + \boxed{E_y}\cdot\Delta y + \boxed{E_z}\cdot\Delta z)$$

$$\Delta V \simeq \boxed{\frac{\partial V}{\partial x}}\Delta x + \boxed{\frac{\partial V}{\partial y}}\Delta y + \boxed{\frac{\partial V}{\partial z}}\Delta z$$

B, 偏微分の性質

すなわち、

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad \left(\simeq -\left(\frac{\Delta V}{\Delta x}, \frac{\Delta V}{\Delta y}, \frac{\Delta V}{\Delta z}\right)\right)$$

「ベクトル解析」で使われる記号

$$\vec{E}=(E_x, E_y, E_z)=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad \left(\simeq-\left(\frac{\Delta V}{\Delta x}, \frac{\Delta V}{\Delta y}, \frac{\Delta V}{\Delta z}\right)\right)$$

$$\vec{E}= \mathbf{grad}\ V \ (=-\vec{\nabla} V)$$

(V の勾配)

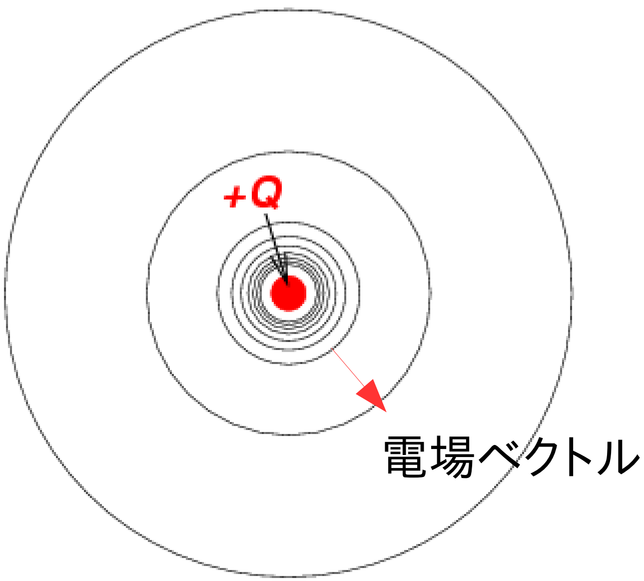
$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ナブラと呼ばれるベクトル・微分演算子

