電磁気学基礎論

http://www.scimuseum.kita.osaka.jp/~saito/job/writing/rep/2001/seidenki.htm
から画像をコピーしました。

ファラデーから、マクスウェルへの手紙

数学者が物理的な作用の研究にたずさわり、ある結論に到達したとき、それは

普通の言葉を使っても、数式に劣らず不足なく、表現できないものでしょうか。

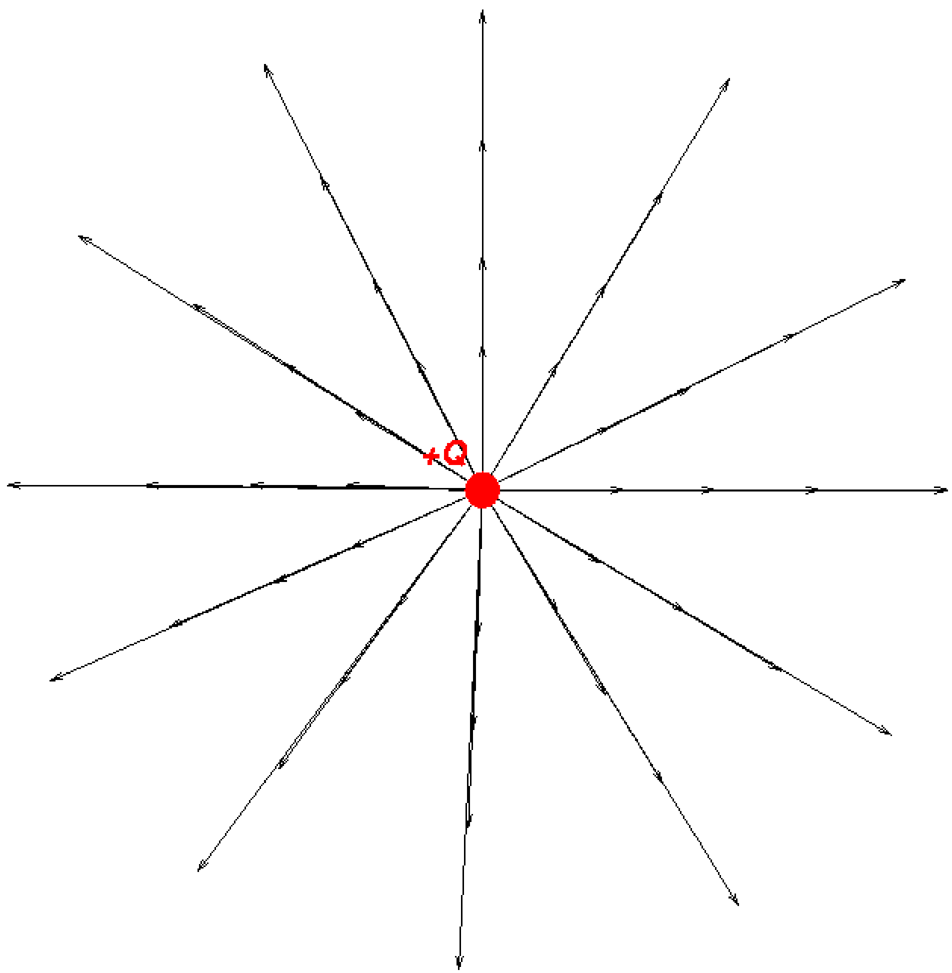
もし、そういう表現 つまり私たちも実験を通してその研究に参画できるように、

秘密の記号を翻訳した表現ができれば、私などには大変ありがたいのですが。

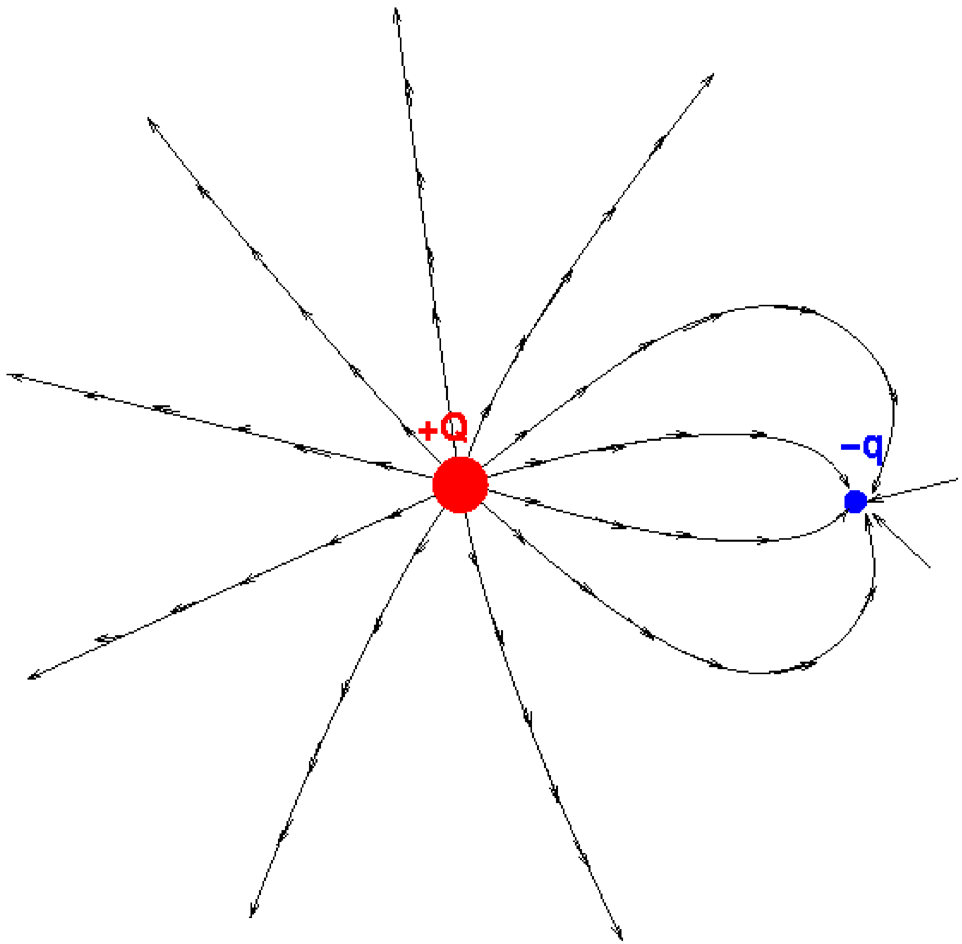