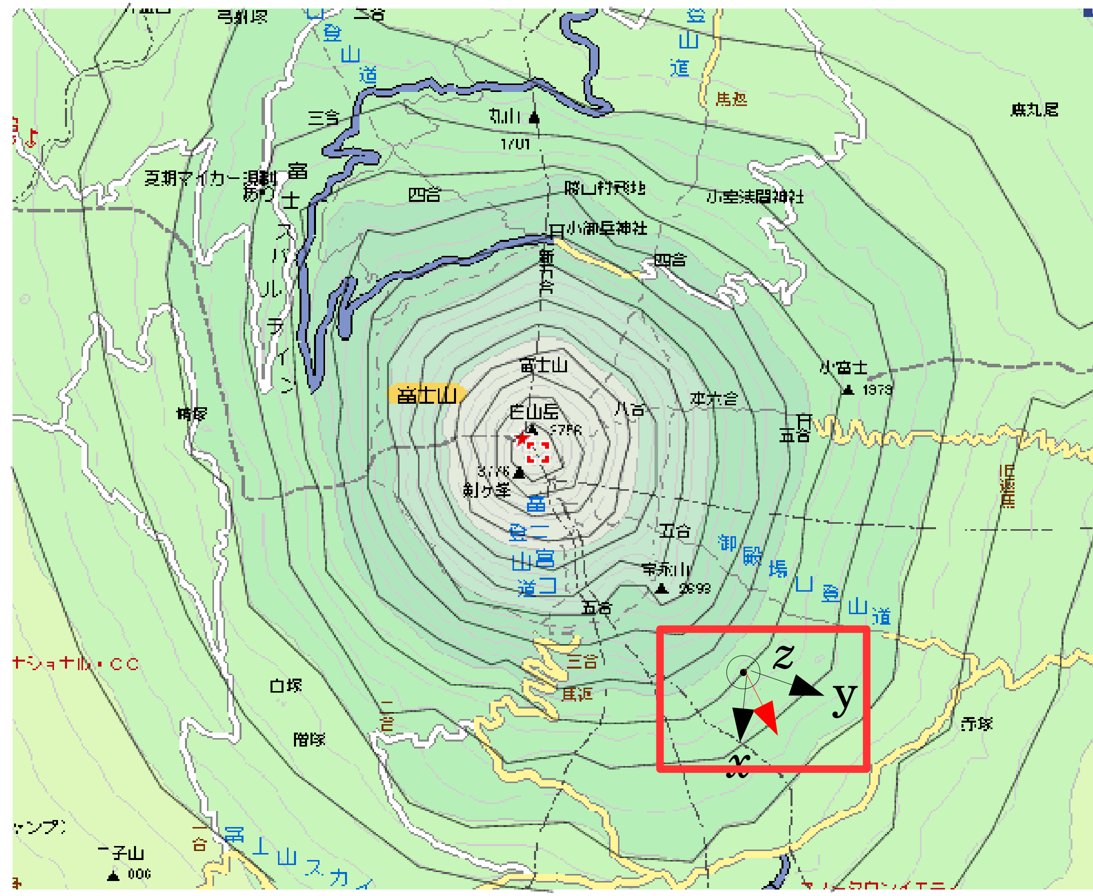
電位と地形は似ている

クーロン電場　と　富士山付近の地形図

3次元空間　—>　2次元平面
電位　—>　高さ
等電位面　—>　等高線
電場　—>　勾配ベクトル



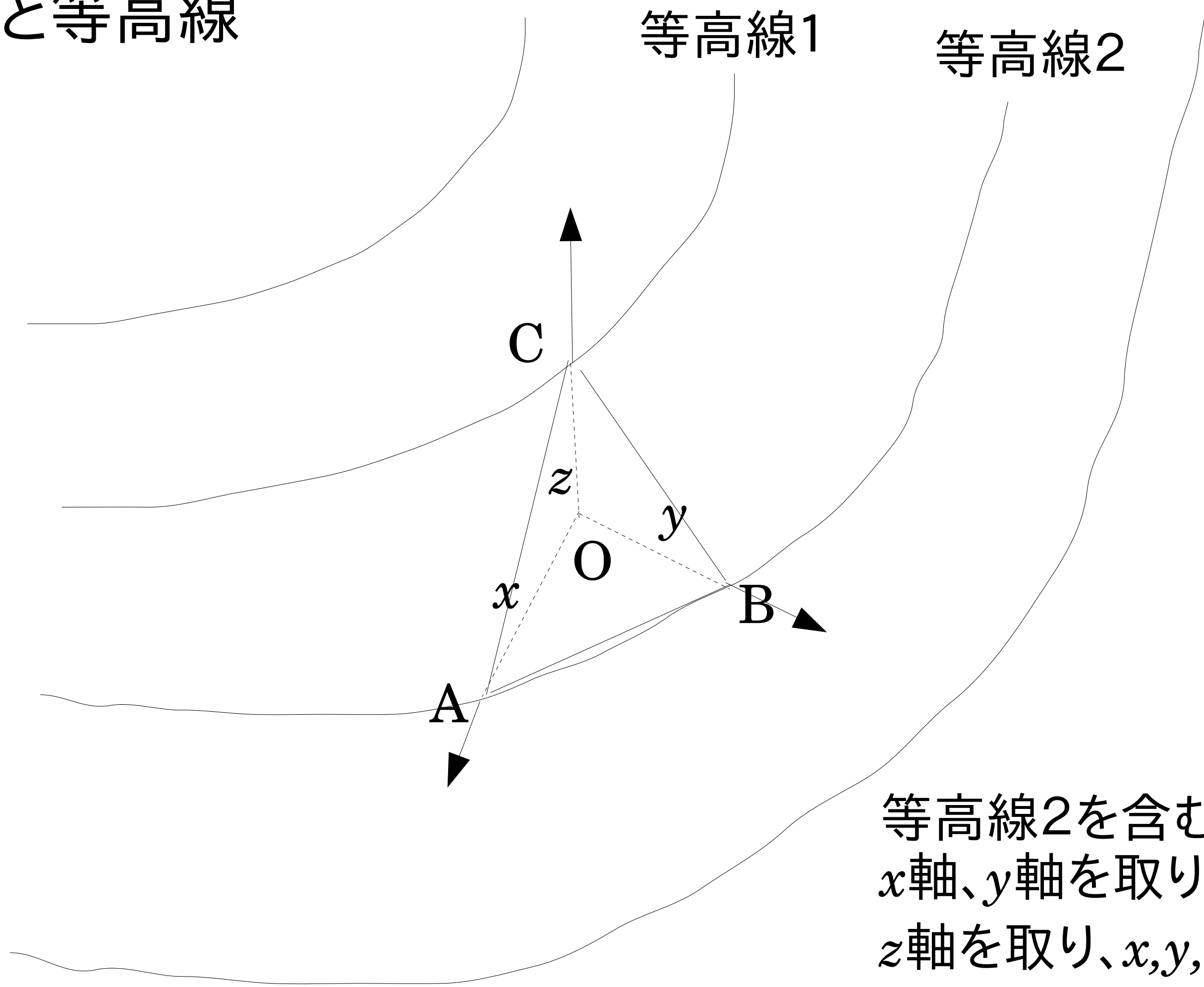
等電位面は、無限遠点を基準とする点電荷の電位を仮定して、2倍の電位差を10等した。



勾配ベクトル：等高線に垂直で大きさは勾配の大きさ

2つの等高線に注目して、座標軸を設定する。

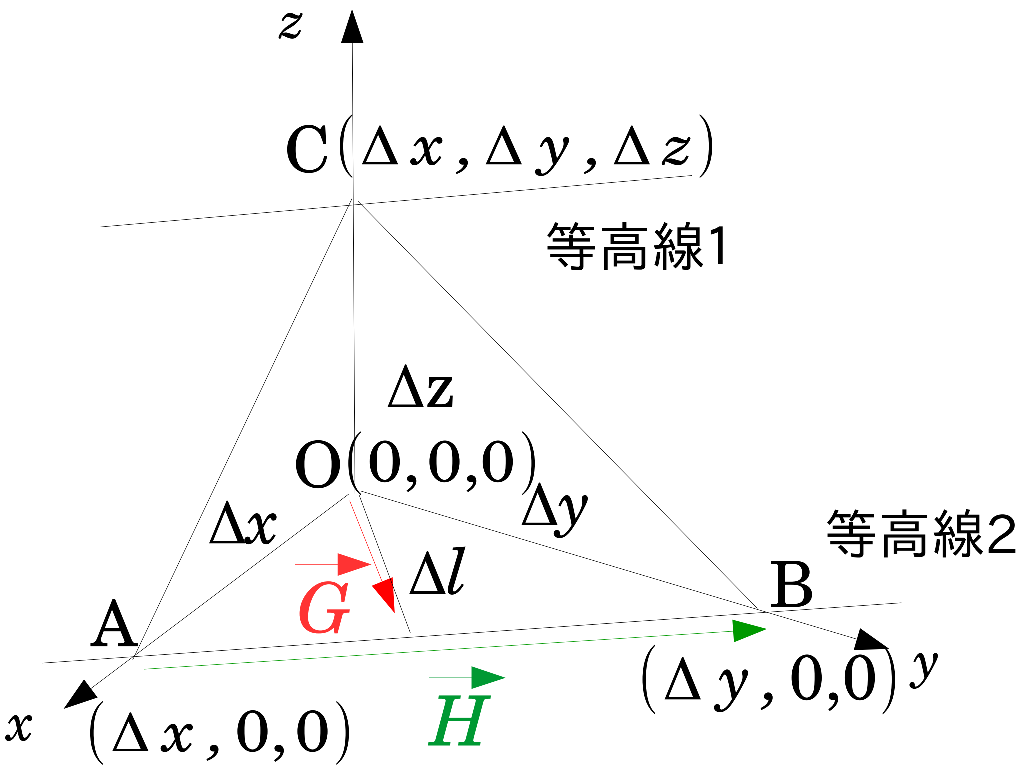
座標軸と等高線



等高線2を含む、高度一定の平面に
x軸、y軸を取り、その平面に垂直に
z軸を取り、x,y,z軸それぞれが地表と
交わる点をA,B,Cとする。原点Oは
地表の下になる。

この3点を含む平面で、周囲の地表
を近似できる。

勾配ベクトル：　大きさ＝斜度
　　　　　　　　方向　＝傾斜の方向



xy平面上の勾配ベクトルは

$$\vec{G}=(G_x, G_y)=-\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}, \frac{\Delta z}{\Delta y}\right)$$

と書ける。証明は、
まず、xy平面で等高線2に平行なベクトル

$\vec{H}=(-\Delta x, \Delta y)$　との内積　$\vec{G}\cdot\vec{H}=0$

つまり、垂直。

次に、

$\vec{G}$　を　$\vec{G}=G\,\hat{g}$

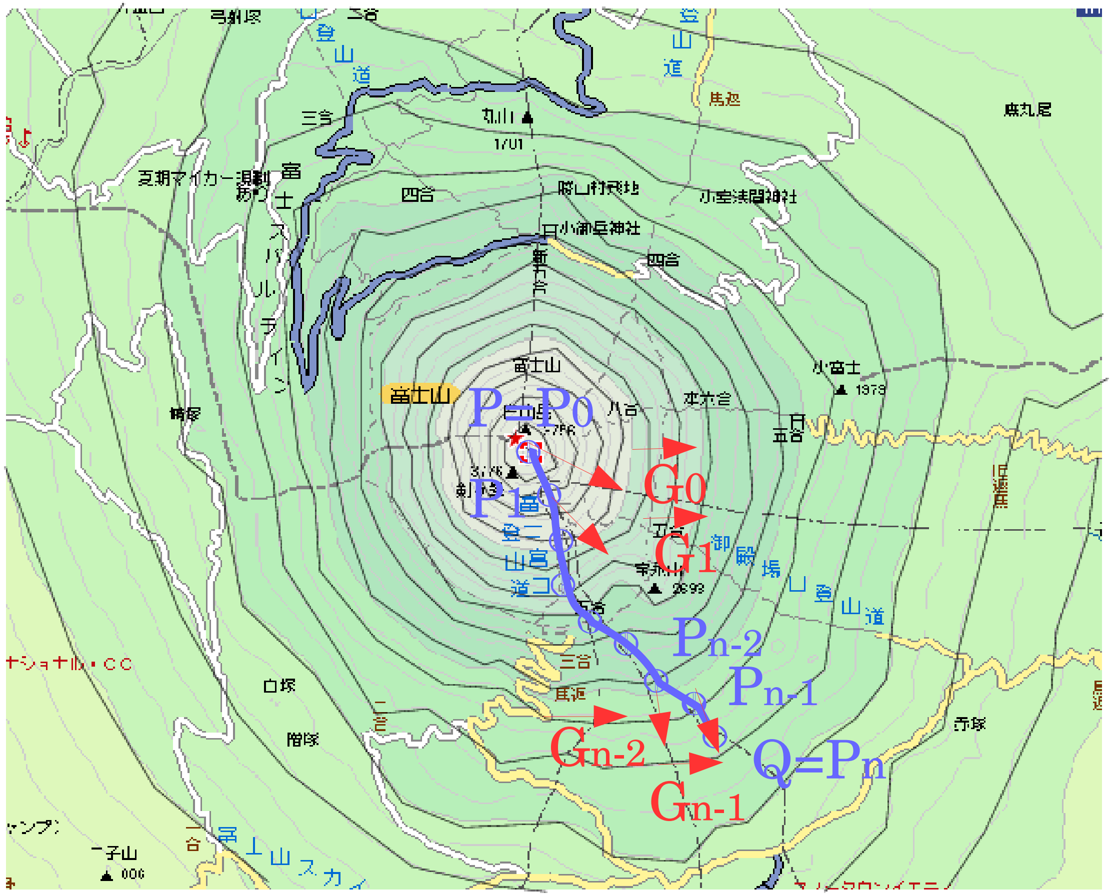
と、大きさと単位ベクトルの積で書く
ことにすると、、

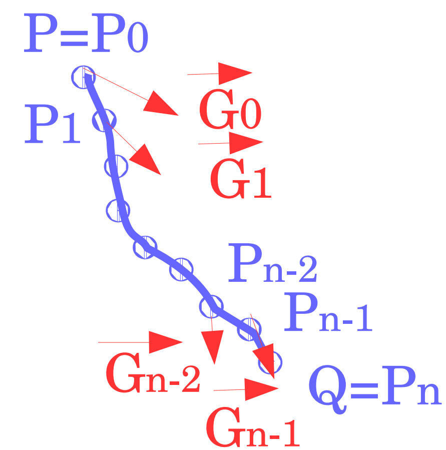
$$\hat{g}=\left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}, \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)$$

$$G=-\Delta z\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x\,\Delta y}=\frac{\Delta z}{\Delta l}$$

である。

勾配ベクトルと経路から2点PQの高度差を求める。





PQの高度差

$$\sim \vec{G}_0 \cdot \overrightarrow{P_0 P_1} + \vec{G}_1 \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} +$$

$$\cdots$$

$$+ \vec{G}_{n-1} \cdot \overrightarrow{P_{n-1} P_n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \vec{G}_i \cdot \overrightarrow{P_{i+1} P_i}$$