マクスウェルの答え＝電気力線と磁力線

この授業の出発点

電荷からは、電気力線が伸ている



単独の電荷の場合放射状に



複数の電場では配置によって曲線を描く

電気力線を用いて、電場を電気力線で表現する。

- 電気力線の密度は電場の強さに比例して、その比例定数は ε_0

電気力線の密度 = ε_0 × 電場の強さ

- 電気力線の伸びる方向は、電場ベクトルの方向と一致する。
- 電気力線は＋の電荷から－の電荷まで、または無限遠まで伸びる。

（言い換えると電気力線は、＋の電荷と－の電荷をつなぐ。）

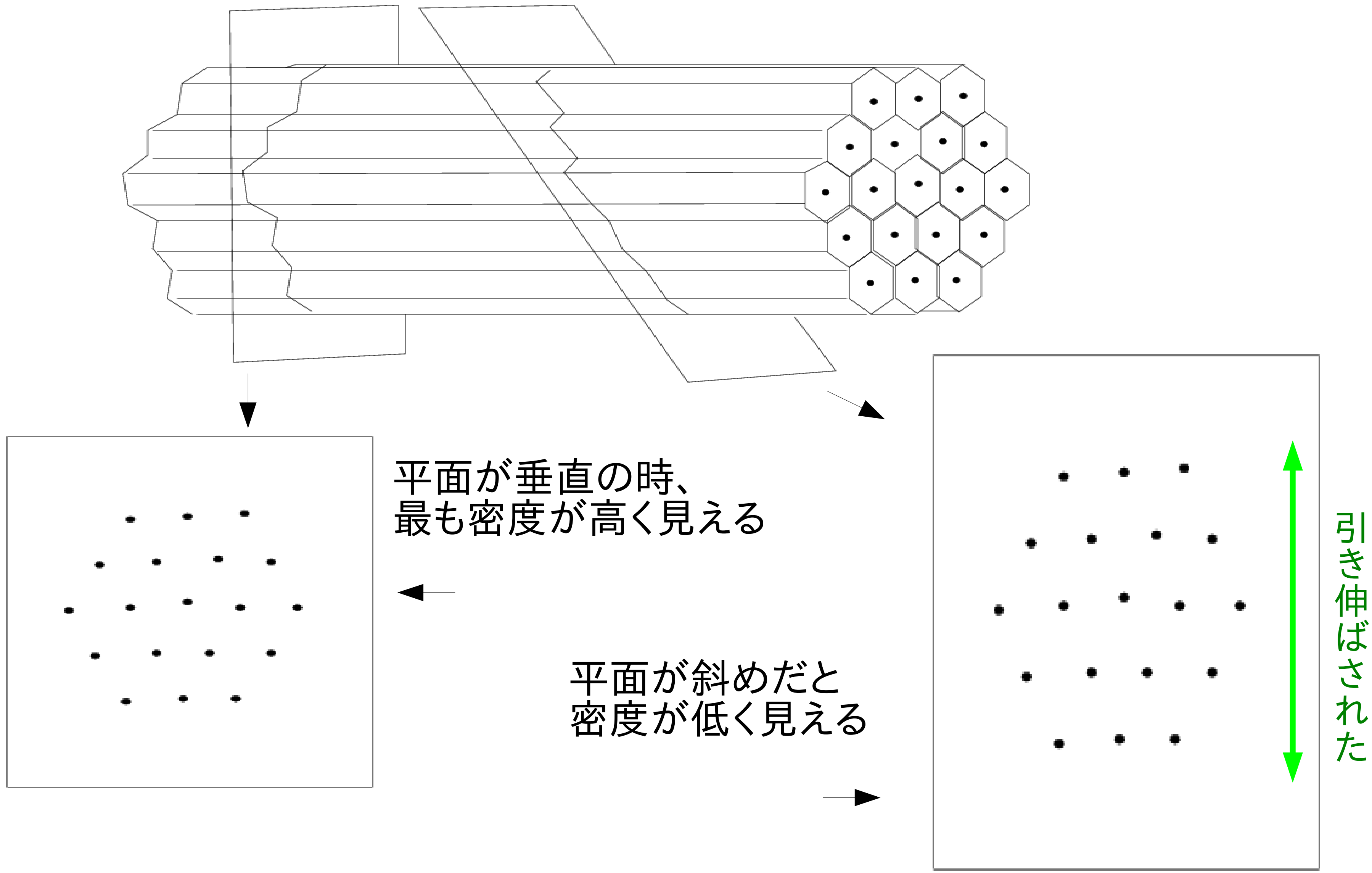
定量化のため

- 大きさ $+Q$ の電荷からは Q 本の電気力線が伸びる。