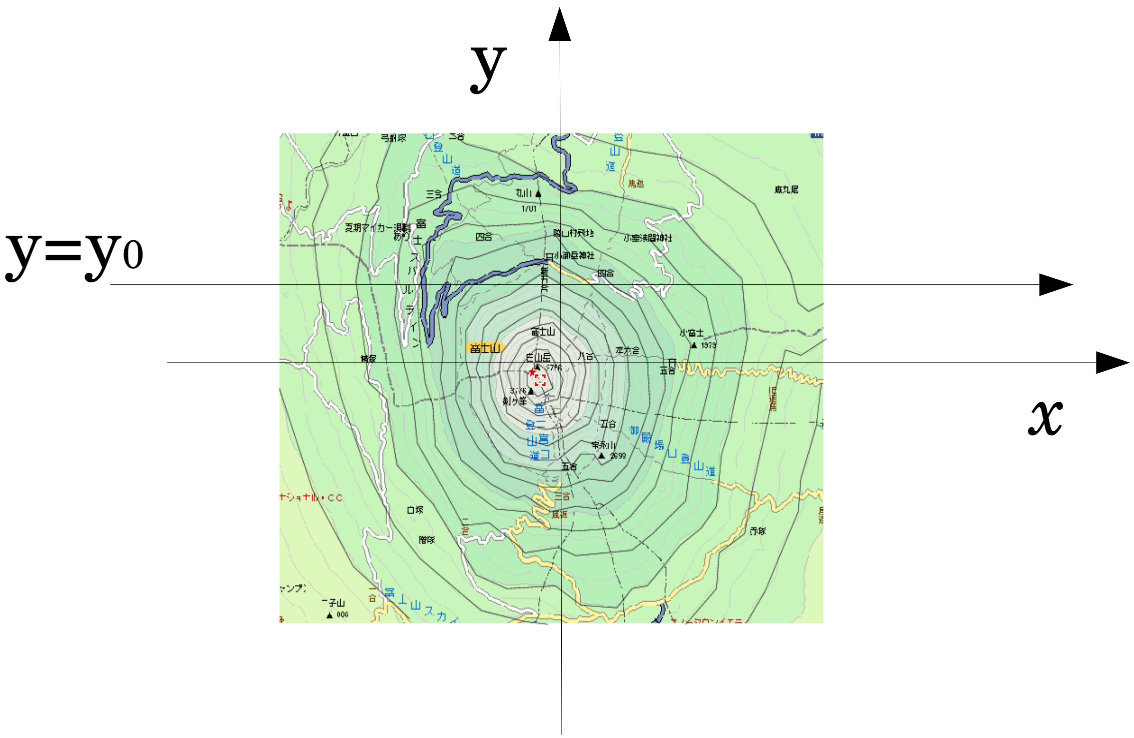
富士山の様な電位から、電場を計算。

偏微分

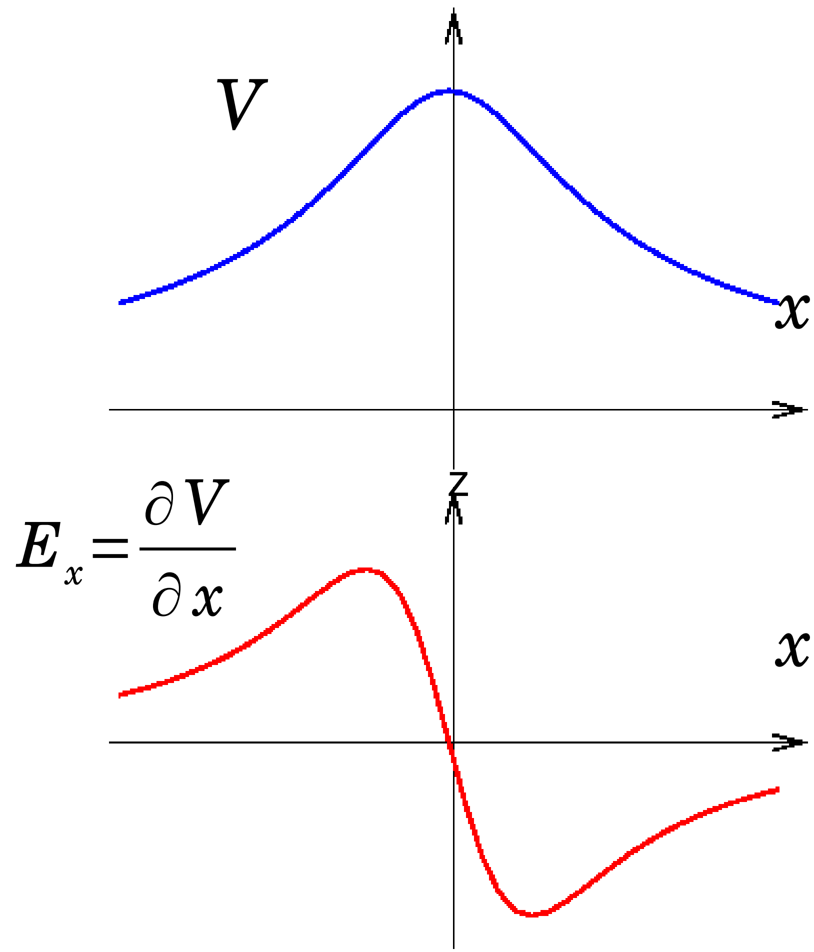
3次元関数$V(x, y, z)$ が、x だけが変化するとき、(y, zは定数と考える)

$$\frac{\partial V}{\partial x} \simeq \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

x による偏微分

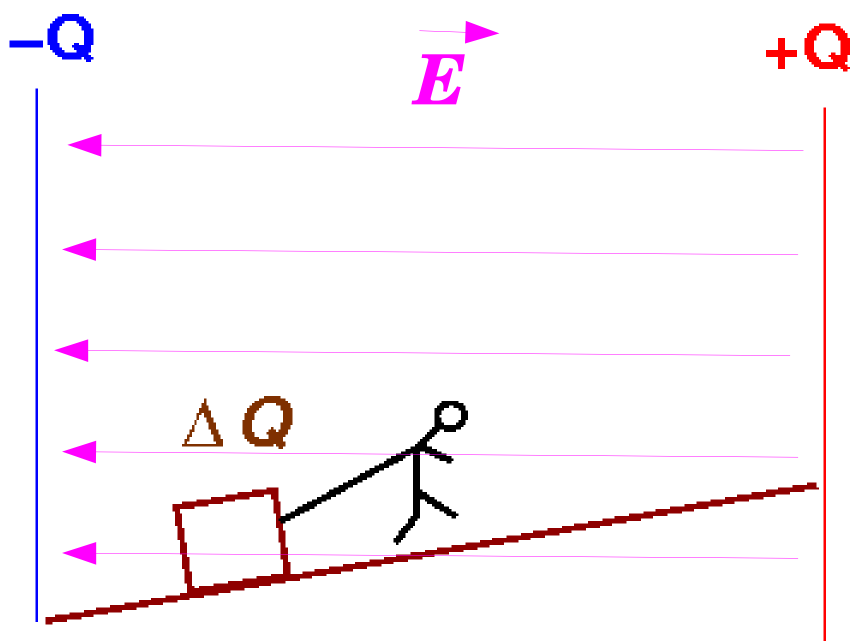


$y = y_0$ 上での高さ(V)の変化



電場の持つエネルギー

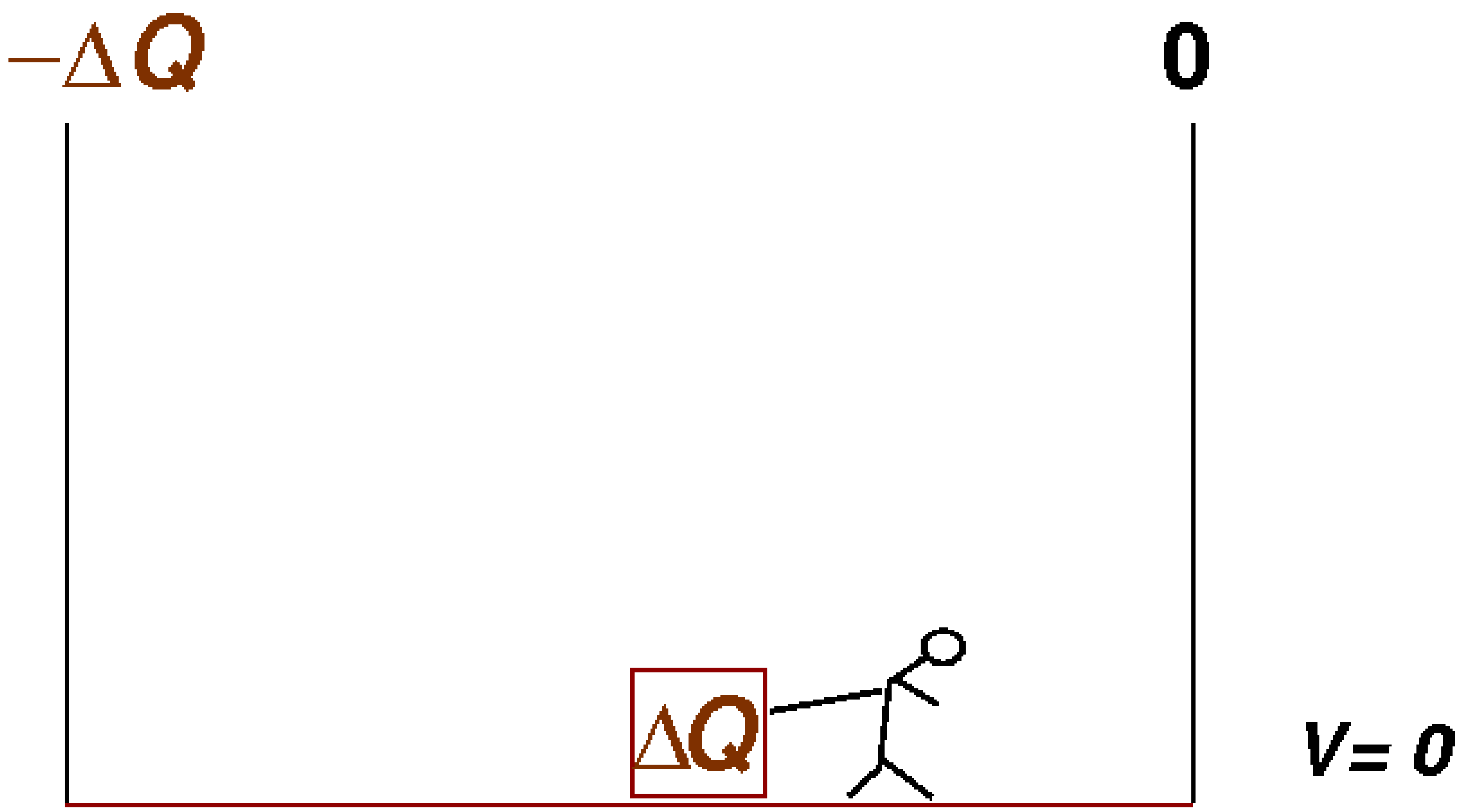
コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



$V \cdot \Delta Q$ の仕事が電場に逆らってなされる。

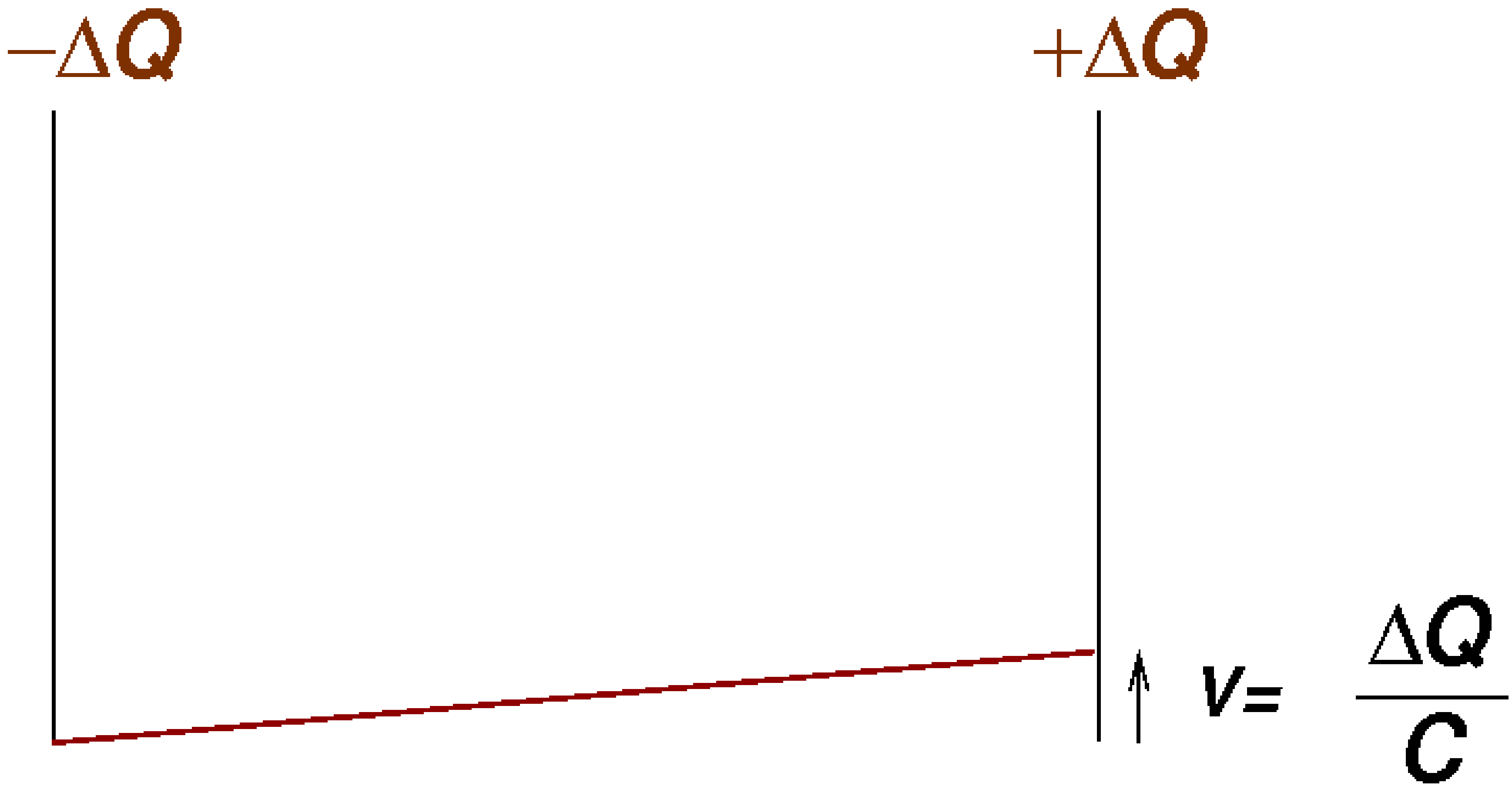
ただし、実際のコンデンサーでは、
極板間の電位差が ΔQ の移動とともに変化する。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