（線の数だから、整数のはずだが、実数で考える。その理由は、授業で）

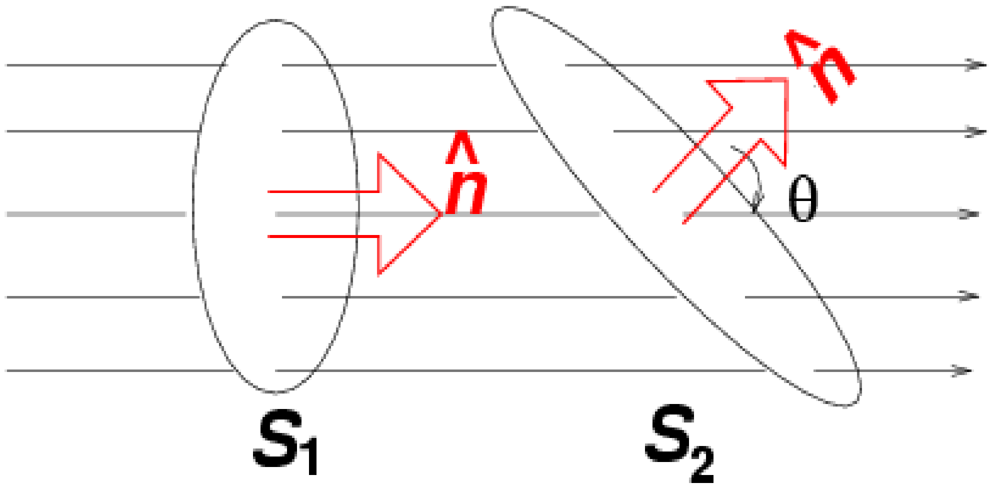
を用いて、電（磁）気学を始めよう。

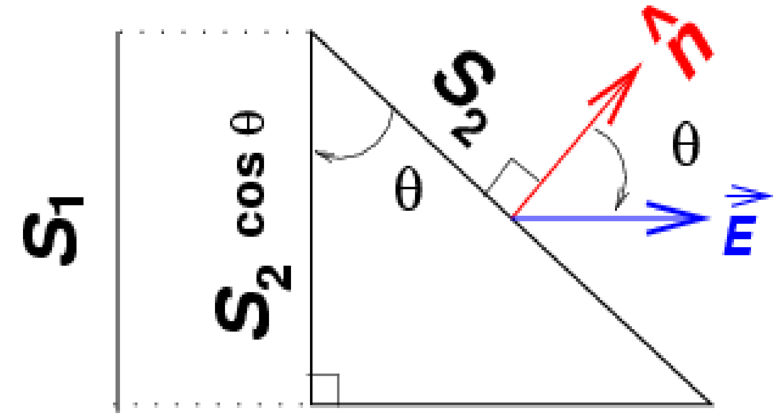
電気力線の数　＜==＞　電場の強さ



「電場の強さ」は切断面を通る本数と角度による補正で決まる

切る角度による補正 <=面積に $\cos\theta$ を掛ける





$$\frac{N}{S_1}=\frac{N}{S_2\cos\theta}=\frac{N}{S_2\hat{n}\cdot\frac{\vec{E}}{E}}=\varepsilon_0 E$$ (電場の強さ)

内積で $\cos\theta$ を作る