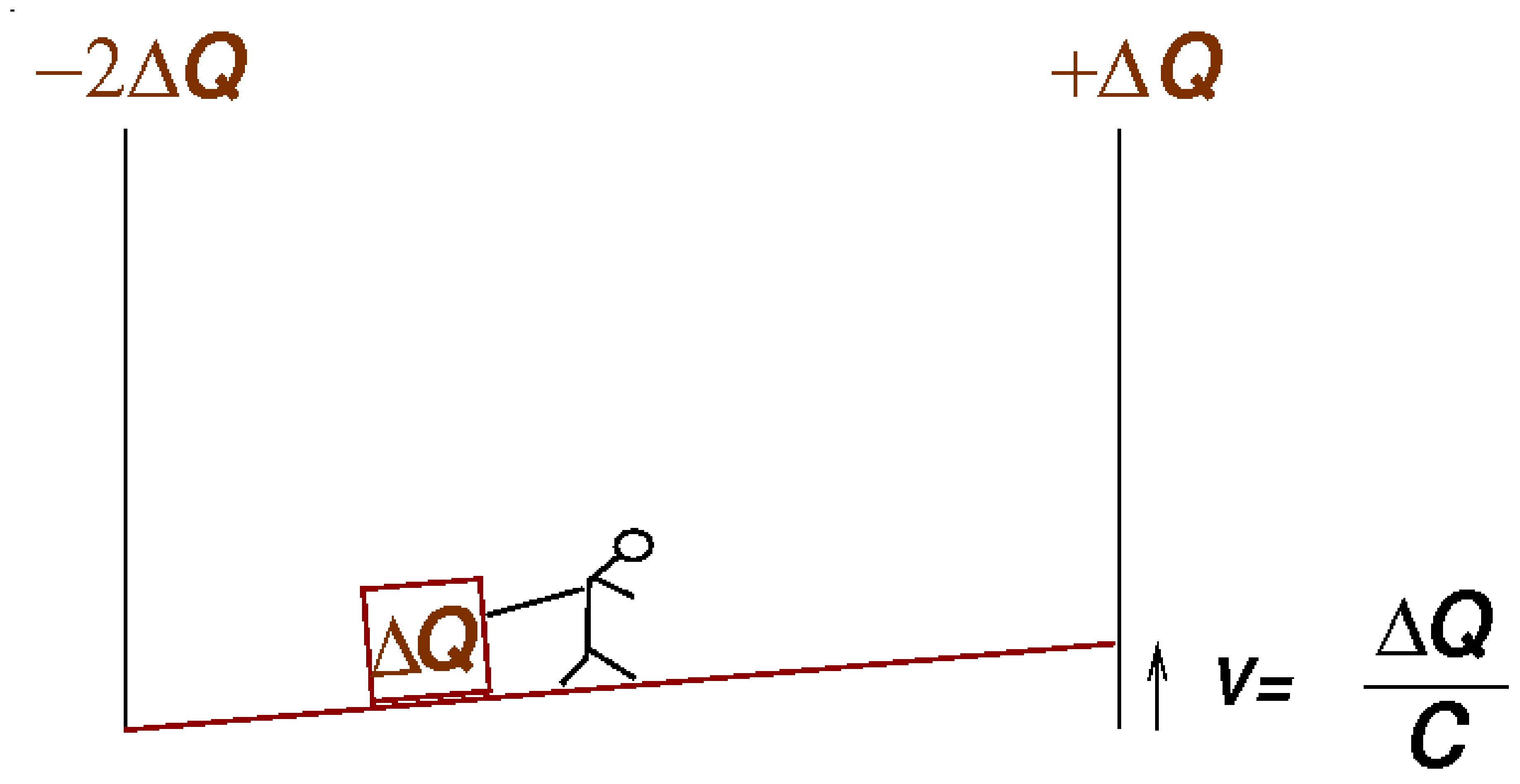
一方の極板の電荷が、 ΔQ だけ減少して、
もう一方の極板へ。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



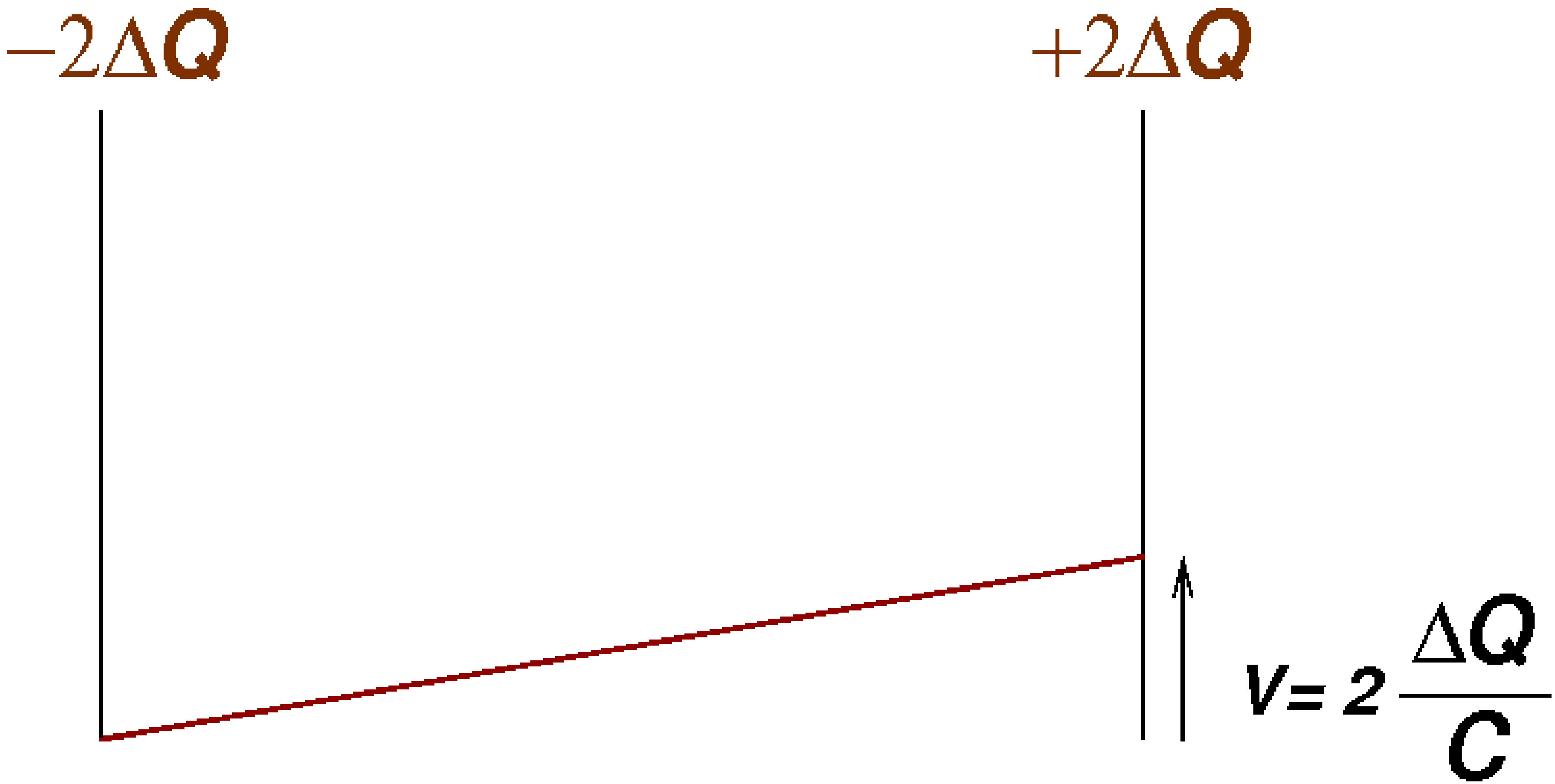
極板間の電位差が、$\frac{\Delta Q}{C}$だけ増加する。

コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



次の ΔQの移動は、増加した電位に逆らった移動。

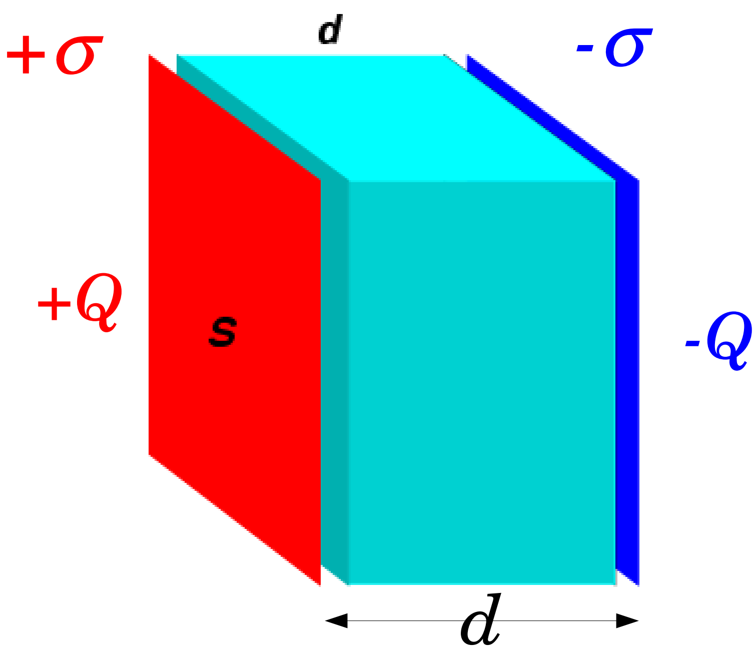
コンデンサーの中で電場に逆らって微小電荷 ΔQ を移動させる思考実験



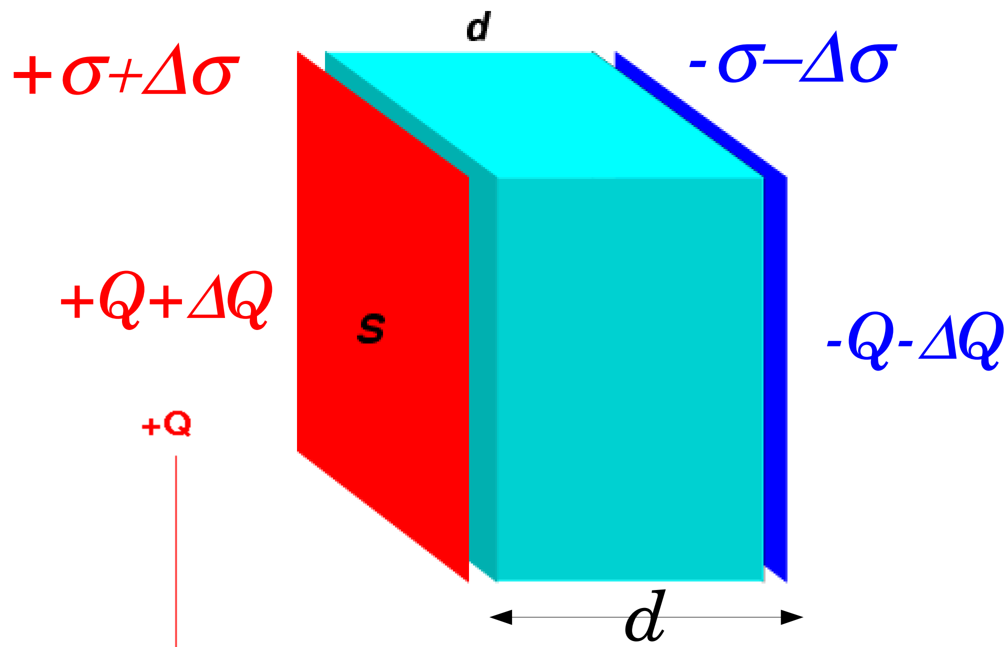
2回 ΔQが移動した後の電位差

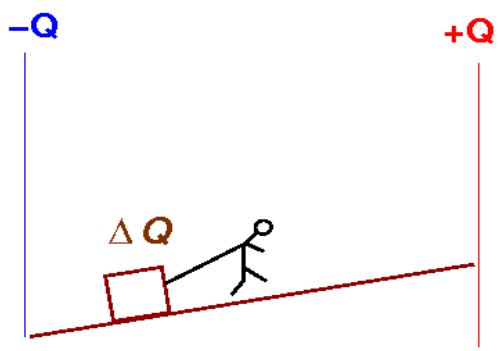
コンデンサーの中の微小電荷の移動前後の比較

ΔQ の電荷の移動の前



ΔQ の電荷の移動の後





- 極板の電荷密度の変化

$$\sigma\left(=\frac{Q}{S}\right) \rightarrow \sigma+\frac{\Delta Q}{S}$$

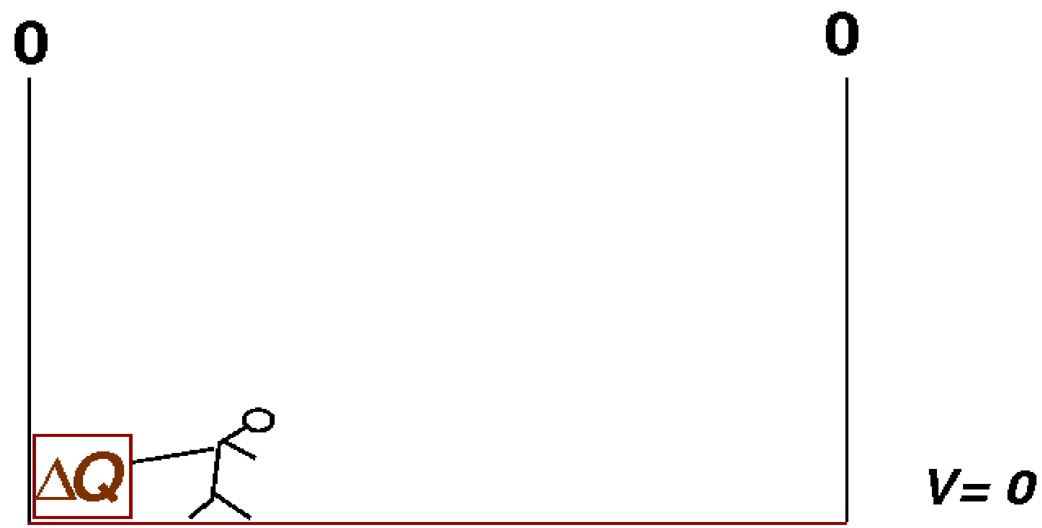
- 極板間の電場の変化

$$E\left(=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right) \rightarrow E+\frac{\Delta Q}{\varepsilon_0 S}$$