$$N=\varepsilon_0\left(\vec{E}\cdot\hat{n}\right)S$$

電場から、電気力線の数を求める方法

とりあえず、電場に垂直な平面に対し

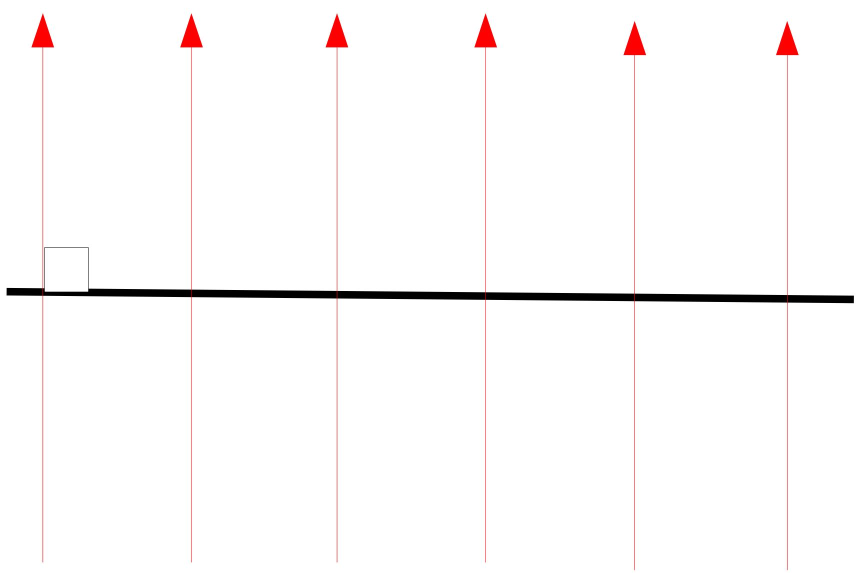
$$N = \varepsilon_0 (\vec{E} \cdot \hat{n}) S$$ を、

$\boxed{\cos\theta = 1 \rightarrow \hat{n} \cdot \vec{E} = E}$ を使って、

$$\boxed{N(\text{電気力線の数}) = \varepsilon_0(\text{定数}) \times E(\text{電場の強さ}) \times S(\text{面積})}$$