- 極板間の電位差の変化

$$V\left(=E\cdot d\right) \rightarrow V+\frac{d}{\varepsilon_0 S}\Delta Q=\boxed{V+\frac{\Delta Q}{C}}$$

コンデンサーの中の微小電荷の移動(まとめ)



両極板の電荷 *0* の状態から

n回ΔQの移動が繰り替えされた状態

- 極板の電荷密度 $$\sigma\left(=\frac{Q}{S}\right)=n\frac{\Delta Q}{S}$$
- 極板間の電場 $$E\left(=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)=n\frac{\Delta Q}{\varepsilon_0 S}$$
- 極板間の電位差 $$V\left(=E\cdot d\right)=n\frac{d}{\varepsilon_0 S}\Delta Q=n\frac{\Delta Q}{C}$$

コンデンサーになされた仕事の合計

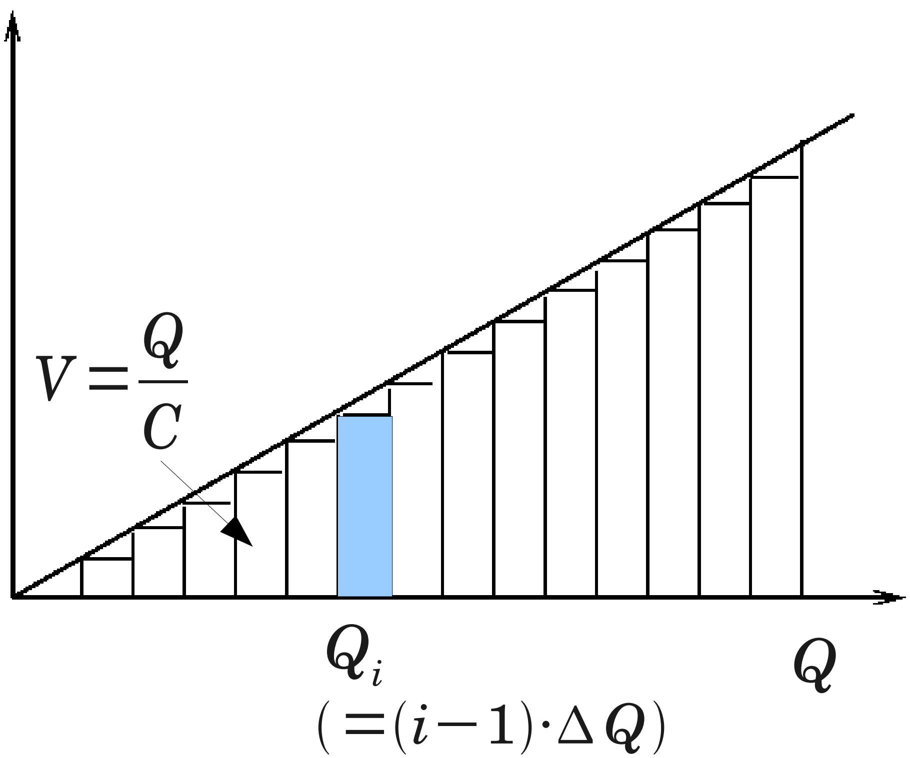
(電荷を蓄えるのに必要な仕事)

i回めに ΔQ を、運ぶための仕事は $V_i \cdot \Delta Q$

両極板の電荷が0の状態から、最終的に電荷$\pm Q$ になったとして、

仕事の合計の計算は、

$$U = \sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{C} \Delta Q \simeq \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ$$



したがって、この合計は
の極限で、

$$\Delta Q \to 0$$

となる。

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

コンデンサーになされた仕事の合計 (2)

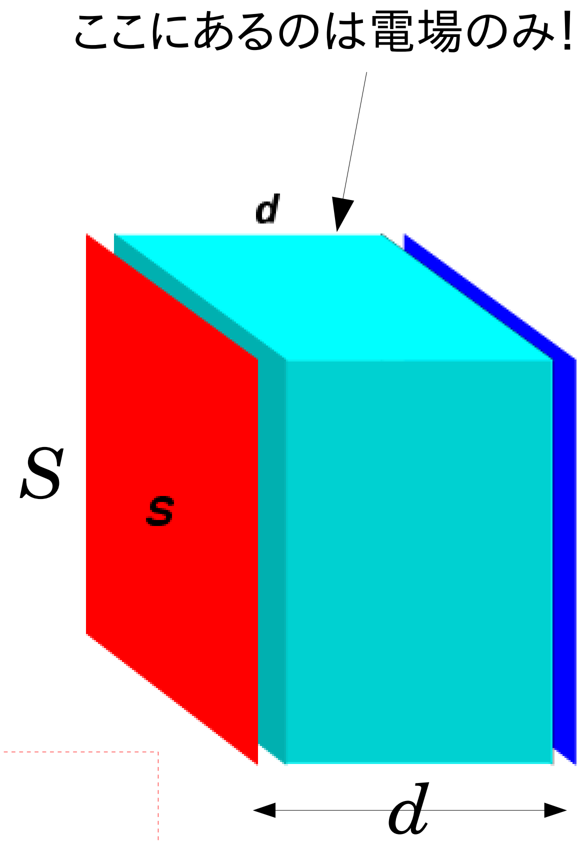
$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$ および $$C \equiv \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$ より、

$$U = \frac{d}{2\varepsilon_0 S}(S\sigma)^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\boxed{S \cdot d} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \boxed{S \cdot d}$$

ここで、

$$S \cdot d = [\text{極板間の体積}]$$

に注意。



つまり、コンデンサーになされた仕事は、
電場の存在する空間に分布するエネルギー

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$ (電場の持つエネルギー密度)

となって、蓄えられる。

クーロン場の電位から、電場を求める。

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

定数と思って、普通に微分

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(x, y, z)}{r^3}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

($\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ に注意)

確かに、一個の電荷の作る電場、

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

と、一致する。

今日の問題、　クーロン場の電位から､クーロン電場を求めよ。

考え方:　クーロン電場を三次元座標で表現した式

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

から、

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

を用いて、

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}}{r^2}$$

を導く