横から見ると、

N本の電気力線

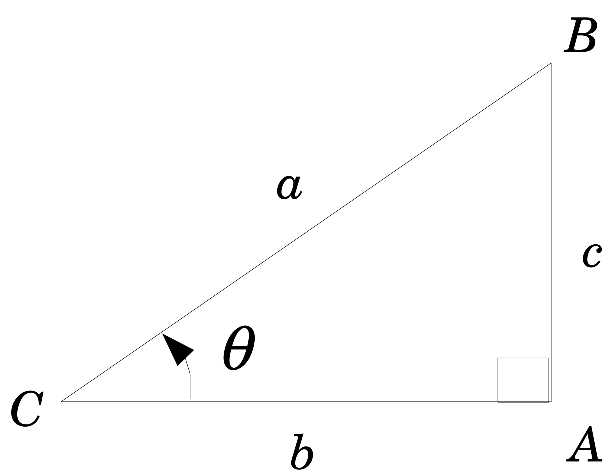


面積Sの平面

こんな感じ

必要になる、高校で学んだ**数学的基礎**。ともかく使ってしまおう。

三角関数



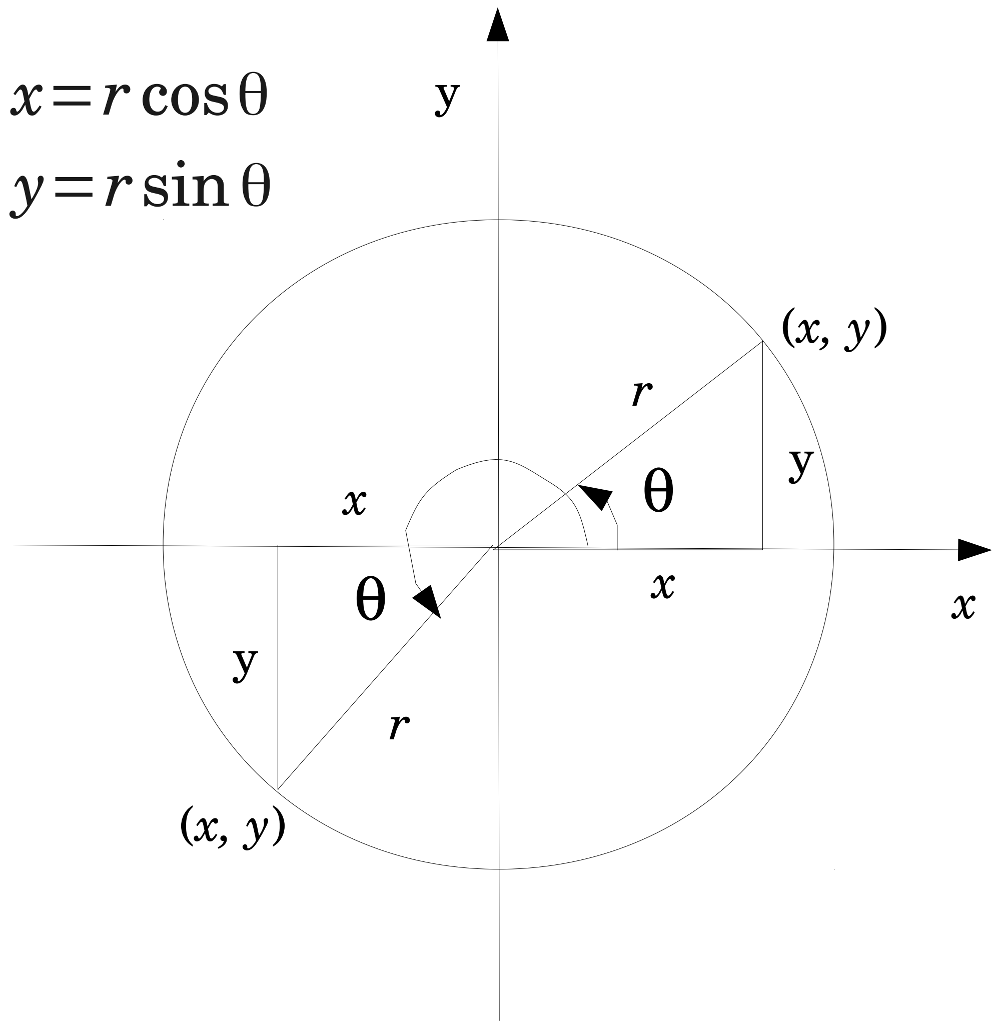
$$\sin\theta=\frac{c}{a}\quad \cos\theta=\frac{b}{a}$$

$$\tan\theta=\frac{c}{b}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

半径rの円を考え、座標軸と関連させると便利

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

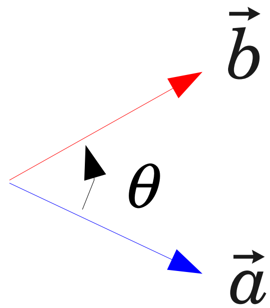


つまり、下のように書ける。

$$(x\,,y)=(r\cos\theta\,,r\sin\theta)$$

ベクトル：方向と大きさを持った概念。

i、角度と長さで表す。
ベクトルが2つある時、両者の成す角は内積と関係する。



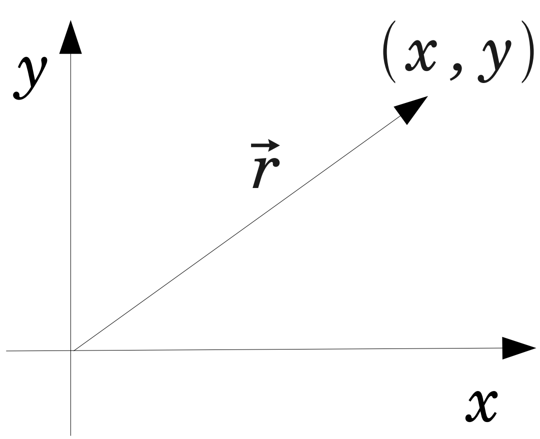
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b\cdot\cos\theta$$

（$a=|\vec{a}|, b=|\vec{b}|$ を、暗黙の了解とする。）

特に、$a\neq 0, b\neq 0$ の時、
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であれば、 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad (\theta=\pm\frac{\pi}{2})$
が平行であれば、 $\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b \quad (\theta=0)$

ii、座標軸を仮定し、成分で $\vec{r}=(x, y)$ のように表すこともある。 (例：位置ベクトル)

$\vec{a}=(a_x, a_y)$ 、 $\vec{b}=(b_x, b_y)$ とすると、



内積は、

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y$$

と計算できる。

物理でつかう微分と積分

微分

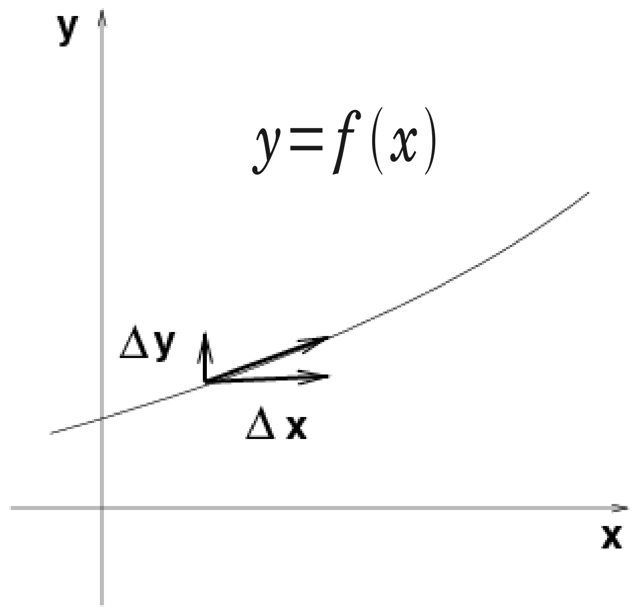
数学的には極限操作

$$f'(x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0)$$

物理では、

$$\frac{dy}{dx} \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

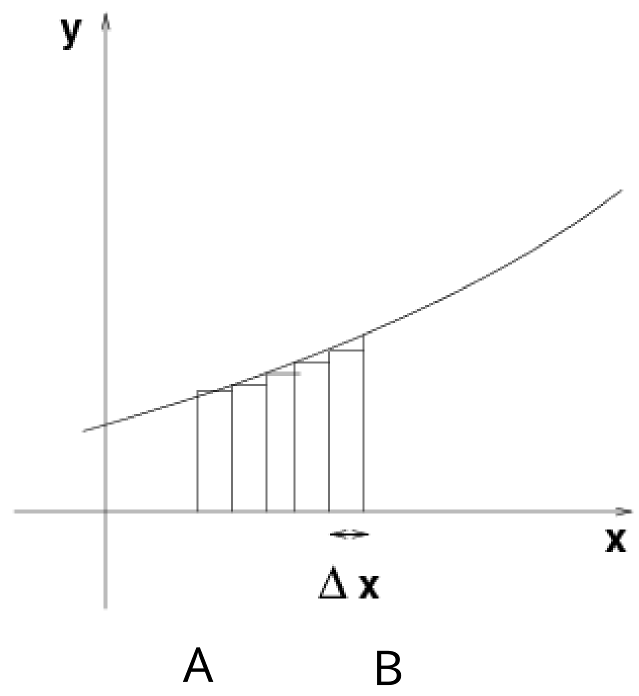
小さい量の比(割り算)。



積分

$$\int_A^B f(x)dx \simeq \boxed{\sum_i f(x_i)\Delta x_i}$$

物理では、小さく分割した上で、足し合わす。



簡単な例で、分割した和と積分の比較

関数 $y=a\cdot x$ と、 x軸、 $x=X$ で囲まれた面積を求める。

分割で、

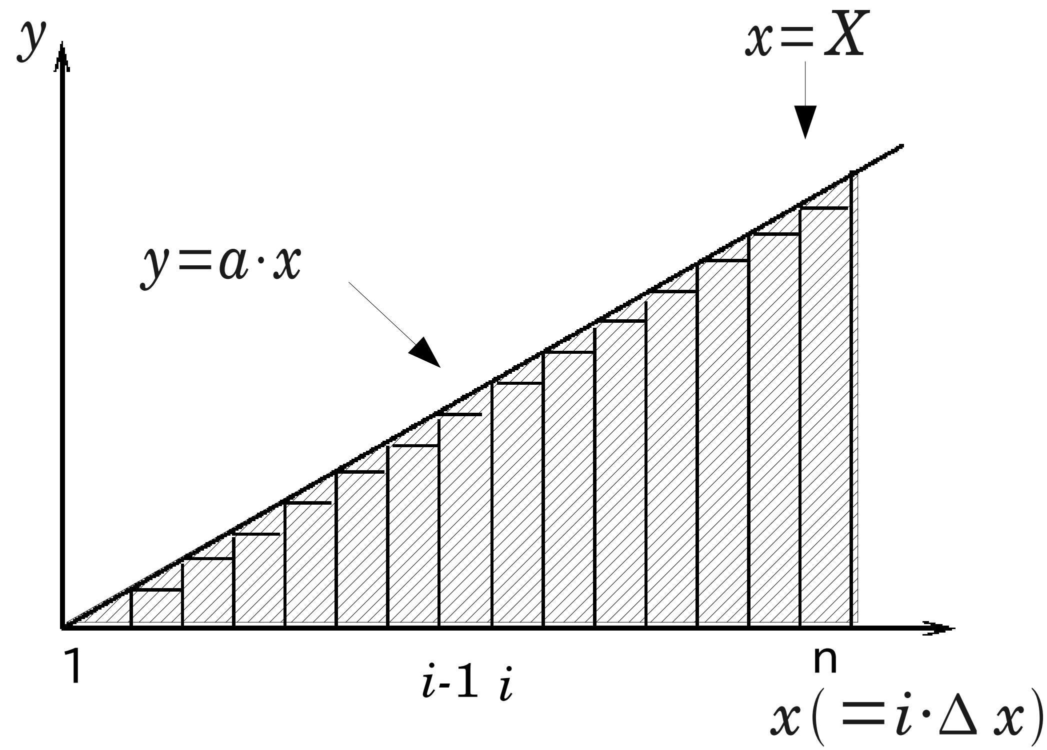
$$I_n=\sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(i-1)\Delta x^2$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}\Delta x^2=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{X}{n}\right)$$

ただし、$\Delta x=\dfrac{X}{n}$ とおいた。

積分では、

$$I=\int_0^X x\,dx=\frac{1}{2}x^2$$



両者の差は、$\dfrac{X}{n}$ であり、nを大きくとると**いくらでも**その差を小さくできる。
（これが数学の極限の意味）

初等関数の、微分、不定積分の例

$$\frac{d\,x^n}{dx}=n\,x^{n-1}$$

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n\neq 1)$$

$$\frac{d\sin(ax)}{dx}=a\cos(ax)$$

$$\int \sin(ax)\,dx=-\frac{1}{a}\cos(ax)+c$$

$$\frac{d\cos(ax)}{dx}=-a\sin(ax)$$

$$\int \cos(ax)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax)+c$$

$$\frac{d\,e^{ax}}{dx}=a\,e^{ax}$$

$$\int e^{ax}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C$$

$$\frac{d\log_e(x)}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx=\log_e|x|+C$$

以上が基礎となる微分、積分の公式であり、このぐらい知っていれば十分